

Universität Heidelberg
Physikalisches Praktikum für
Studierende der Chemie
Ausgabe 28. März 2025



Inhaltsverzeichnis

Grundlagen	2
Hinweise zur Fehlerrechnung	13
Versuch 11 Einführung	28
Versuch 12 Trägheitsmoment	34
Versuch 13 Resonanz	37
Versuch 15 Schiefe Ebene	41
Versuch 22 Bestimmung der Elementarladung nach Millikan	45
Versuch 23 Strom- und Spannungsmessung	49
Versuch 26 Schallgeschwindigkeit	55
Versuch 31 Optische Abbildung	60
Versuch 33 Prismenspektrometer	71
Versuch 34 Spektralphotometrie	76
Versuch 35 Fotoeffekt	81
Versuch 223 Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung	87
Grundlagen der Radioaktivität	101
Versuch 251 Statistik und Halbwertszeit des radioaktiven Zer- falls.	109
Versuch 253 Absorption von β - und γ -Strahlung.	119
Versuch 255 Röntgenspektrometer.	129

Grundlagen

I Vorbemerkung

Dieses Praktikum verfolgt hauptsächlich drei Ziele:

1. Sie lernen den Umgang mit physikalischen Messgeräten und Messapparaturen.
2. Kenntnisse, die Sie bereits erworben haben (oder noch erwerben werden) sollen durch die Überprüfung im Experiment gesichert werden.
3. Das Führen eines Protokolls.

Zu diesem Zweck enthält das Praktikum Versuche mit überschaubarer Theorie und einfachen Messapparaturen, deren Funktionsweise leicht einzusehen ist. Natürlich ist damit nicht die Messgenauigkeit aufwendiger Apparaturen, wie sie in der Forschung verwendet werden, erreichbar. Das Ziel des Praktikums sind weniger präzise Ergebnisse, sondern Sie sollen lernen, die Einflüsse, die die Messgenauigkeit begrenzen, zu erkennen und einzuschätzen. Aus diesem Grund sollen bei der Auswertung die Ergebnisse stets mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

Lesen Sie bei der Versuchsvorbereitung die Versuchsanleitung genau durch und überlegen Sie, was bei der Versuchsdurchführung und Auswertung gemacht werden soll, welche Messwerte Sie brauchen, usw. Nur so können Sie zügig messen und vermeiden unnötige Mehrarbeit durch Fehler beim Auswerten.

Gestalten Sie die Auswertung übersichtlich und kennzeichnen Sie alle Angaben so, dass man sofort erkennen kann, worum es sich handelt (z.B.: „aus der Zeichnung abgelesen:“, „Literaturwert:“, „Mittelwert der Messreihe:“). Endergebnisse werden stets zusammen mit ihrem Fehler angegeben und besonders kenntlich gemacht, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Es ist unsinnig, den Fehler mit mehr als zwei Stellen anzugeben; das Ergebnis soll bis auf maximal zwei ungenaue Stellen angegeben werden (s.u.).

Bei graphischen Darstellungen von Messwerten ist folgendes zu beachten:

- Die graphische Darstellung erfolgt grundsätzlich auf Millimeterpapier bzw. Logarithmenpapier.
- Richtige Größe wählen. Nutzen Sie wenn möglich den vollen Bereich des mm-Papiers bzw. Logarithmenpapiers.

- Bei jeder Achse Messgröße und Maßeinheit angeben (Bsp.: T in °C, T [°C], T/°C).
- Um sich das Eintragen der Messpunkte zu erleichtern, empfiehlt es sich eine sinnvolle Achseneinteilung zu wählen (z.B. 1 °C=0,5 cm oder 1 cm oder 2 cm zu wählen und nicht 1 °C=0,4 cm oder 2,5 cm)
- Verbinden Sie beim Zeichnen von Kurven nicht einfach die Punkte miteinander („Malen nach Zahlen“), sondern versuchen Sie die Streuung der Messwerte auszugleichen.
- Befinden sich mehrere Kurven in einem Diagramm, so sind die einzelnen Kurven und Messwerte zu kennzeichnen (Legende hinzufügen).
- Jede Zeichnung, Tabelle und Diagramm muss mit einer Text-Überschrift versehen werden.

II Vorbereitung

Um das Praktikum effizient durchzuführen, ist eine gründliche Vorbereitung notwendig. Es ist nicht in Ihrem Interesse die Versuche „starr“ nach Anleitung abzuarbeiten, ohne zu verstehen was Sie überhaupt praktizieren. Die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum setzt voraus, dass Sie ein entsprechendes Kenntnisniveau der mit den Versuchen verknüpften Physik besitzen. Ob diese Kenntnisse aus Ihrem Fundus oder aus Ihrer Vorbereitung stammen, ist natürlich belanglos. Informieren Sie sich vor Beginn der Versuchsdurchführung, über die Stichpunkte, die bei den jeweiligen Versuchen unter dem Kapitel „Vorbereitung“ aufgelistet sind. Dabei reicht das alleinige Studium der Praktikumsanleitung keinesfalls aus. **Die Praktikumsanleitung ist kein Lehrbuch!** Zu jedem Versuch sind daher zusätzlich Literaturempfehlungen angegeben. Bei den meisten Versuchen ist es vollkommen ausreichend, wenn Sie sich mit Hilfe der Standardwerke (Walcher, Gerthsen, Bergmann-Schäfer, etc.) auf die Versuche vorbereiten.

Um Ihnen die Vorbereitung zu erleichtern, sind neben den Stichpunkten zusätzlich noch Fragen in der Praktikumsanleitung aufgelistet.

Eine Versuchsdurchführung ohne ausreichende Vorbereitung ist klarerweise ohne Lerneffekt und nicht sinnvoll. Die Praktikantin oder der Praktikant muss in diesem Fall damit rechnen, nach Hause geschickt zu werden und den Versuch zu einem späteren Zeitpunkt zu wiederholen.

Die folgenden Punkte fassen das Basiswissen zusammen, über das Sie bei den Versuchen verfügen sollten:

1. Mathematische Voraussetzungen - elementare Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponential-Funktion - elementares Differenzieren und Integrieren - gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung/Kraftgesetz, Gleichung des natürlichen Wachstums.
2. Statistik und Fehler - Mittelwert, Standardabweichung, statistische und systematische Fehler, Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung, Gauß-Verteilung.
3. Die 7 Basiseinheiten des SI-Systems : m, kg, s, A, K, mol, Cd.
4. Mechanik - Newtonschen Gesetze; Kräfteparallelogramm - Erhaltungssätze für Translation und Rotation (Energie, Impuls, Drehimpuls) - Drehmoment, Trägheitsmoment u. Steinerscher Satz - Hooksches Gesetz - Resonanzkurve - Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators und typische Lösungen - Schallgeschwindigkeit, longitudinale und transversale Schwingungen.
5. Elektrizitätslehre - Elementarladung und Ladungserhaltung; Faraday-Konstante, Avogadrokonstante, Stoffmenge - Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, spezifischer Widerstand - Messbereichserweiterung von Messinstrumenten - Kondensator, Kapazität - Herleitung Kondensatorentladung, Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld.
6. Optik - Reflexions- und Brechungsgesetz - Abbildung mit Linsen (geometrische Bildkonstruktion, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab) - kontinuierliche und Linienspektren (qualitatives Verständnis) - Auflösungsvermögen optischer Instrumente.
7. Wärmelehre - Wärme, Zustandsgrößen (Temperatur, innere Energie,...), Zustandsgleichung des idealen Gases - 1. und 2. Hauptsatz, Wärmebilanz, spezifische Wärme, Phasendiagramm, Dampfdruck - Van-der-Waals-Gleichung realer Gase, Verlauf der Isothermen im $p(V)$ -Diagramm, Gesetz von Dulong-Petit, Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz, Clausius-Clapeyron Gleichung.

Die Kenntnis dieses Basiswissens erspart natürlich nicht das sorgfältige Durcharbeiten der Anleitung und die Vorbereitung der anderen Kapitel im Skript. Insbesondere sollten Sie sich bei der Vorbereitung auch schon über die Versuchsdurchführung, die Messmethoden und über die Auswertung Gedanken machen. Machen Sie sich bewusst, was und wie Sie messen werden und schätzen Sie ab, welchen Einfluss die Fehler der Einzelmessungen auf den Gesamtfehler haben (Bsp.: eine quadratische Größe geht mit doppeltem Gewicht ein als eine lineare).

III Durchführung der Versuche

Sehen Sie sich die Apparatur gründlich an und machen Sie sich mit der Funktion aller Einzelteile vertraut. Spielen Sie die Messprozedur nach Möglichkeit zunächst qualitativ durch. Wenn Sie eine elektrische Schaltung herzustellen haben, kontrollieren Sie zunächst selbst sorgfältig, ob Sie keine Schaltfehler gemacht haben. **Vor Anlegen der Spannung muss die Schaltung vom Assistenten abgenommen werden.** Das Protokoll wird auch während der Messungen lückenlos geführt, d.h. man soll keine großen Zwischenräume für spätere Eintragungen lassen. Lassen Sie sich Zeit zum Führen eines ordentlichen Protokolls.

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsaufbaus: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung. Im Einzelnen soll das Protokoll enthalten:

1. Überschrift und Versuchsnummer.
2. Einleitung: Formulierung der theoretischen Grundlagen, sowie physikalischer Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis des Versuchs erforderlich sind.
3. Das Protokoll muss so ausgelegt sein, dass Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann, dann die für den Versuch nötigen Umformungen. Damit man den Einfluss der Fehler der gemessenen Größen auf das

V Versuchsergebnis leichter übersehen kann, ist es zweckmäßig, die Formeln auf die Form

Versuchsergebnis = Funktion der direkt gemessenen Größen

zu bringen. Alle Abkürzungen, die in den Formeln vorkommen, müssen erklärt sein, evtl. mit Hilfe der Skizze der Apparatur. Diesen Teil des Protokolls schreiben Sie am besten schon zu Hause bei der Vorbereitung.

4. Skizze und Beschreibung der Versuchsanordnung (schematisch, Schaltplan bei elektrischen Schaltungen).
5. Knappe aber vollständige Angaben über das Messverfahren, soweit dies nicht völlig selbstverständlich ist. Das Protokoll muss selbsterklärend sein!
6. Präsentieren Sie Ihre Messergebnisse in Form von Tabellen und Diagrammen, die klar und ausreichend beschriftet sein müssen. Kommentieren Sie diese mit einigen einleitenden Sätzen.
7. Führen Sie nach Möglichkeit eine vorläufige Auswertung unmittelbar nach der Messung durch.
8. Bei der Auswertung müssen alle Zwischenrechnungen im Protokollheft ausgeführt werden. Vergleichen Sie, soweit vorhanden, Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten. Bei der Fehlerabschätzung berücksichtigen Sie nur die Faktoren, die Sie quantitativ kennen, also im allgemeinen die zufälligen Fehler und die mutmaßliche Genauigkeit der Eichung der Instrumente. **Es genügt vollständig, sich auf die Faktoren zu beschränken, die die Messgenauigkeit hauptsächlich begrenzen.** Wenn Sie glauben, dass bei dem Versuch systematische Fehler auftreten, die Sie nicht quantitativ erfassen können, machen Sie hierüber eine kurze Bemerkung. Achten Sie darauf, dass Sie alle zur Auswertung nötigen Angaben aufgeschrieben haben (z.B. Barometerstand, Zimmertemperatur, etc.).
9. Zusammenfassung und kritische Diskussion. Fassen Sie am Schluss der Auswertung den gesamten Versuch mit einigen kurzen Sätzen zusammen. Gehen Sie dabei auf die physikalische Fragestellung ein, das Messprinzip, die Messergebnisse und Fehler. Setzen Sie sich kritisch mit dem Versuch auseinander. Gibt es Möglichkeiten den Versuchsaufbau oder das Messprinzip zu verbessern? Gibt es Möglichkeiten die Fehler zu minimieren?

IV Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung

Jede Messung kann nur mit einer begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden. Zwei unabhängige Messungen werden daher unterschiedliche Ergebnisse liefern. Damit das Resultat einer Messung aussagekräftig ist, reicht es nicht aus nur den Zahlenwert des Messergebnisses anzugeben, sondern es muss auch eine Aussage über die Messgenauigkeit gemacht werden. Dies geschieht z.B durch die Angabe eines Intervalls $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ bzw.

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

innerhalb dessen der „wahre Wert“ mit einer bestimmten, anzugebenen Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel:

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel ergab folgendes Resultat:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Die erste Zahlenangabe entspricht der besten Schätzung des „wahren Wertes“. Die zweite Zahl ist die Messgenauigkeit, die man häufig auch den „Fehler“ des Messergebnisses nennt. Das Wort „Fehler“ darf nicht falsch interpretiert werden. Diese Angabe gibt nicht etwa den Betrag an, um den das Messergebnis falsch ist, sondern stellt ein Unsicherheitsbereich dar, in dem der „wahre Wert“ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, werden wir an späterer Stelle diskutieren. Das Resultat der Messung ist dann wie folgt zu interpretieren:

Als beste Schätzung für die Erdbeschleunigung wurde ein Wert von $9,81 \text{ m/s}^2$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Intervall $9,78 \text{ m/s}^2 \dots 9,84 \text{ m/s}^2$.

Beachten Sie, dass es bei der Angabe des Messergebnisses und der Messunsicherheit keinen Sinn macht beliebig viele Nachkommastellen anzugeben (Taschenrechnerergebnis). Die Angabe

$$g = (9,8114587 \pm 0,0298682) \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

ist sinnlos. Die Messgenauigkeit soll auf eine oder höchstens zwei signifikante Stellen gerundet werden und die letzte signifikante Stelle des Messergebnisses soll der selben Größenordnung entsprechen wie die Messgenauigkeit:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (4)$$

IV.1 Systematische und Statistische Fehler

Bei einer Messung können zwei Arten von Fehlern auftreten: Systematische Fehler und statistische (zufällige) Fehler. Systematische Fehler führen dazu, dass das Messergebnis einseitig vom wahren Wert abweicht. Eine Wiederholung der Messung zeigt immer die gleiche Abweichung. Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“. Im Gegensatz dazu schwanken bei zugrundeliegenden statistischen Fehlern, die Messwerte zufällig. Mal sind sie größer, das andere mal kleiner als der „wahre Wert“.

IV.1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler werden zunächst durch die begrenzte Genauigkeit der Eichung der Instrumente verursacht. Bei Maßstäben und Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit. An vielen Analogmessinstrumenten ist zusätzlich noch eine Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt den relativen Fehler des Messbereichsendwertes an. Wird z.B. mit einem Voltmeter der Klasse 1,5 innerhalb eines Messbereiches von 200 V eine Messung durchgeführt, so beträgt der Fehler 1,5% von 200 V, d.h. 3 V. Bei digitalen Instrumenten wird der Fehler in der Regel durch zwei Größen angegeben. Einen prozentualen Fehler, der sich entweder auf dem Messwert (Angabe *v.M.* = *vom Messwert*) oder auf den Messbereich (Angabe *v.E.* = *vom Endwert*) bezieht, sowie eine Fehlerangabe in der Form: $\pm x$ Digits. Die letztere Angabe bedeutet, dass der Messwert um $\pm x$ Einheiten der hintersten Stelle der Anzeige schwanken kann.

Beispiel: Mit einem digitalen Voltmeter mit der Genauigkeitsangabe

$$\pm 1,5\% \text{ v.M.}, \pm 3 \text{ Digits}$$

wird ein Spannung von 12,00 V gemessen. Der absolute Fehler berechnet sich aus 1,5% vom Messwert sowie drei Einheiten der letzten Stelle: 1,5% von 12,00 V und $3 \times 10 \text{ mV} = 180 \text{ mV} + 30 \text{ mV} = 210 \text{ mV}$.

Desweiteren können systematische Fehler auch durch Umwelteinflüsse wie Temperaturdriften, Einkopplung elektrischer Felder (z.B. Netzbrummen) etc. oder aber auch durch grundsätzliche Mängel des Messverfahrens verursacht werden. Z.B. muss bei der Messung an einer hochohmigen Spannungsquelle der Innenwiderstand des Voltmeters berücksichtigt werden (wichtig in Versuch 41 *Temperaturmessung*). Geschieht dies nicht, treten systematische Abweichungen auf.

Für die Abschätzung von systematischen Fehlern lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Es kommt im Einzelfall auf den Scharfsinn und die physikalischen Kenntnisse des Experimentators an. Allerdings können systematische Fehler auch noch nach einer Messung berücksichtigt werden. Sind die Ursachen bekannt, kann das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.

IV.1.2 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Prozesse während des Messprozesses. Ursachen hierfür sind z.B. das Rauschen eines Sensors oder thermodynamische Prozesse. Auch der Experimentator selbst kann eine statistische Fehlerquelle darstellen, da dieser stets die Messwerte aufnehmen, ablesen und interpretieren muss. All dies kann statistischen Schwankungen unterliegen. Z.B. wird man bei einer mehrmaligen Zeitmessung mit einer Stoppuhr aufgrund schwankender Reaktionszeiten verschiedene Ergebnisse erhalten.

Statistische Fehler haben die Eigenschaft, dass die Messergebnisse zufällig um den „wahren Wert“ schwanken. Falls es möglich ist eine Messung mehrmals zu wiederholen, können solche Fehler mit Mitteln der Statistik aus der Streuung der Messwerte ermittelt werden.

Tabelle 1 zeigt ein Beispiel, bei dem eine elektrische Spannung x 20-mal gemessen wurde. Die Messwerte sind in Abbildung 1 eingetragen.

Gesucht ist ein Wert der die beste Schätzung des wahren Wertes darstellt. Mit Hilfe statistischer Überlegungen lässt sich zeigen, dass dieser Bestwert dem arithmetischen Mittelwert entspricht:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (5)$$

Dieser Wert ist in Abbildung 1 als waagrechte Linie eingezeichnet.

Neben der besten Schätzung des „wahren Werts“ (Mittelwert) müssen wir

Nr.	x [V]	Nr.	x [V]	Nr.	x [V]	Nr.	x [V]
1	5,070	6	5,039	11	5,053	16	5,038
2	5,073	7	5,043	12	5,054	17	5,058
3	5,031	8	5,034	13	5,078	18	5,040
4	5,024	9	5,034	14	5,071	19	5,071
5	5,034	10	5,079	15	5,050	20	5,051

Tabelle 1: *Ergebnisse einer 20-maligen Spannungsmessung.*

zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung machen. Dazu wiederholen wir die Messung nicht nur 20-mal sondern viele Male mehr. In Abbildung 2 sind z.B. 3500 Einzelmessungen aufgetragen. Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass die Messwerte symmetrisch um einen mittleren Wert streuen. Die meisten Messwerte liegen in der Nähe des Mittelwertes. Aber es gibt auch einzelne „Ausreißer“, die weiter weg vom Mittelwert liegen. Um dies zu quantifizieren empfiehlt sich eine andere grafische Darstellung der Messwerte in Form eines Histogramms. Dabei wird gezählt, wieviele Einzelmessungen innerhalb eines bestimmten Intervalls aufgetreten sind und die entsprechende Häufigkeit in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Solch ein Histogramm ist in Abbildung 3 dargestellt. Für sehr viele Messungen, streng genommen für unendlich viele, nähert sich das Histogramm einer bekannten Verteilung, die als Normal- bzw. Gaußverteilung bezeichnet wird und durch

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

dargestellt wird. Die Gaußverteilung beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$\int_a^b P(x) dx \quad (7)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert x_i gemessen wird, der im Intervall $a \leq x_i \leq b$ liegt. Durch den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ ist die Verteilung normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1. \quad (8)$$

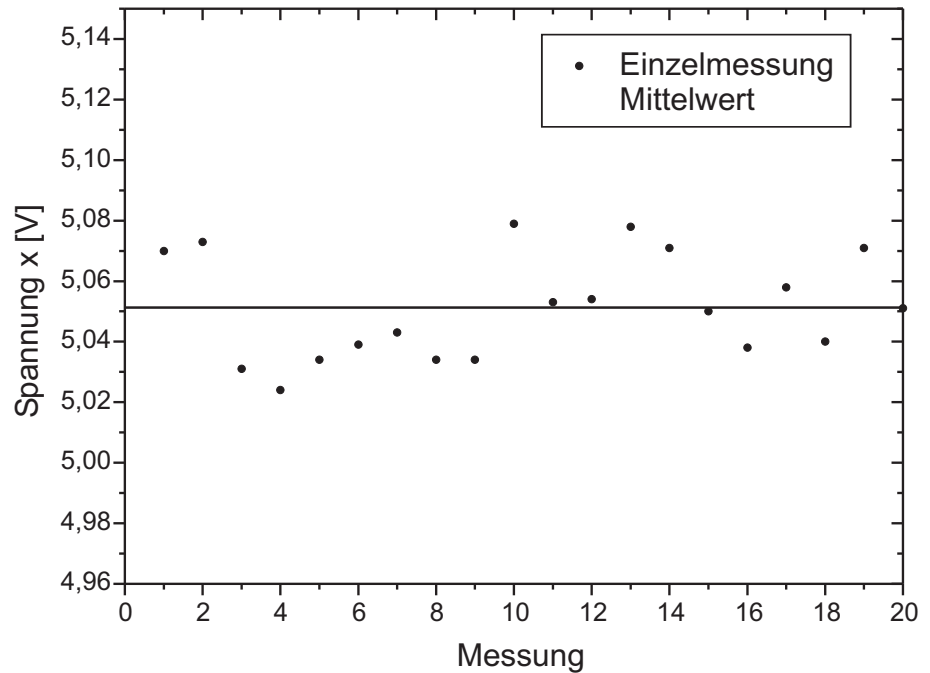


Abbildung 1: *Darstellung von 20 unabhängigen Messungen einer elektrischen Spannung x . Die waagrechte Linie entspricht dem Mittelwert.*

Dies ist sofort einsichtig, da mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit irgendein Wert gemessen wird.

Eine Gaußverteilung besitzt zwei Parameter. Die Lage des Maximums der Verteilung wird durch die Größe μ bestimmt und entspricht dem wahrscheinlichsten Wert. Die Breite der Verteilung ist durch die Größe σ (Abbildung 3) gegeben.

Falls die Messwerte tatsächlich gaußverteilt sind - und das ist sehr häufig der Fall - können wir annehmen, dass wir das Messergebnis einer großen Anzahl von Einzelmessungen, ebenfalls durch die Parameter μ und σ beschreiben können.

Wie sich zeigen lässt, konvergiert der arithmetische Mittelwert \bar{x} für eine große

Anzahl von Einzelmessungen, gegen den wahrscheinlichsten Wert μ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu. \tag{9}$$

Der Mittelwert stellt somit, wie wir bereits zuvor erwähnt haben, die beste Schätzung des „wahren Werts“ dar.

Die Breite der Gaußverteilung wird durch σ bestimmt. Je größer σ , desto breiter ist die Verteilung und umso größer ist die Streuung der Messwerte um den wahrscheinlichsten Wert μ . Wir können daher σ als ein Maß für die Messgenauigkeit interpretieren.

Für eine große Anzahl von Einzelmessungen lässt sich zeigen, dass die Reihe (Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert)

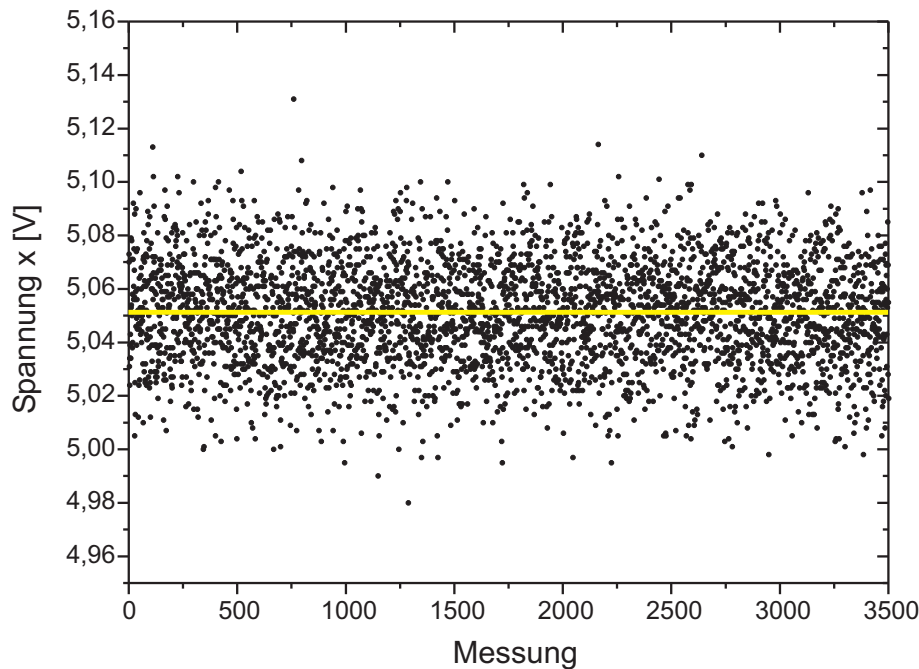


Abbildung 2: Darstellung von 3500 Messungen.

$$S'_E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \tag{10}$$

gegen σ konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_E = \sigma. \tag{11}$$

S'_E wird als **Standardabweichung** einer Messreihe bezeichnet. Allerdings ist hier Vorsicht geboten. S'_E ist nur dann ein guter Schätzwert für die Streuung der Messwerte, wenn viele Einzelmessungen durchgeführt werden. Bei nur wenigen

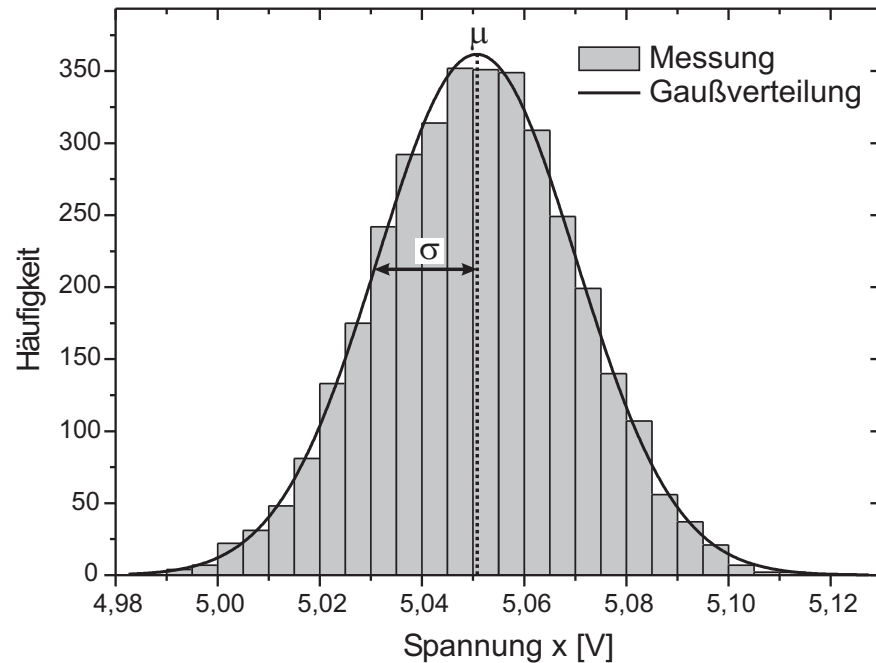


Abbildung 3: Histogramm von 3500 Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie zeigt die dazugehörige Gaußverteilung mit den Parametern μ und σ . Die Gaußverteilung ist hier nicht auf Eins normiert, sondern auf die Fläche des Histogramms.

Intervall	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
Wahrscheinlichkeit	68,3%	95,5%	99,7%

 Tabelle 2: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .*

Messungen wird die Streuung um den Mittelwert überschätzt. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es besser ist als Maß für die Streuung die Größe

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (12)$$

zu verwenden. S_E wird auch als der **mittlere Fehler einer Einzelmessung** bezeichnet.

Wird eine Messung viele male wiederholt und als beste Schätzung des „wahren Wertes“ der Mittelwert \bar{x} angegeben, so ist dieser natürlich genauer als der Messwert einer Einzelmessung und zwar um den Faktor $1/\sqrt{N}$:

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (13)$$

S_M wird auch als **mittlerer Fehler des Mittelwerts** oder einfach als **Standardfehler** bezeichnet.

Mit Hilfe von Gleichung (7) lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert x_i im Bereich von $\pm\sigma$ um den wahrscheinlichsten Wert μ schwankt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P(x) dx = 68,3 \%. \quad (14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung ein Wert im Bereich $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ auftritt beträgt 68,3 %. Analog lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für den 2σ bzw. 3σ -Bereich bestimmen.

Für das Endergebnis einer Messung gibt man in der Regel den 1σ -Fehler S_E bzw. S_M an. Wird ein größerer Fehlerbereich angegeben (z.B. 3σ -Fehler) ist dies gesondert zu vermerken.

Beispiel:

Für die in Tabelle 1 angegebenen Messdaten errechnen sich die Ergebnisse wie folgt:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{5,070 \text{ V} + \dots + 5,051 \text{ V}}{20} = 5,051 \text{ V}. \quad (15)$$

$$\text{Fehler einer Einzelmessung: } S_E = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0173 \text{ V}. \quad (16)$$

$$\text{Fehler des Mittelwerts: } S_M = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0039 \text{ V}. \quad (17)$$

Das Endergebnis wird in der Form

$$\bar{x} \pm S_M \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm \Delta x \quad (18)$$

angegeben. Anstatt S_M schreibt man auch häufig für den Fehler einfach Δx . In unserem Beispiel erhalten wir

$$x = (5,051 \pm 0,004) \text{ V}. \quad (19)$$

IV.2 Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Praktikumsversuchen reicht es nicht aus nur eine physikalisch Größe zu messen und dessen Fehler abzuschätzen. In der Regel sollen aus dem Messergebnis weitere Größen und dessen Genauigkeiten bestimmt werden.

Beispiel:

Es soll die Verlustleistung P eines ohmschen Widerstands R , an dem die Spannung U anliegt, bestimmt werden. Dazu wird der Widerstand R und die Spannung U gemessen und gemäß

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (20)$$

die Verlustleistung berechnet. Da sowohl R als auch U nur mit einer bestimmten Genauigkeit bestimmt wurden, besitzt auch die daraus abgeleitete Größe P eine endliche Genauigkeit.

Die Bestimmung dieser Genauigkeit geschieht mit Hilfe der Differentialrechnung.

Wenn die direkt gemessenen Größen x und y um kleine Beträge dx und dy geändert werden, verändert sich der Wert einer Funktion $f = f(x, y)$ um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{vollständiges Differential}) \quad (21)$$

Hier bedeutet $\partial f / \partial x$ die partielle Differentiation der Funktion f nach x , d.h. die Ableitung von f nach x , wobei die Variable y als Konstante behandelt wird.

Wenn wir in dieser Gleichung die Differentiale dx und dy durch die Fehler Δx und Δy der direkt gemessenen Größen ersetzen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich die Fehler im Mittel teilweise kompensieren werden, wenn sie voneinander unabhängig sind. Daher berechnet man den mittleren Fehler Δf durch „quadratische Addition“ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (22)$$

Hier und im Folgenden wird unter Δx bei zufälligen Fehlern, der mittlere Fehler S_M nach Gleichung (13), bei systematischen Fehlern die oben diskutierten Überlegungen verstanden.

Für das oben angeführte Beispiel (20) berechnet sich der Fehler wie folgt:

$$P = P(U, R) \quad (23)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (24)$$

$$= \sqrt{\left(2 \frac{U}{R} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2} \Delta R\right)^2} \quad (25)$$

Die funktionale Abhängigkeit der zu ermittelnden Größe von den direkt gemessenen hat häufig eine einfache Form. Es lohnt sich, die folgenden Formeln zu

merken, die aus der allgemeinen Gleichung (22) folgen:

$$f = ax \quad \Delta f = a \Delta x \quad (26)$$

$$f = x + y \quad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (27)$$

$$f = xy, \quad f = x/y \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (28)$$

$$f = x^{\pm b} \quad \frac{\Delta f}{f} = |b| \frac{\Delta x}{x}, \quad b = \text{const.} \quad (29)$$

Merken Sie sich:

1. „Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der absoluten Fehler der Summanden“.
2. „Der relative Fehler des Produkts oder des Quotienten zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der einzelnen relativen Fehler“.

Für eine Fehlerabschätzung kann man statt den Gleichungen (27) und (28) auch die einfacheren Formeln $\Delta f = \Delta x + \Delta y$ bzw. $\Delta f / f = \Delta x / x + \Delta y / y$ verwenden. Bevor man mit der Messung beginnt, sollte man sich mit Hilfe der Gleichungen (26) bis (29) überlegen, durch welche Fehler die Genauigkeit der Messung hauptsächlich begrenzt wird. Man kann dann versuchen, die empfindlich in das Resultat eingehenden Fehler klein zu halten.

V Ausgleichsrechnung

Bei vielen Praktikumsversuchen kommt es häufig vor, dass die Steigung m einer linearen Funktion bestimmt werden muss. Hier im Praktikum können Sie dies auf zwei verschiedene Arten machen. Eine grafische Methode die hier erläutert werden soll und eine rechnerische Methode die im nächsten Abschnitt *Lineare Regression* diskutiert wird.

Wir wollen die Bestimmung einer Geradensteigung anhand eines Beispiels mit Daten des Versuchs 35, *Fotoeffekt* erläutern. Bei diesem Versuch wird mit Hilfe einer Fotozelle das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Dazu wird die Fotozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenz (Farbe) beleuchtet und gemessen, bei welcher Sperrspannung U_S der Fotostrom verschwindet. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt. Das

Farbe	Frequenz [THz]	U_S [V]	ΔU_S [V]
gelb	518,7	-0,59	0,05
grün	549,0	-0,72	0,05
blau	687,9	-1,28	0,05
UV	821,3	-1,88	0,05

Tabelle 3: Messdaten aus dem Versuch Fotoeffekt.

Planck'sche Wirkungsquantum lässt sich aus der Steigung $\Delta U_S/\Delta f$ des Graphen gemäß

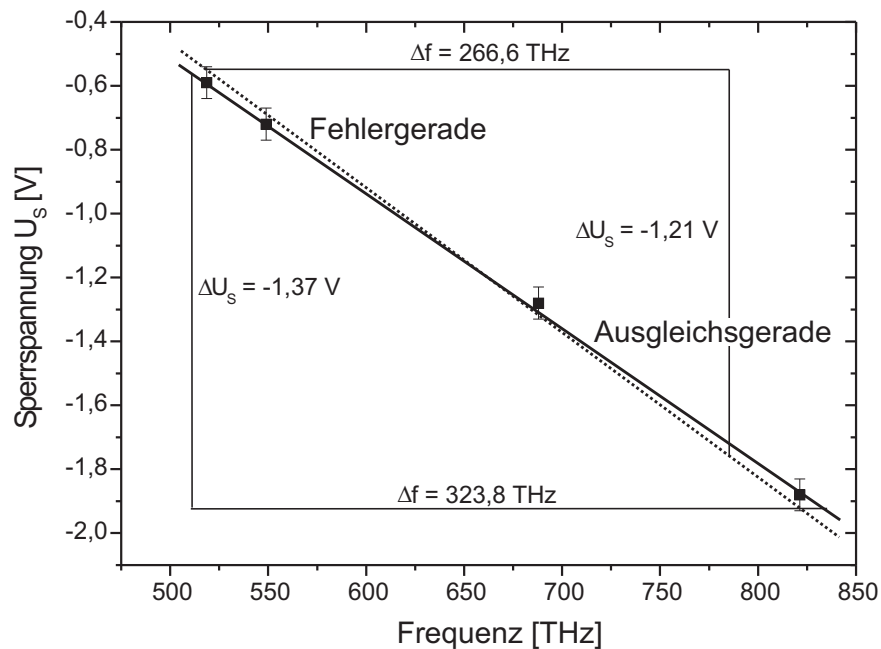


Abbildung 4: Bestimmung der Steigung und dessen Fehler mit Hilfe einer Ausgleichsgerade (durchgezogen) und Fehlergerade (punktiert).

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f}, \quad (30)$$

bestimmen, wobei e die Elementarladung darstellt. Um die Steigung zu berechnen legen wir zunächst durch alle Messpunkte unter Berücksichtigung der Messfehler eine Ausgleichsgerade. Dabei soll die Gerade so platziert werden, dass die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der Gerade im Mittel minimal wird.

Für das Planck'sche Wirkungsquantum berechnen wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,37 \text{ V}}{323,8 \text{ THz}} = 6,78 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (31)$$

Um den Messfehler abzuschätzen, legen wir durch die Messwerte eine zweite Gerade (Fehlergerade). Diese sollte maximal steil (oder maximal flach) sein aber noch innerhalb der Fehler der einzelnen Messungen liegen. Hieraus erhalten wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,21 \text{ V}}{266,6 \text{ THz}} = 7,27 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (32)$$

Den Fehler schätzen wir aus der Differenz der beiden Steigungen ab. Somit lautet das Ergebnis dieser Messung:

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (33)$$

VI Lineare Regression

Sofern bei einer Messung keine systematischen Fehler auftreten und die Messdaten normalverteilt sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, für x_i den Wert y_i zu messen:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta y_i} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}, \quad (34)$$

wobei Δy_i den Fehler von y_i bezeichnet. Die Gesamtwahrscheinlichkeit P alle N Messwerte zu messen, berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrschein-

lichkeiten P_i :

$$P = \prod_i P_i \quad (35)$$

$$= \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i} \right)^2 \right\}. \quad (36)$$

Gesucht werden nun die Funktionsparameter von $f(x)$, für die die Wahrscheinlichkeit P maximal wird. Der erste Term in (36) stellt eine Konstante dar, die nicht von den Funktionsparametern abhängt. Somit wird die Wahrscheinlichkeit maximal, wenn die Summe in der Exponentialfunktion minimal wird. Diese Summe wird auch als χ^2 -Summe bezeichnet.

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i} \right)^2. \quad (37) \quad \text{mit}$$

Wir wollen uns im Folgenden auf lineare Funktionen beschränken, d.h.

$$f(x) = mx + n. \quad (38)$$

Für die Berechnung der Parameter m und n folgt dann:

$$\chi^2(m, n) = \sum_i \left(\frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i} \right)^2 = \text{Minimum} \quad (39)$$

Durch diese Methode wird eine Gerade mit den Parametern m und n bestimmt, für die die quadratischen Abstände der Messwerte y_i von der Geraden minimal wird. Durch den Faktor $1/\Delta y_i^2$ werden zusätzlich Messwerte mit einem kleinen Fehler Δy_i stärker gewichtet als Messwerte mit einem großen Fehler (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl.: least square method).

Für die Berechnung von m und n müssen wir die Nullstellen der partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = -2 \sum_i x_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial n} = -2 \sum_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0. \quad (41)$$

Auflösen nach den Funktionsparametern liefert:

$$m = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \quad (42)$$

$$n = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right), \quad (43)$$

$$\xi = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2. \quad (44)$$

Für den Fall, dass alle Fehler gleich groß sind, d.h. $\Delta y_i \equiv \Delta y$, vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (45)$$

$$n = \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\overline{x\bar{y}}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (46)$$

Da die Messwerte y_i fehlerbehaftet sind, besitzen auch die Funktionsparameter einen Fehler den wir mit Δm bzw. mit Δn bezeichnen. Die Fehler berechnen sich nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta m^2 = \sum_i \left(\frac{\partial m}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \quad (47)$$

$$\Delta n^2 = \sum_i \left(\frac{\partial n}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \quad (48)$$

Mit Hilfe von Gleichung (42) und (43) erhalten wir:

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \quad (49)$$

$$\Delta n^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}, \quad (50)$$

wobei ξ in Gleichung (44) definiert wurde. Sind wiederum alle $\Delta y_i \equiv \Delta y$ gleich groß, so vereinfachen sich diese Berechnungen zu

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{1}{x^2 - \bar{x}^2}, \quad (51)$$

$$\Delta n^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{\bar{x}^2}{x^2 - \bar{x}^2}. \quad (52)$$

Die hier ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für lineare Funktionen, sondern lassen sich auch auf andere Funktionen übertragen.

Wir wollen wieder eine Beispielrechnung mit den Daten des Versuchs Fotoeffekt (Tabelle 3) durchführen. Hier entspricht $x = \text{Frequenz}$, $U_S = y$ und $\Delta U_S = \Delta y$. Da die Fehler der einzelnen Messungen alle gleich groß sind, müssen wir nur die Mittelwerte in Gleichung (45) berechnen:

$$\bar{x} = 6,442 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (53)$$

$$\bar{y} = -1,118 \text{ V} \quad (54)$$

$$\overline{xy} = -7,815 \times 10^{14} \text{ VHz} \quad (55)$$

$$\overline{x^2} = 4,295 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (56)$$

$$\bar{x}^2 = 4,150 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (57)$$

Für die Steigung folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz}. \quad (58)$$

Das Plank'sche Wirkungsquantum erhalten wir durch Multiplikation mit der Elementarladung:

$$h = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz} = 6,79 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (59)$$

Den Fehler berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (51):

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N(x^2 - \bar{x}^2)}, \quad (60)$$

wobei nach Tabelle 3 für $\Delta y = 0,05 \text{ V}$ und für $N = 4$ zu wählen ist. Wir erhalten für den Fehler von h :

$$\Delta h = e \Delta m = 0,33 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (61)$$

Das Messergebnis lautet somit

$$h = (6,8 \pm 0,3) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (62)$$

Hinweise zur Fehlerrechnung

Wir wollen richtige Fehler! Ein Statistik - Feuilleton zur Lektüre am Feierabend

Dr. J. Stiewe - Kirchhoff-Institut für Physik, Universität
Heidelberg

I Eine etwas längliche, aber notwendige Einleitung

Fehlerrechnung hat nur einen begrenzten Sex - Appeal. Dies gilt nicht nur für die Physik, sondern auch für alle Adepten der sogenannten exakten Naturwissenschaften. Auf das "exakt" kommen wir noch zurück.

Aber das ist ungerecht. Wer einmal an einem wissenschaftlichen Projekt mitgearbeitet hat, der weiß, daß sich die Gelehrten meistens heftiger um die Größe ihres Meßfehlers streiten als um den Wert der weltbewegenden Zahl, die sie veröffentlichen wollen.

Warum ist das so? Zunächst: Wer eine bestimmte Größe messen will, etwa - um ein simples Beispiel zu wählen - die Entfernung zwischen zwei Orten, der wird den "wahren" Wert dieser Entfernung nie ergründen. Denn schon bei der zweiten Messung wird er feststellen, daß der Wert von der ersten Messung abweicht - vorausgesetzt, sein Meßgerät ist empfindlich genug. Wer Entfernungen schlicht in "Tagesreisen" mißt, hat diese Probleme natürlich nicht.

Die gleiche Erfahrung wird man machen, wenn ein zweiter Experimentator die Messung durchführt: Auch er wird eine - im günstigen Fall geringe - Abweichung von der Messung des Kollegen feststellen, und zwar auch dann, wenn er dessen Meßgerät benutzt. (Wir wollen für den Augenblick ausschließen, daß eines der Geräte schlicht fehlerhaft arbeitet.)

Was also kann man nach mehreren Messungen guten Gewissens behaupten? Man kann eine Vorschrift konstruieren, die auf die "beste Schätzung" des wahren Wertes führt. Wir ahnen, daß dies im einfachsten Fall der Mittelwert (das arithmetische Mittel der Einzelmessungen) sein wird. Wir werden sehen, daß man das begründen kann.

I.1 Vertrauen hat Grenzen

Man kann aber auch von einem anderen Standpunkt an die Sache herangehen: Wir fragen nicht nach der besten Schätzung, also dem Wert, der dem unbekanntem "wahren" Wert unserer Meinung nach am nächsten kommt, sondern nach dem **Intervall**, in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, z.B. 95 % oder 99 %, liegt. Wir brauchen also zwei Zahlen a und b , so daß nach unseren Forschungen der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von (z.B.) 95 % zwischen diesen beiden Zahlen liegt:

$$a < \text{wahrer Wert} < b \quad (95 \% \text{ CL}).$$

Das "CL" steht für "Confidence Level" ("Vertrauensniveau") und gibt eben die Wahrscheinlichkeit an, mit der der wahre Wert in diesem Intervall zu finden wäre, wenn man ihn denn finden könnte. Natürlich möchte jeder Experimentator sein Ergebnis mit einem möglichst schmalen Vertrauensbereich publizieren.

Ein solcher Vertrauensbereich wird im Volksmund "Fehler" genannt. Das ist kein sehr glücklicher Terminus, da das Wort "Fehler" suggeriert, daß man etwas falsch gemacht hat. Aber der "Fehler" ist auch dann endlich, wenn man garantiert alles richtig macht. Man sagt deshalb auch oft "Unsicherheit" und vermeidet den "Fehler". (Übrigens: Diesen Fehler nennen die Angelsachsen "error" (oder "uncertainty"), aber nicht "mistake".)

Darüber, wie die Fehler einer Messung zu bestimmen sind, wurden viele Bücher und Artikel verfaßt. Wir werden am Schluß einige von ihnen nennen. Man braucht aber ein Minimum an Kenntnissen von der Kunst der "Statistik", also der Wissenschaft, die untersucht, an welche Regeln sich der Zufall hält. Dort geht es um Wahrscheinlichkeitsdichten, ihre Darstellung, und die Parameter, mit denen man sie beschreibt. Wir werden die wichtigsten kennen (und lieben!) lernen.

I.2 Richtige Fehler sind wichtig, z.B. für den Nobelpreis!

Zum Schluß dieser Einleitung noch ein anschauliches Beispiel, das zeigen soll, wie wichtig die Bestimmung des "richtigen" Fehlers ist: Nehmen wir an, drei Wissenschaftler wollen unabhängig voneinander eine wichtige Naturkonstante messen, für deren Veröffentlichung es internationalen Ruhm zu gewinnen gibt. Der erste zieht seine Messung ordentlich und nach bestem Wissen und Gewissen durch und veröffentlicht sein Resultat. Der zweite macht es ebenso; natürlich

hat er ein etwas anderes Resultat bekommen, aber sein "Vertrauensbereich" und der des ersten überlappen sich. Der dritte hat ein Resultat, das von denen der beiden Kollegen abweicht. Er hat aber auch - Hochmut kommt vor dem Fall! - seinen Fehler gnadenlos unterschätzt und gibt ein so schmales Intervall an, daß es mit keinem der beiden anderen überlappt. Folge: Diese Messung nimmt niemand ernst. Wohlgermerkt: Nicht die wichtige Naturkonstante wurde "falsch" gemessen, sondern ihre Unsicherheit wurde falsch bestimmt! Denn durch die Angabe eines winzigen Fehlers behauptet man implizit, daß die Messungen anderer schlicht inkompatibel sind: Ein Fehlerbalken ist eben eine harte Aussage darüber, daß der Experimentator den "Wahren Wert" mit z.B. 68 % ("Gaußscher Fehler", darauf kommen wir noch) Wahrscheinlichkeit innerhalb seiner Fehlergrenzen wähnt.

Ach ja: Da waren noch die "exakten" Naturwissenschaften. Wie paßt das "exakt" zu den allgegenwärtigen, unvermeidlichen Fehlern? Es ist eben **kein** Widerspruch; denn gerade die korrekte (nicht immer einfache!) Bestimmung von Meßunsicherheiten, die nicht ohne Grund "Confidence Levels" heißen, gibt dem Wissenschaftler in Süd - Alaska die Möglichkeit, sein Ergebnis mit dem des Kollegen aus Ost - Japan zu vergleichen: Sind unsere Ergebnisse "innerhalb der Fehler" kompatibel? Warum hat der Kollege die geringere Unsicherheit? Was muß ich tun, um meinen Fehler zu verkleinern? Etc etc.. Kurzum: Die exakten Naturwissenschaften heißen exakt, weil sie genau angeben, wie ungenau sie sind.

II Meßreihen und ihre Parameter

Die meisten von Ihnen werden die Begriffe "Mittelwert", "Varianz" und "Standardabweichung" schon einmal gehört haben, auch wenn Ihnen deren Definitionen gerade nicht gegenwärtig sind. Für die echten Fans: Es gibt noch weitere interessante Parameter wie "Schiefe" ("skewness") und "Wölbung" ("kurtosis"), auf die wir aber nicht eingehen werden. Alle diese Parameter dienen zur Charakterisierung der Verteilung von "Wahrscheinlichkeitsdichten". Dies sind eben jene statistischen Verteilungen, denen man entnehmen kann, wie wahrscheinlich es (z.B.) ist, älter als 101 Jahre zu werden oder mehr als eine Million Euro im Jahr zu verdienen. Die berühmteste Verteilung einer Wahrscheinlichkeitsdichte ("probability density") ist natürlich die Gaußverteilung, die auch "Normalverteilung" genannt wird.

Wir wollen uns diesen schrecklichen Dingen aber von einer ganz einfachen Seite nähern: Wir wollen die Zeit messen, die ein Läufer für eine bestimmte Strecke,

z.B. 1000 m, braucht. Dazu brauchen wir (von den Startpistolen etc abgesehen) natürlich (mindestens) eine Uhr. Wir wollen annehmen, daß dies eine "analoge" Uhr ist, also eine mit Zeigern, und daß die Ablesegenauigkeit begrenzt bis mäßig ist. Und da wir hier ein "Gedankenexperiment" (englisch: "gedanken experiment") durchführen, soll es möglich sein, den Läufer immer wieder in genau der gleichen "wahren" Zeit die Strecke durchlaufen zu lassen.

II.1 Was ist der wahre Wert?

Wenn wir das tun, werden wir, wie schon oben angedeutet, feststellen, daß die Meßwerte, die wir nacheinander registrieren, immer ein wenig voneinander abweichen. Wir fragen uns also, was wir tun können, um dem "wahren" Wert der zu messenden Zeit möglichst nahe zu kommen. Dazu betrachten wir das Protokoll unserer Messungen, denn wir haben natürlich jede Einzelzeit notiert. Aber bevor wir weitermachen, erlauben wir uns wieder einen kleinen intellektuellen Schlenker: Anstatt daß wir den armen Läufer "immer wieder" starten lassen, lassen wir ihn nur einmal laufen; dafür lassen wir die Zeit jetzt von 20 Leuten gleichzeitig bestimmen: Jeder von diesen hat eine Stoppuhr in der Hand, die den anderen nach Bauweise und Ablesegenauigkeit gleicht. Auch soll keine defekt sein oder vor- oder nachgehen.

Der Läufer läuft also, und die 20 Linienrichter geben ihre gemessenen Zeiten zu Protokoll. Um eine bessere Übersicht zu haben, trägt der Ober - Linienrichter sie in ein simples Diagramm ein, er markiert nämlich auf einer geraden Linie, die die "Zeitachse" darstellt, jede gemessene Einzelzeit mit einem kurzen senkrechten Strich an der jeweiligen Position.

Wir übersehen jetzt mit einem Blick, wie sich die Meßwerte verteilen: Irgendwo "häufelt" es, und an den Rändern wird es dünn. Natürlich haben wir den Verdacht, daß die Meßwerte da, wo sie dichter liegen, in der Nähe des wahren Wertes liegen, während die "dünnen" Werte weiter von diesem entfernt sind. Und jetzt gehen wir ganz tapfer los und behaupten: "Die beste Schätzung für den (unbekannten!) wahren Wert ist das arithmetische Mittel aller Einzelmessungen". Das leuchtet unmittelbar ein, und wir werden gleich sehen, daß der Mittelwert tatsächlich vor allen anderen Werten ausgezeichnet ist. Wenn wir unsere Einzelmessungen mit t_i bezeichnen, wobei der Index i von 1 bis 20 läuft, dann erhalten wir den Mittelwert, indem wir alle 20 Messungen aufsummieren und die Summe durch 20 dividieren:

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20}.$$

Für die, denen diese Formel seltsam vorkommt: Das große griechische Sigma mit den beiden Indizes 1 und 20 ist nichts als eine Abkürzung für die Vorschrift, die zwanzig einzelnen Messungen t_i aufzusummieren. Wenn man nicht von vornherein weiß, um wie viele Messungen es geht, nennt man deren Anzahl ganz allgemein N und summiert entsprechend:

$$\text{Summe} = \sum_{i=1}^N s_i,$$

wobei die s_i die N Summanden sind.

Natürlich kann man die Summe, je nach Problemstellung, auch bei Null oder -3 anfangen und bei $N - 2$ oder $N + 5$ etc enden lassen.

Aber zurück zu unserem 1000 m - Läufer. Wir haben aus den 20 Einzelmessungen den Mittelwert ("mean value") $\langle t \rangle$ herausgekocht, den wir für die beste Schätzung des wahren Wertes halten. Bevor wir aber den Charme des Mittelwertes (MW) ganz erkennen, wollen wir unser Gedankenexperiment erweitern: Wir wiederholen die Zeitmessung, allerdings mit neuen Stoppuhren, die deutlich weniger genau sind als die vorigen. Wenn wir dann wieder die Einzelmessungen auf unserer Geraden einzeichnen, dann werden wir sehen, daß die Werte jetzt wesentlich weiter auseinanderliegen als bei der ersten Messung. Wie können wir diese beiden unterschiedlichen Meßreihen quantifizieren?

II.2 Varianz und Standardabweichung

Wir brauchen offenbar ein Maß für die Streuung, und das erhalten wir folgendermaßen: Wir rechnen uns zunächst den MW aus und nennen ihn $\langle t \rangle$. Wie man das macht, wissen wir bereits. Dann bilden wir für jede Einzelmessung die Differenz zum MW und **quadrieren** diese: $(\langle t \rangle - t_i)^2$. Diese quadrierten Differenzen addieren wir alle und dividieren dann durch $(20 - 1) = 19$. Das Ergebnis nennen wir "Varianz" und kürzen es mit σ^2 ("sigma - Quadrat") ab:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (\langle t \rangle - t_i)^2}{19},$$

oder allgemein, bei N Messungen:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\langle t \rangle - t_i)^2}{N - 1}.$$

Durch die Konstruktion der Varianz als Summe aus (quadrierten) Differenzen zwischen Mittelwert und Einzelmessungen wird unmittelbar klar, daß sie für "schmale" Verteilungen klein und für "breite" Verteilungen groß wird. - Die Varianz wird auch "mittlere quadratische Abweichung" (engl. mean square deviation) genannt.

Natürlich fragt sich hier der scharfsinnige Leser / die scharfsinnige Leserin sofort, warum man bei der Berechnung der Varianz durch " $N - 1$ " und nicht durch N dividiert, wie bei der MW - Bildung. Ein Grund dafür liegt darin, daß man eben den wahren Wert nicht kennt und ihn durch den MW ersetzen muß, den man aber auch aus den 20 bzw. N Einzelmessungen ableiten muss. Dies bedeutet eine Informationseinbuße, die man mit einer größeren Varianz "bezahlen" muß. Oft wird auch gefragt, warum man denn die Abweichungen vom MW quadrieren muß - tut es nicht auch der Absolutwert der Differenz? Er tut es nicht; erstens aus formalen Gründen: Die Varianz ist das "zweite Moment" der Verteilung, und die ist "quadratisch" definiert (s. auch Abschnitt 3.2), und zweitens auch anschaulich: Nur eine parabolische Abhängigkeit führt auf ein eindeutiges Minimum. Darauf kommen wir gleich zurück. Der Mittelwert ist das "erste Moment".

Mit der Varianz (englisch: variance) haben wir jetzt ein Maß für die "Breite" einer Verteilung gewonnen. Wenn zwei Meßreihen derselben Größe zwei verschiedene Varianzen zeitigen, so werden wir die mit der kleineren Varianz als die genauere Messung bezeichnen.

Wenn man aus der Varianz σ^2 die Quadratwurzel zieht, so erhält man "die Standardabweichung" σ . (Englisch: standard deviation.) Da die Quadratwurzel eine monotone Funktion ist, ist auch σ ein Maß für die Breite einer Verteilung. Man nennt die Standardabweichung deshalb auch den "Fehler der Einzelmessung". Wir schreiben diese Größe noch einmal hin und **merken uns ihre Definition fürs Leben**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle t \rangle - t_i)^2}{N - 1}}.$$

Daß σ auch “Fehler der Einzelmessung” genannt wird, liegt daran, daß man bei Kenntnis des Mittelwertes und der Standardabweichung im allgemeinen (und im besonderen bei der Gaußverteilung) die Wahrscheinlichkeit angeben kann, daß ein Meßwert in einem Intervall ($MW - \sigma$, $MW + \sigma$) um den Mittelwert liegt. Gerade die Größe dieses Intervalls kennzeichnet ja die “Genauigkeit” einer Messung. - Die Standardabweichung wird in der angelsächsischen Literatur oft als “r.m.s.” (“root mean square”) bezeichnet.

II.3 Der diskrete Charme des Mittelwerts

Wir wollen aber noch einmal auf die besondere Eigenschaft des Mittelwertes zurückkommen. Dazu denken wir z.B. an die verschiedenen Meßwerte, die wir gewonnen haben, als wir die Zeit des 1000 m - Läufers gestoppt haben. Wir schreiben uns jetzt die Varianz dieser Verteilung auf (wobei wir uns nicht mehr auf 20 Messungen festlegen), ersetzen aber den MW durch eine zunächst unbekannte Größe x :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x - t_i)^2}{N - 1}.$$

Wir haben jetzt keine wohldefinierte Zahl mehr vor uns, sondern, da x eine zunächst beliebige Zahl ist, eine **Funktion** von x ; deshalb schreiben wir korrekt:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N (x - t_i)^2}{N - 1}.$$

Jetzt wollen wir wissen, für welchen Wert von x die Funktion $f(x)$ ein Minimum annimmt. Wie macht man das? Schulwissen /Hausaufgabe! Man muß die Funktion $y = f(x)$ nach x differenzieren (= ableiten) und das Ergebnis = 0 setzen. (Die t_i und N sind jetzt bekannte und konstante Zahlen.) Dann erhalten wir eine Gleichung, die wir nach x auflösen können. Wir tun das und bekommen für den Wert, der die Funktion minimalisiert,

$$x_{min} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N} = \langle t \rangle.$$

Dies ist aber - oh Wunder! - nichts anderes als der Mittelwert. Wir haben also gelernt: Der Mittelwert einer Verteilung macht ihre Varianz zum Minimum.

Diese Eigenschaft zeichnet den MW vor allen anderen Werten (auf unserer Meßgeraden) aus.

Wir haben jetzt den Mittelwert und die Varianz bzw. Standardabweichung einer Verteilung kennengelernt. Wir erinnern uns aber daran, daß unsere Verteilung (nämlich die der Einzelzeiten des Läufers) aus einzelnen “diskreten” Meßpunkten bestand. Wir konnten uns bei der MW - Bildung also der einfachen Summation bedienen.

De facto ist aber die Verteilung der Zeiten kontinuierlich, denn der Läufer muß keine “Quantisierungsvorschrift” seiner Laufzeiten beachten. Im Falle einer kontinuierlichen Verteilung muß die Summation durch ein Integral ersetzt werden. Wir kommen darauf zurück.

Wir wollen zum Schluß dieses Abschnitts noch einmal auf die “beste Schätzung” (“best estimate”) des wahren Wertes und ihre Unsicherheit zurückkommen. Denn natürlich hat auch der Mittelwert selbst einen “Fehler” oder besser eine Unsicherheit. Die Theorie sagt nun (vgl. z.B. [1, 2]), daß dieser Fehler durch

$$\sigma(MW) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

gegeben ist. Dabei bedeutet $\sigma(MW)$, wie gesagt, den statistischen Fehler des Mittelwertes, während das σ auf der rechten Seite die Standardabweichung der Verteilung der Meßwerte ist.

Diese Beziehung ist wichtig und weitreichend. Sie besagt einerseits, daß man die (statistische) Unsicherheit einer Größe unter jeden vorgegebenen Wert drücken kann, wenn man nur oft genug mißt. Andererseits wird der Preis (und dies, bei teuren Experimenten, im Wortsinn) immer höher, denn um den Fehler um den Faktor 10 zu reduzieren, muß man 100 mal so oft messen. Dies führt bei jedem praktischen Experiment zu Begrenzungen.

II.4 Systematische Fehler

Außerdem ist da noch eine andere Schwierigkeit im Spiel: Wir hatten in unserem Gedankenexperiment angenommen, daß alle Stoppuhren von gleicher Qualität sind und daß keine vor- oder nachgeht. Dies ist natürlich eine Idealisierung, im wirklichen Leben wird jedes Meßgerät einen, vielleicht nur winzigen, Fehler aufweisen. Die Verfälschung eines Meßergebnisses durch fehlerhafte Geräte kann man natürlich **nicht** durch noch so viele Messungen kompensieren. Man muß also auch seinen **systematischen** Fehler zu bestimmen wissen, bevor man sich

Gedanken über den Umfang einer Meßreihe macht: Sobald der systematische Fehler in die Größenordnung des statistischen rückt, lohnt es sich nicht mehr, die Anzahl der Messungen in die Höhe zu treiben.

III Von Meßreihen zu Histogrammen und Wahrscheinlichkeitsdichten: Die Gaußverteilung

Wir wollen uns jetzt um die Darstellung und Beschreibung von Verteilungen gemessener Größen kümmern. Unser Ziel ist, zum Begriff der “Wahrscheinlichkeitsdichte” und schließlich zur Gaußverteilung, die die wichtigste kontinuierliche Verteilung ist, zu kommen. Wir werden auch noch echte “diskrete” Verteilungen kennenlernen, nämlich die wichtige Binomial- und die ebenso wichtige Poisson - Verteilung.

Wir kehren zu unserer Zeitmessung zurück. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Zahl der Zeitmessungen sehr groß wird, z.B. in die Tausende geht. Etwas unrealistisch, aber schließlich ist es ein Gedankenexperiment. Bei einer sehr großen Zahl von Messungen ist es unökonomisch, jede einzelne mit einem kleinen senkrechten Strich auf unserer Geraden zu markieren. Wir werden stattdessen den Meßbereich - etwa von 172 Sekunden bis 188 Sekunden - in Intervalle einteilen, deren Anzahl und damit Dichte von der Zahl der Messungen abhängt. Ein solches Intervall wird auch “Bin” (von englisch bin = Kasten, Behälter) genannt.

Der nächste Schritt führt uns zum “Histogramm”: Wir zählen die Meßwerte in jedem Intervall und tragen die Summe als Ordinate nach oben auf. Damit haben wir wieder einen anschaulichen Eindruck von unserer Verteilung (Abb. 1):

Dieses Histogramm stellt den Fall dar, daß der Läufer “im Mittel” der Messungen 180 s für die 1000 m braucht, und daß die Standardabweichung 2 s beträgt.

An den Rändern links und rechts gibt es nur wenige Einträge (“entries”), während wir etwa in der Mitte der Verteilung ein Maximum (“peak”) sehen. Außerdem ist die Verteilung so gut wie symmetrisch. An der Ordinate können wir ablesen, wie viele Einträge etwa jedes Bin zählt. Allerdings haben wir gegenüber unserer Geraden mit den Strichelchen einiges an Information verloren: Wir wissen nur noch, wie viele Meßpunkte z.B. zwischen den Marken “174 s” und “176 s” liegen; wie sie sich aber innerhalb des Intervalls verteilen, wissen wir nicht mehr - wir haben “darüber hinwegintegriert”.

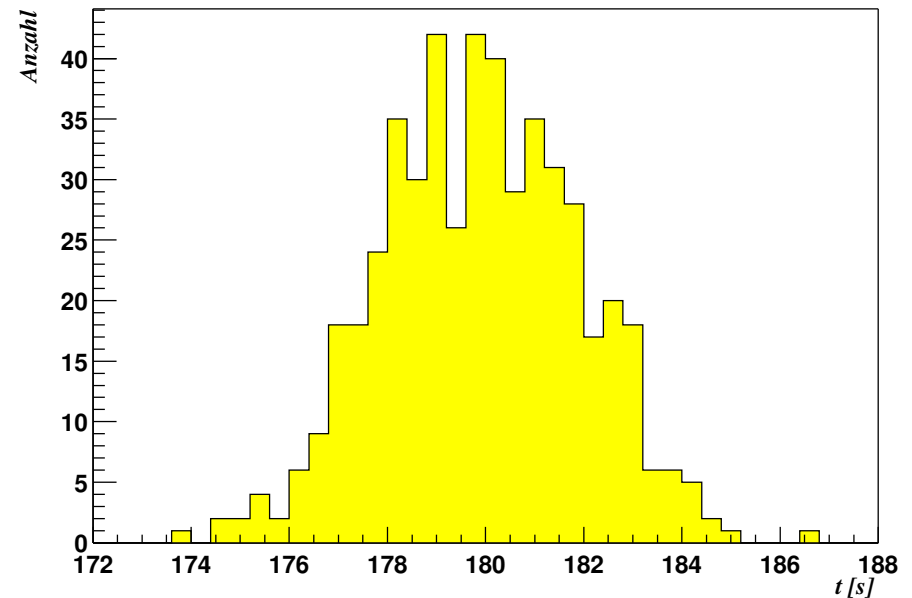


Abbildung 1: “Histogramm” der gemessenen Zeiten des Läufers mit 500 Einträgen

III.1 Vom Histogramm zur Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine solche Darstellung nennt man ein “Histogramm” (englisch: histogram). In diesem Wort stecken die griechischen Wurzeln “histos” = Gewebe und “gramma” = Buchstabe, Schrift. Wir wollen nun unser Histogramm etwas aufbohren und neu interpretieren:

Wir lassen jetzt die Zeit unseres bedauernswerten 1000 m - Läufers von mehr und mehr und mehr Leuten messen. Wenn wir die Anzahl der stoppuhrbewerten Meßdiener “gegen unendlich” gehen lassen, können wir die Intervallbreite (“bin size”) immer kleiner und kleiner wählen - wir haben ja genug “Statistik”. Damit wird das Histogramm auch immer glatter, denn der Polygonzug, den die Ecken der Intervall - Inhalte bilden, geht in allmählich in eine glatte Kurve über. Wir

sind eigentlich zufrieden. Aber da kommt ein Kollege und sagt: “Unendlich reicht mir nicht, ich möchte zwei mal unendlich.”

Um ihm diesen Gefallen zu tun, müßten wir die Zahlen auf der Ordinate auch mit zwei multiplizieren. Aber wir ahnen, daß wir keine Information gewinnen würden, unser Histogramm sähe noch genau so aus. Das bringt uns auf den Gedanken, die Verteilung zu “normieren” (“to normalize”). Was bedeutet das? Wir merken uns die Zahl **aller** Einträge des Histogramms und dividieren dann den Inhalt eines jeden Bins durch diese Zahl. Ergebnis: Wenn wir jetzt die Summe aller Bin - Inhalte (“bin contents”) bilden, erhalten wir immer Eins - das Histogramm ist “auf Eins normiert”.

Und jetzt, in diesem Grenzfall unendlich vieler Einträge, können wir das Histogramm neu interpretieren: Es stellt sicherlich ein gutes “Persönlichkeitsprofil” unseres Läufers dar, und wir deuten es jetzt als “Wahrscheinlichkeitsdichte”. Was heißt das? Die gute alte Massendichte bezeichnete “Masse pro Volumen”. Die Wahrscheinlichkeitsdichte in diesem Fall bedeutet “Wahrscheinlichkeit pro Zeit”. Anschaulich: Wir schraffieren die Fläche zwischen (z.B.) 176 s und 184 s; da wir die Gesamtfläche auf Eins normiert haben, gibt uns die schraffierte Fläche die Wahrscheinlichkeit, mit der der Läufer ein Ergebnis zwischen 176 s und 184 s erzielt. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß er nie weniger als 172 s und nie mehr als 188 s braucht. Mathematisch haben wir die Verteilung zwischen den beiden Intervallen “integriert”. Trivialerweise (da nach Konstruktion) ist das Integral über die gesamte Verteilung gleich Eins. Das bedeutet, der Läufer wird - wegen unserer einschränkenden Voraussetzung - **auf jeden Fall** (also mit der Wahrscheinlichkeit Eins) ein Ergebnis zwischen 172 s und 188 s erzielen. Noch einmal: Die Verteilung selbst gibt uns die Wahrscheinlichkeitsdichte. Eine Wahrscheinlichkeit erhält man erst durch Integration über ein vorgegebenes Intervall. Hieraus folgt auch, daß die Wahrscheinlichkeit, **genau** einen bestimmten Wert zu messen, gleich Null ist. Warum ist das so? Denken Sie über diese Merkwürdigkeit nach.

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeitsdichte verstanden. In unserem Beispiel hatten wir die Ergebnisse des Läufers auf das Intervall von 172 s bis 188 s eingeschränkt. Eine solche Einschränkung gilt natürlich im allgemeinen nicht, vielmehr sind im allgemeinsten Fall die Grenzen “minus unendlich” und “plus unendlich” zu wählen.

Wenn wir uns die Verteilungsdichte unseres Läufers genauer ansehen, dann hat sie die Form einer Glocke. Dies ist die Form der Gauß- oder Normalverteilung;

in der Tat läßt sich eine Theorie der Meßfehler (“Laplacesches Fehlermodell”) aufstellen, die just auf die Gaußverteilung führt. Wir wollen das als gegeben hinnehmen (siehe z.B. [1]) und uns die Gaußverteilung etwas näher ansehen.

III.2 Annäherung an Herrn Gauß

Die Verteilung ist offensichtlich positiv und symmetrisch. Wenn sie um den Punkt x_0 (wir wählen jetzt allgemeine Variablen für die zu messenden Größen, es könnte ja auch eine Temperatur sein) symmetrisch ist, so empfiehlt sich eine Form (das Zeichen \propto bedeutet “proportional zu”)

$$\propto \exp(-(x - x_0)^2).$$

(Mit “ $\exp(x)$ ” meinen wir natürlich die Exponentialfunktion “ e hoch x ”: $\exp(x) = e^x$. Wir wollen sie hier nicht im Detail diskutieren. Wer ihre Eigenschaften vergessen hat, grabe bitte in seinen Mathematikbüchern nach.)

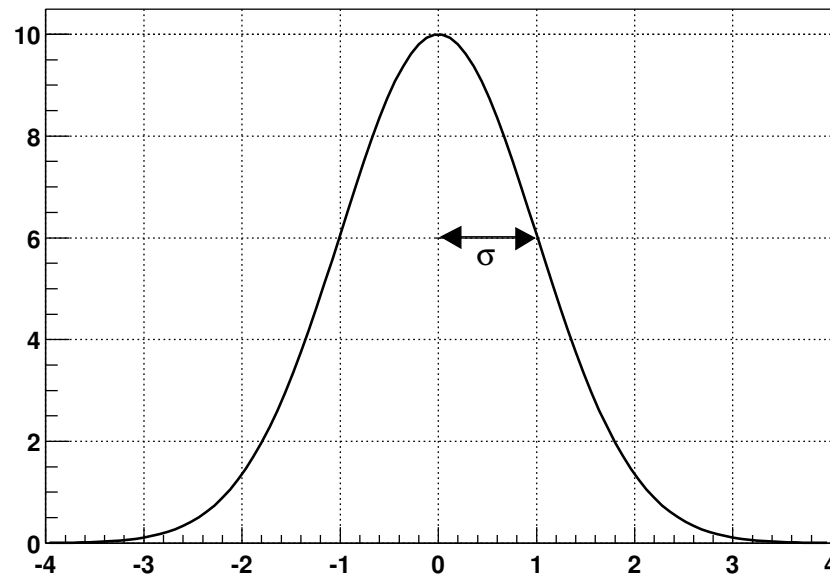
Damit haben wir die Glockenform. Um die Glocke “breit” oder “schmal” zu machen, führen wir im Exponenten den Faktor $1/(2\sigma^2)$ ein. Wird σ groß, so ist die Glocke breit, und umgekehrt. Jetzt müssen wir noch für die Normierung sorgen, denn das Integral über die gesamte Verteilung - von “minus unendlich” bis “plus unendlich” soll ja Eins sein. Dies besorgt der Faktor $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$. Alles in der Literatur nachzulesen [1, 2, 3, 4]. Insgesamt sieht also eine Gaußverteilung (wohlgermerkt, wieder eine Wahrscheinlichkeitsdichte!) so aus:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Diese etwas kompliziert aussehende Funktion malen wir uns noch einmal in aller Schönheit auf (Abb. 2):

Wir haben für dieses Bild mit Absicht eine standardisierte Gaußverteilung gewählt, nämlich eine mit dem MW Null und der Breite $\sigma = 1$. Die Verteilung in der Abbildung ist übrigens - zur besseren Darstellung - **nicht** korrekt auf Eins normiert. Aus dieser Verteilung kann man leicht jede andere herstellen, indem man den MW verschiebt und die Breite durch Multiplikation mit dem gewünschten Faktor verkürzt oder streckt.

Und jetzt wollen wir uns ihre Eigenschaften ansehen. Zunächst: Die Kurve kommt von $-\infty$ und geht nach $+\infty$. Ihr Integral ist Eins (dafür sorgt der Normierungsfaktor):


 Abbildung 2: Gaußverteilung mit dem Mittelwert Null und der Breite (σ) Eins

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1.$$

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit wissen wollen, ein Ergebnis im Intervall mit den Grenzen a und b zu erzielen, dann ist diese gegeben durch

$$G(a, b) = \int_a^b g(x) dx.$$

Die Gaußverteilung hängt von genau zwei Parametern ab, nämlich dem Mittelwert x_0 und der Breite σ . Tatsächlich gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = x_0.$$

Auf der linken Seite steht die Definition des Mittelwertes (“erstes Moment”) bei einer kontinuierlichen Verteilung; sie entspricht der Summation bei diskreten Meßwerten. Außerdem gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \sigma^2.$$

Das ist das Analogon zur Bestimmung der Varianz (“zweites Moment”) bei diskreten Meßwerten. Übrigens: Man findet die Position “ $\pm 1 \sigma$ ” an den Stellen, an denen die Gaußkurve auf den Wert “Maximum/ \sqrt{e} ” abgesunken ist. Dies sind zugleich die Positionen der Wendepunkte \rightarrow nachrechnen!

Wir halten fest: Eine Gaußverteilung wird durch ihren Mittelwert (hier x_0) und ihre Breite (“Gaussian width”) σ beschrieben. σ ist die Standardabweichung der Verteilung. (Übrigens: Sprechen Sie im Englischen “Gaussian” niemals “Gooschn” aus, das ist igitt! Der gebildete Angelsachse tut das nicht.)

Jetzt haben wir fast alles Wichtige über die Gaußverteilung beisammen. Und deshalb wollen wir noch einmal zum Anfang unserer Überlegungen, nämlich zu den “Vertrauensintervallen” zurückkommen. Wie sieht es beim Gauß aus?

III.3 Vertrauen bei Herrn Gauß

Die Mathematik sagt uns, wie groß das Integral über die Gaußverteilung “von $-\sigma$ bis $+\sigma$ ” ist, nämlich 0.683. Das bedeutet anschaulich: Wenn man eine Größe mißt, die “gaußverteilt” ist (und diese Annahme macht man meistens, wenn auch oft nur als Näherung), dann ist die Wahrscheinlichkeit 68.3 %, daß das Ergebnis in eben jenes Intervall fällt. Man nennt dies die “ 1σ - Umgebung”. Wer eine gemessene Größe mit einem Fehler veröffentlicht, der meint mit der Größe seines Fehler immer implizit dieses “Gaußsche σ ”. Das heißt, die Angabe eines Fehlers ist auch immer eine klare quantitative Botschaft: Ich behaupte, daß der “wahre Wert” der Größe, die ich messen will, mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.3 % in dem angegebenen Intervall liegt.

Natürlich gibt es auch die “ 2σ ”- und “ 3σ ”- Intervalle. Wieder sagt uns die Mathematik, daß die entsprechenden Integrale über die Gaußverteilung 0.955 und 0.997 sind. Mit anderen Worten: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95.5 % fällt

eine Messung in das 2σ -, und mit 99.7 % in das 3σ - Intervall. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Messung außerhalb dieses Intervalls landet, ist also nur 0.3 %. Wenn etwa zwei Messungen derselben Größe - bei Berücksichtigung der jeweiligen Fehler - um (mindestens) “ 3σ ” differieren, dann nennt man sie “signifikant verschieden”, und man hält eine von beiden für falsch. Hier lauert die Tücke: Wenn man zwar seine Messung ordentlich durchgeführt, seine Fehler aber versehentlich oder aus Dummheit zu klein bestimmt hat, dann schließt man sich selbst aus der Reihe der seriösen Wissenschaftler aus.

Wenn man die Gaußsche Glockenkurve zeichnet, dann kann man die “ 1σ - Umgebung” leicht ablesen, denn 1σ ist gerade der Abstand vom Mittelwert (dem Maximum) zu den Wendepunkten. Manchmal möchte man auch wissen, wie breit die Verteilung, mit der man es zu tun hat, “auf halber Höhe” ist. Diese “volle Breite auf halber Höhe” (“full width at half maximum”, FWHM) beträgt, wie man leicht nachrechnet, etwa 2.3σ .

Damit haben wir die Gaußverteilung im Wesentlichen verstanden. Wir fassen zusammen: Man unterstellt Messungen einer kontinuierlichen Größe, die - im weitesten Sinne - mit einem “Maßstab” durchgeführt werden, daß sie “gaußförmig” sind, d.h. daß die Meßwerte, wenn man sie histogrammiert (s. o.), sich durch die berühmte Glockenkurve interpolieren lassen. Das ist in Wirklichkeit so gut wie nie der Fall; aber man rechnet dennoch sehr oft “gaußförmig” weiter, z.B. wenn es um Hypothesen - Tests mit Hilfe der χ^2 - Methode (“chi - Quadrat”) geht, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Auch die Abschätzungen der “Vertauensintervalle” mit den oben genannten Zahlen gelten nur für “echte” Gaußverteilungen. Man muß deshalb im täglichen Leben die “Gaußförmigkeit” seiner Meßergebnisse kritisch überprüfen.

Dazu gibt es einen einfachen Trick: Wenn man eine Gaußfunktion logarithmiert (z.B. mit Hilfe des beliebigen Logarithmenpapiers), erhält man eine nach unten offene Parabel (eben gerade den Exponenten). Das menschliche Auge erkennt aber Abweichungen von der Parabelform und damit von der “Gaußförmigkeit” sofort! Und nun wenden wir uns neuen Ufern zu.

IV Wir sind ganz diskret: Binomial- und Poisson - Verteilung

Wir haben es im vorigen Abschnitt mit Messungen “kontinuierlicher” Größen wie Zeiten zu tun gehabt. Ähnliches gilt für Längen, Temperaturen,

Stromstärken, etc.

Es gibt aber eine ganz andere Art von Messungen, bei denen “etwas gezählt” wird. Klassische Beispiele sind die Zahl der Zerfallsakte eines radioaktiven Präparates pro Zeiteinheit oder die Zahl von Bakterien in einer Nährlösung. Hier wird gezählt: “Eins, zwei, drei..”, und die natürlichen Zahlen sind eine diskontinuierliche, “diskrete” Variable.

IV.1 Alea iacta sit!

Ein einfaches Beispiel, das uns auch die Möglichkeit gibt, den Begriff der Wahrscheinlichkeit etwas zu beleuchten, ist ein symmetrischer Würfel mit den “Augen” 1 bis 6. Wegen der Symmetrie sind alle Augenzahlen gleichberechtigt. Da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten Eins sein muß, ist die Wahrscheinlichkeit, eine der Zahlen 1 bis 6 zu würfeln, gerade $1/6$.

Das wundert uns auch nicht. Wir wollen aber dieses einfache Beispiel benutzen, um zwischen “und” und “oder” bei Wahrscheinlichkeiten zu unterscheiden: Die Wahrscheinlichkeit (“probability”), z.B. eine 2 **oder** eine 5 zu würfeln, ist $1/6 + 1/6 = 1/3$. Wenn ich aber mit zwei Würfeln spiele, dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine 2 **und** eine 5 zu würfeln, gleich $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Es gibt nämlich $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten von Zahlenpaaren. Diese Multiplikationsregel gilt aber nur dann, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind. Dies können wir aber bei den Würfeln voraussetzen, solange sie nicht miteinander verklebt sind.

Es lohnt sich übrigens, einmal den MW dieser “flachen” (alle Zahlen sind gleich wahrscheinlich) Verteilung auszurechnen: Es ist $1/6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6$; der Mittelwert der “Augenzahlen” eines Würfels ist also eine gebrochene Zahl, die selbst nicht das Ergebnis eines Wurfes sein kann.

Wir wollen uns in diesem Abschnitt der äußerst wichtigen Poisson - Verteilung nähern. Ihre Kenntnis ist von herausragender Bedeutung. Und da trotzdem kaum jemand über sie bescheidweiß, bedeutet es so etwas wie “Herrschaftswissen”, wenn man sich mit ihr auskennt.

IV.2 Tossing a Coin: Head or Tail?

Die Poissonverteilung läßt sich aus der “Binomialverteilung” herleiten - wie übrigens auch die Gaußverteilung. Die Binomialverteilung ist also sozusagen die

“Mutter aller Verteilungen”. Mit ihr kann man die Ergebnisse eines “Bernoulli - Experimentes” beschreiben, das ist eines mit genau zwei möglichen Ergebnissen. Ein einfaches Bernoulli - Experiment ist der Wurf einer Münze. Mit Hilfe der Binomialverteilung (BiV) kann ich dann z.B. die Frage beantworten: “Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einmal “Zahl” und 9 mal “Adler” zu bekommen, wenn ich eine (symmetrische) Münze 10 mal werfe?” Man kann sich das Ergebnis eigentlich “zu Fuß” ausrechnen, wenn man alle Möglichkeiten abzählt. Wir wollen das hier tun, bevor wir uns die BiV im Detail ansehen. Also:

Wir wollen das Erscheinen von “Zahl” nach dem Wurf den “Erfolg” nennen. Dann bedeutet “Adler” Mißerfolg. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg nennen wir p , die für Mißerfolg q . Da ich nur entweder Erfolg oder Mißerfolg haben kann, gilt $p+q=1$. Andererseits ist die Münze symmetrisch, daher $p=q=1/2$. Die Anzahl der “Erfolge” sei r , also hier $r=1$. Die Anzahl der Würfe ist $n=10$.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 voneinander unabhängigen Würfeln einmal “Erfolg” zu haben, $p^r=0.5^1$. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, 9 mal “Mißerfolg” zu haben, gleich $q^9=(1-p)^9=0.5^9$. Damit sind wir schon fast fertig, wir müssen aber noch bedenken, daß wir das Ergebnis auf 10 verschiedene Art und Weisen erreichen können, nämlich (A für Adler, Z für Zahl): ZAAAAAAAAA, AZAAAAAAAA, AAZAAAAAAAA, etc. Damit haben wir unser Ergebnis beisammen: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$B(1;10,0.5) = 10 \cdot 0.5 \cdot 0.5^9 = 10/1024,$$

also etwa 1 %.

Für den allgemeinen Fall (p und q verschieden, aber natürlich immer $p+q=1$; wir können hier an eine manipulierte Münze denken, die auf einer Seite schwerer ist) lautet die Formel

$$B(r; n, p) = \frac{n!}{r! (n-r)!} p^r q^{n-r}.$$

Das sieht ein bißchen angsteinflößend aus, aber nach unserer vorherigen Abzählübung verstehen wir es: $B(r; n, p)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei n Würfeln r Erfolge zu erzielen, wenn die Wahrscheinlich für den Erfolg gleich p (und damit die Wahrscheinlichkeit für den Mißerfolg gleich $q=1-p$) ist. Unnötig zu sagen, daß p nur eine Zahl zwischen Null und Eins sein kann.

Der Bruch auf der rechten Seite ist ein sogenannter “Binomialkoeffizient”; er gibt

an, auf wie viele verschiedene Weisen man r Erfolge bei n Würfeln realisieren kann. (Raten Sie, was der Ausdruck $49! / (6! (49-6)!)$ bedeutet - Woche für Woche!) In unserem Beispiel war er gleich $10! / (1! (10-1)!) = 10$. Ach ja: Der Ausdruck $10!$ (sprich “zehn - Fakultät”) bedeutet $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$. Merke fürs Leben: $1! = 0! = 1$. Außerdem: (Jede Zahl)⁰ = 1, auch $0^0 = 1$.

Unser Beispiel hat uns also gelehrt, daß ich bei 100 Serien von jeweils 10 Würfeln im Mittel einmal das Ergebnis “einmal Zahl und neunmal Adler” erzielen werde. Alles verstanden? Gut. Rechnen Sie als Hausaufgabe das Ergebnis für $r=4$ aus!

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß der MW der BiV gleich $n \cdot p$ ist, und ihre Varianz gleich $n \cdot p \cdot q$.

IV.3 Von “Herrn Binom” zu Herrn Poisson

Wenn man in der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit für den “Erfolg” immer kleiner, die Anzahl der “Würfe” immer größer werden läßt, dabei aber das Produkt $n \cdot p$ (also den Mittelwert) konstant hält, dann erhält man die Poisson - Verteilung. Die Poissonverteilung greift immer dann, wenn man Ereignisse in einem bestimmten “Intervall x ” zählt, typischerweise von Raum oder Zeit, die voneinander und von x unabhängig sind (d.h.einander nicht kausal beeinflussen, und deren Häufigkeit auch nicht von der Wahl des Intervalls abhängen soll). Ein Paradebeispiel ist der Zerfall eines (langlebigen) Radio - Isotops: Wir wollen annehmen, daß die mittlere Lebensdauer sehr groß gegen die Beobachtungszeit sei (so daß die mittlere Zerfallsrate sich nicht ändert).

Dann könnte unser Experiment folgendermaßen aussehen: Wir bewaffnen uns mit einem Zählrohr und messen sehr oft, wie viele Zerfälle in jeweils einer Minute stattfinden. Wir wissen natürlich, daß die mittlere Zerfallsrate pro Minute durch Halbwertszeit und Menge des radioaktiven Materials (und durch andere Parameter) gegeben ist. Wir interessieren uns aber vor allem um die Fluktuationen.

Nun ist aber der radioaktive Zerfall ein durch und durch statistisches (“stochastisches”) Phänomen. In unserer Probe befindet sich eine immense Zahl von Kernen unseres Radionuklids; aber keiner dieser Kerne “weiß” etwas von den anderen - es gibt keine kausale Beeinflussung der Kerne untereinander. Jeder Kern “entscheidet” sich allein, wann er “zerfallen will”, und gehorcht dabei nur übergeordneten physikalischen Gesetzen, die z.B. die Halbwertszeit für just dieses Nuklid festlegen.

Es kann also sein (vorausgesetzt, daß ich den Umfang meiner Probe entsprechend gewählt habe), daß ich in einer Minute einmal neun, einmal zwei oder sieben Zerfälle, oder auch einmal gar keinen Zerfall registriere. Nur wenn ich nach jeweils (z.B.) 100 Meßreihen den Mittelwert der Zahlen meiner Zerfälle bilde, dann bekomme ich - mit kleinen Fluktuationen - immer die gleiche Zahl.

Wir stellen nun das Ergebnis unserer Meßreihen graphisch dar, und zwar in der bewährten Form des Histogramms. Wir teilen unsere Abszisse in Bins ein, die wir mit 0, 1, 2, usw. bezeichnen, im Prinzip bis "unendlich". Wenn wir keinen Zerfall registriert haben, dann machen wir ein Kreuzchen in das "nullte" Bin, bei einem Zerfall in das erste, und so weiter. Wenn wir das lange genug gemacht haben, dann bekommen wir eine veritable Poisson - Verteilung. Die Form dieser Verteilung hängt nur (das ist wichtig!) von **einem** Parameter ab, nämlich ihrem Mittelwert, den wir μ nennen wollen. Tapfer, wie wir sind, stellen wir uns gleich der mathematischen Formel für die Poisson - Verteilung:

$$P(n; \mu) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$$

In dieser Formel bedeutet μ (der griechische Buchstabe "my"), wie schon gesagt, den MW der Verteilung. n ist schlicht ein Laufindex, der von Null bis unendlich geht: $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Und die Formel wird folgendermaßen interpretiert (wir bleiben bei unserem Beispiel): Wenn der Mittelwert der Zerfälle meines Nuklids in einem gegebenen Zeitintervall (z.B. einer Minute) gleich μ ist, dann wird die Wahrscheinlichkeit, genau n Zerfälle in diesem Intervall zu messen, durch $P(n; \mu)$ gegeben. Alles klar? Übrigens: Die Poisson - Verteilung ist zwar eine diskrete Verteilung - n ist eine ganze Zahl -, der Mittelwert μ jedoch kann eine beliebige reelle Zahl zwischen Null und Unendlich sein!

In den folgenden Abbildungen 3 und 4 sind zwei Poisson - Verteilungen dargestellt, und zwar einmal für einen kleinen MW (1.2), und einmal für einen großen (15). Wir sehen, daß die Verteilung für kleine MWe stark asymmetrisch ist und offenbar für größer werdende MWe immer symmetrischer wird: In der Tat geht die Poisson - Verteilung für große MWe in eine Gaußverteilung über.

In der Abbildung 4 sehen wir, daß die Poisson - Verteilung für einen MW von 15 schon deutlich weniger asymmetrisch ist und eine gewisse "Gauß - Ähnlichkeit" zeigt. Aber wir müssen offensichtlich noch deutlich größere MWe wählen, bis wir den Unterschied nicht mehr erkennen können.

Hier machen wir eine Pause: Glauben wir das? Wir haben gelernt, daß die Gauß-

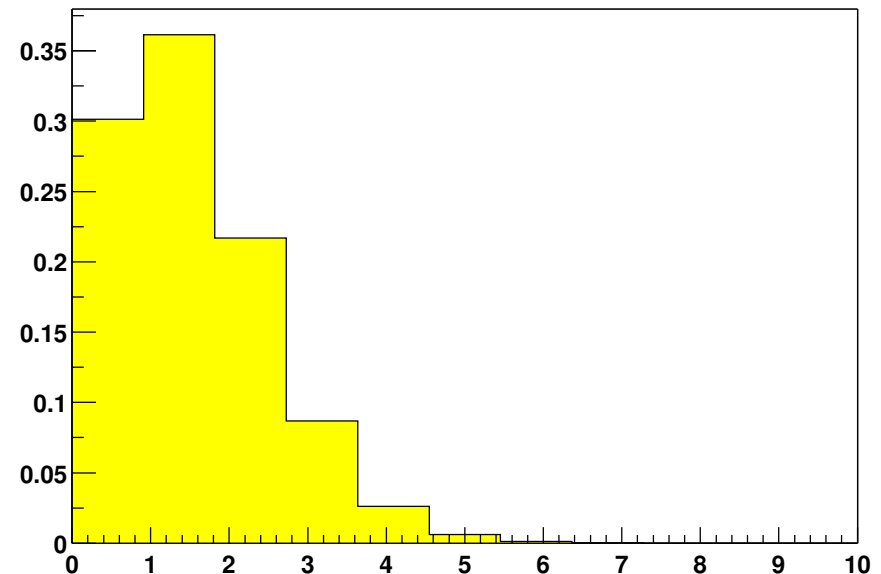


Abbildung 3: Poisson - Verteilung mit $\mu = 1.2$

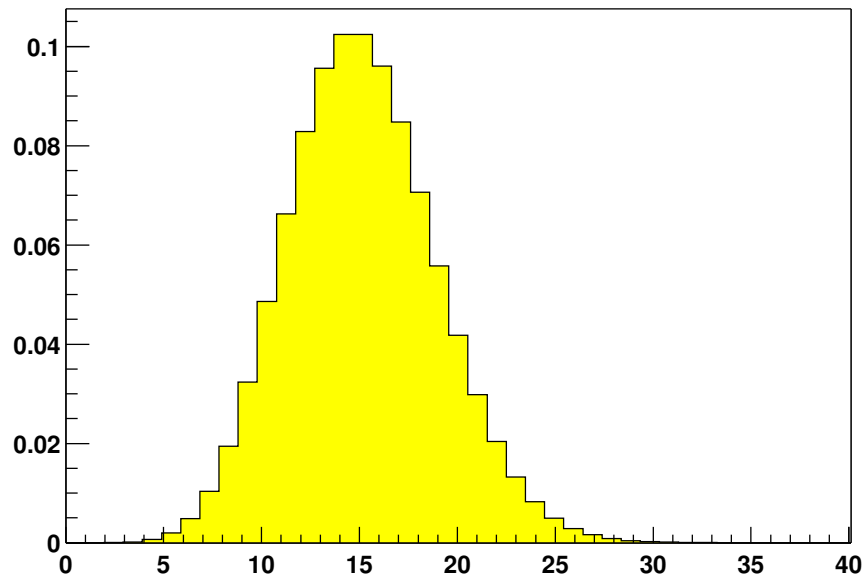
verteilung eine kontinuierliche Verteilung ist und daß sie durch **zwei** Parameter definiert wird, nämlich durch MW und Varianz σ^2 . Die Poisson - Verteilung wird aber durch nur einen Parameter definiert, durch den Mittelwert. Außerdem geht die Gaußverteilung von $-\infty$ bis $+\infty$, die Poisson - Verteilung jedoch fängt erst bei Null an.

Bevor wir weiter argumentieren, lüften wir noch ein Geheimnis der Poisson - Verteilung. Ihre Varianz ist gleich ihrem Mittelwert, nämlich

$$\sigma_{\text{Poisson}}^2 = \mu_{\text{Poisson}}$$

Auf dieser Eigenschaft beruht das "Wurzel - N - Gesetz" bei der Fehlerbestimmung von gezählten Größen. Aber darauf kommen wir noch.

Nach dem, was wir bis jetzt zusammengestellt haben, kann die Poissonvertei-

Abbildung 4: Poisson - Verteilung mit $\mu = 15$

lung niemals in eine "echte" Gaußverteilung übergehen. Tut sie auch nicht. Aber tatsächlich läßt sich die Form der Poisson - Verteilung für große MWe mathematisch durch die Gaußverteilung approximieren. Man muß dann aber in der Formel für den Gauß das " σ^2 " durch " μ " ersetzen - auch dieser "Pseudo - Gauß" hängt nur von einem Parameter ab! Einen Vorteil bietet die Vergaßung der Poisson - Verteilung allerdings: Für große MWe wird die Fakultät ($n!$ im Nenner) sehr unhandlich - dies wird durch die Gauß - Form vermieden.

Jetzt haben wir also auch die Poisson - Verteilung verstanden. Sie wird immer dann wichtig, wenn irgendetwas in irgendeinem Intervall gezählt wird, dessen Vorkommen völlig statistisch erfolgt. Dies können, wie in unserem Beispiel, Zerfälle eines Radionuklids pro Zeiteinheit sein, aber auch Sterne pro Raumwinkel - Segment am Nachthimmel. Regentropfen pro Quadrat - Dezimeter im Garten tun es auch, oder - beliebt bei Physikern - Bläschen entlang einer Teil-

chenspur in einer Blaskammer. Mediziner dagegen haben eine Vorliebe für Leukozyten im Blut oder das Auftreten seltener Krankheiten.

IV.4 Das "Wurzel - N - Gesetz"

Schließlich noch die versprochene Bemerkung zum "Wurzel - N - Gesetz". Wenn jemand mit einem Geigerzähler eine Zählrate mißt, und er hat während der Meßzeit - sagen wir - 4711 "Counts" gezählt, dann wird er sagen, der Fehler (oder die statistische Unsicherheit) auf diese Zahl sei $\sqrt{4711}$. Warum?

Wie gesagt, unser Experimentator soll nur einmal gemessen haben. Was er eigentlich hätte tun müssen, aber aus verständlichen Gründen nicht tun kann, wäre "unendlich oft" zu messen. Dann könnte er nach jeder Messung sein Ergebnis in ein Histogramm (s. oben) eintragen und hätte am jüngsten Tag eine perfekte Poisson - Verteilung (vorausgesetzt, sein Präparat lebt noch länger). Diese Poisson - Verteilung wird dann einen Mittelwert haben, der gleich ihrer Varianz ist. Und hier erinnern wir uns daran, daß die Standardabweichung die Wurzel aus der Varianz ist.

Unser Experimentator hat nun einen doppelten intellektuellen Schlenker gemacht: Da er nur einmal messen kann, interpretiert er sein Ergebnis als Schätzung für den Mittelwert; und wenn er den erst hat, zieht er die Wurzel daraus und verkauft sie als Standardabweichung - die klassische "Unsicherheit auf die Einzelmessung". Dies sollte man im Hinterkopf haben, wenn man das "Wurzel - N - Gesetz" anwendet.

(Natürlich kann man auch hier subtiler vorgehen: Man kann nach dem Intervall fragen, in dem der wahre MW mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt, wenn ich eben bei nur einer Messung meine z.B. 4711 Zerfälle zähle. Aber das geht über den Rahmen dieser Betrachtung hinaus.)

Im Übrigen: \sqrt{N} ist der **absolute** Fehler auf die gemessene Zahl N . Der **relative** Fehler ist dann

$$\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Wenn ich diesen relativen Fehler mit 100 multipliziere, bekomme ich den "prozentualen" Fehler. Wir sehen, daß der relative Fehler mit "höherer Statistik" schrumpft. Man kann ihn also im Prinzip unter jede vorgegebene Grenze drücken - aber auch hier gilt wieder das, was schon im zweiten Abschnitt gesagt wurde.

IV.5 Normierung der Poisson - Verteilung

Zum Schluß noch etwas für den echten Fan: Wir wissen, daß jede Verteilung einer Wahrscheinlichkeitsdichte “auf Eins normiert” sein muß, denn irgendein Ergebnis kommt “mit Sicherheit”, also der Wahrscheinlichkeit Eins, heraus. Wie steht es mit der Poisson - Verteilung?

Um die Normierung zu überprüfen, muß die Summe über alle Einzelwahrscheinlichkeiten Eins werden, also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = 1.$$

Stimmt das? Wir schreiben dieselbe Formel etwas anders, indem wir die Exponentialfunktion vor die Summe ziehen:

$$e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = 1.$$

Aber nun sieht unser scharfes Auge sofort, was unter dem Summenzeichen steht: Es ist die Taylor - Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, die (mit x statt mit μ) ausgeschrieben so aussieht:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x.$$

Damit wird unsere Summe schlicht zu

$$e^{-\mu} e^{\mu} = e^{(\mu-\mu)} = e^0 = 1,$$

was zu beweisen war.

IV.6 Die “Duplizität der Ereignisse”

Man beobachtet im täglichen Leben des öfteren, daß zwei außergewöhnliche Ereignisse rasch nacheinander stattfinden. Die öffentliche Aufmerksamkeit nimmt dies besonders bei Katastrophen wie z.B. Flugzeugabstürzen wahr. Können wir das mit dem, was wir bisher gelernt haben, verstehen? Wir versuchen eine Annäherung:

Wir bleiben zunächst bei unseren radioaktiven Nukliden; wir schreiben aber den Mittelwert μ (für die Anzahl der Zerfälle pro Zeitintervall) etwas um. Wir führen die “mittlere Häufigkeit pro Zeiteinheit” ein und nennen sie λ (“lambda”). Dann können wir uns den MW für jedes beliebige Zeitintervall t konstruieren, er ist schlicht $\mu = \lambda t$. Unser Poisson sieht jetzt so aus:

$$P(n; \mu = \lambda t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

Und jetzt fragen wir uns: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall t **kein** Zerfall stattfindet? Offenbar:

$$P(0; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

(Wir erinnern uns: $0! = 1$.) Und diese einfache Formel (die nichts anderes ist als das Gesetz des radioaktiven Zerfalls) sagt uns, daß **kurze** Intervalle zwischen zwei Zerfällen wahrscheinlicher sind als lange, denn $e^{-\lambda t}$ wird um so kleiner, je größer t ist. Es ist also wahrscheinlicher, daß zwei Zerfälle dicht aufeinander folgen, als daß sie durch lange Intervalle getrennt sind.

Was hat das nun mit Katastrophen zu tun? Natürlich nur bedingt etwas. Wesentlich ist, daß bei dieser Betrachtung die einzelnen “Ereignisse” einander eben **nicht** kausal beeinflussen, wie das bei radioaktiven Zerfällen der Fall ist. Wenn wir also annehmen, daß Katastrophen wie Flugzeugabstürze “statistisch verteilt” vorkommen (und nicht, weil in einem bestimmten Flugzeugtyp etwa zwei Kabel vertauscht wurden), dann würde man tatsächlich häufiger kurze Abstände zwischen zwei solchen bedauerlichen Vorkommnissen erwarten als lange. Der Volksmund nennt das die “Duplizität der Ereignisse”. Und damit endgültig genug von Herrn Poisson.

V Ein Wort zur Fehlerfortpflanzung

Die Größen, für die man sich interessiert, sind oft nicht die gemessenen selbst, sondern daraus abgeleitete. Beispiel: Das Volumen einer Kiste ist das Produkt der Kantenlängen. Wie hängt die Unsicherheit (der “Fehler”) des Volumens von den Meßfehlern der Kantenlängen ab?

Diese und andere Fragen beantworten die Rechenregeln der Fehlerfortpflanzung (“error propagation”). Diese basieren aber auf einfachen Regeln der Differenti-

alrechnung und sollen hier nicht diskutiert werden. Außerdem findet man sie in jedem Lehrbuch und auch in der Anleitung zum Physikalischen Praktikum.

Es soll nur kurz der “asymmetrische Fehler” erwähnt werden; das ist ein Fehler, dessen Balken verschieden lang sind. Wie kann es dazu kommen?

Wenn eine Größe “linear” von einer anderen abhängt, wenn also beide nur durch einen konstanten Faktor verbunden sind wie z.B. beim Ohmschen Gesetz ($U = R \cdot I$) Strom und Spannung, dann skaliert natürlich auch der Fehler mit dieser Konstanten. Graphisch kann man das durch “Spiegelung an einer Geraden” darstellen. Sobald aber der Zusammenhang nicht mehr linear ist, wie z.B. bei der kinetischen Energie, die quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt, dann spiegelt man nicht mehr an einer Geraden, sondern an einer Parabel. Und dann haben die Spiegelbilder des - symmetrischen - Fehlers z.B. der Geschwindigkeit nicht mehr gleiche Abstände vom Spiegelbild des Zentralwertes - der Fehler wird “asymmetrisch”. Übrigens, in logarithmischer Darstellung erscheint natürlich auch ein symmetrischer Fehler asymmetrisch.

VI Schlußbemerkung

So, ganz langsam geht uns die Puste aus, es ist Zeit, Schluß zu machen. Was haben wir gelernt? Wir haben uns mit zwei wichtigen Methoden der Messung und ihren Unsicherheiten beschäftigt: Mit der Messung einer kontinuierlichen Größe mit Hilfe eines (wie auch immer gearteten) “Maßstabes”, und einer Messung, die auf der Zählung von diskreten “Ereignissen” wie z.B. Zerfallsprozessen beruht. Und wir haben das dazugehörige Handwerkszeug kennengelernt, nämlich die Gauß- und die Poisson - Verteilung.

Damit haben wir in der Tat ein ansehnliches Wissen erworben, denn auf Gauß und Poisson basieren viele Gebäude der Statistik, insbesondere beim “Test von Hypothesen” und der Parameterschätzung. Hier sollte kurz das Wort “Anpassung” (“Fit”) fallen. Einfaches Beispiel: Jemand hat an einem langen Draht eine Spannung angelegt und mißt nun den Strom als Funktion der Spannung. Offenbar liegen die Meßpunkte “mehr oder weniger” auf einer Geraden. Welches ist die “beste” Gerade, die ich durch die Meßpunkte legen kann, und was sind meine Kriterien? Wenn ich ein “Fit - Verfahren” für diese Prozedur kenne, kann ich das Result (offenbar den reziproken Ohmschen Widerstand des Drahtes) und auch noch dessen Unsicherheit angeben.

Wir sehen, es ist ein weites und spannendes Feld. Jede Messung hat es mehr

oder weniger mit dem Zufall zu tun. Aber der Zufall hat einmal (natürlich rein zufällig) Herrn Gauß und Monsieur Poisson getroffen - Herrn Binom sei Dank.

Last but not least: Der Verfasser dankt seinem Nachbarn und Mitstreiter T. Berndt für tätige Hilfe bei der Erzeugung der Diagramme mit Hilfe des geheimisvollen Programmpaketes “Root”.

Literatur

- [1] Siegmund Brandt, “Datenanalyse”, 4. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin, 1999.
- [2] Glen Cowan, “Statistical Data Analysis”, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [3] The Particle Data Group, K. Hagiwara et al., Phys. Rev. **D66** (2002) 010001; <http://pdg.lbl.gov/>.
- [4] Gary J. Feldman and Robert D. Cousins, “Unified approach to the classical statistical analysis of small signals”, Phys. Rev. **D57** (1998) 3873.

Fehlerrechnung mit Köpfchen

F. Eisele - Physikalisches Institut, Universität Heidelberg

Die Fehlerrechnung erfreut sich bei Studenten i.A. keiner großen Beliebtheit. Im besten Falle wird sie als notwendiges Übel angesehen. Ein wichtiger Grund dafür ist allerdings auch der, dass viel zu viel unnötiger Rechenaufwand getrieben wird und der Nutzen vernünftiger Fehlerabschätzungen nicht erkannt wird. Die folgenden Tipps sollen dazu beitragen, dass die Fehlerrechnung einfacher und besser gelingt.

VII Relative Fehler nutzen

In der Praxis ist die Nutzung von relativen Fehlern von unschätzbarem Wert und sollte wann immer möglich genutzt werden.

VII.1 Relative Fehler als Erleichterung der Fehlerfortpflanzung

Es ist sehr einfach zu zeigen, dass für eine Funktion der Form

$$f(x, y, z) = x^a \cdot y^b \cdot z^c \quad (1)$$

gilt:

$$\left(\frac{df}{f}\right)^2 = \left(a\frac{dx}{x}\right)^2 + \left(b\frac{dy}{y}\right)^2 + \left(c\frac{dz}{z}\right)^2. \quad (2)$$

Dabei sind a, b, c beliebige Potenzen ($3/2, -4, \dots$). Zu merken ist:

- Prozentuale Fehler werden quadratisch addiert.
- Wenn ein prozentualer Fehlerbeitrag kleiner als 20% des größten Fehlers ist, dann kann er mit Sicherheit vernachlässigt werden, da er den Gesamtfehler nur noch zu 2% beeinflusst.

$$\sqrt{1^2 + 0,2^2} = \sqrt{1,04} = 1,02. \quad (3)$$

- Geht eine Messgröße mit hoher Potenz in f ein, dann hat sie auch ein hohes Gewicht beim Fehlerbeitrag.

Beispiel aus dem Praktikum: Berechnet wird der Wert und Fehler des Adiabatenkoeffizienten κ :

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \quad (4)$$

Die Messgrößen sind die Schwingungsdauer T , die Masse m , der Radius r , das Volumen V und der Druck p . Für den relativen Fehler ergibt sich dann aus (2):

$$\left(\frac{d\kappa}{\kappa}\right)^2 = \left(\frac{dm}{m}\right)^2 + \left(\frac{dV}{V}\right)^2 + \left(4\frac{dr}{r}\right)^2 + \left(2\frac{dT}{T}\right)^2 + \left(\frac{dp}{p}\right)^2. \quad (5)$$

Die Schwingungsdauer T wird aus einer langen Messreihe bestimmt mit einem prozentualen Fehler von etwa $dT/T = 0,005$. Der Fehlerbeitrag ist also 1% ($2dT/T$). Die Werte von m, V und r sind vorgegeben zu $m = (34,35 \pm 0,002)$ g, $V = (1342,4 \pm 0,6)$ cm³ und $r = (10,253 \pm 0,013)$ mm. Der Druck p wird mit einer Genauigkeit von 1 Promille gemessen. Ohne weitere Rechnung ist sofort ersichtlich, dass p, m und V prozentuale Fehler von 1 Promille beitragen, also gegen den Fehlerbeitrag von T vernachlässigbar sind. Der relative Fehler von r ist zwar auch nur 1,3 Promille, er geht aber in den Fehler von κ mit dem Gewicht 4 ein, da κ von r^{-4} abhängt. Dieser Fehlerbeitrag ist daher 0,5% und nicht vernachlässigbar. Damit folgt:

$$\frac{d\kappa}{\kappa} = \sqrt{\left(2\frac{dT}{T}\right)^2 + \left(4\frac{dr}{r}\right)^2} = \sqrt{0,01^2 + 0,005^2} = 0,012. \quad (6)$$

Hier wurde die letzte Stelle aufgerundet.

VII.2 Prozentuale Fehlerabschätzung zur Messplanung und Verbesserung des Experiments

Das Beispiel aus dem Praktikum zeigt, wo die Schwachstellen des Experiments sind, wenn das Ziel eine präzise Messung von κ sein soll: Der Messaufwand muss in die bessere Bestimmung von T und r gesteckt werden. Es lohnt sich nicht, kleine Fehlerbeiträge noch kleiner zu machen! Also könnte man daran denken längere Messreihen für T zu machen, da der Fehler von T für N Messungen mit $1/\sqrt{N}$ kleiner wird (Fehler des Mittelwerts). Der Gewinn geht allerdings nur mit der Wurzel. Es macht im Allgemeinen wenig Sinn 100 Messungen zu machen, dann wäre es schon besser die Messmethode von T zu verbessern, also den Fehler der Einzelmessung zu verringern. Die Abschätzung prozentualer

Fehler vor der Versuchsdurchführung hilft also ein Experiment optimal zu planen. Hierzu macht man unter Umständen vorher kleine Testmessungen um die Fehlerbeiträge besser abschätzen zu können.

VIII Für die Fehlerfortpflanzung bei komplizierten Formeln nicht Ableitungenberechnen.

Nehmen wir an, es soll eine Messgröße $f(x)$

$$f(x) = 4x^2 \sin(12x^2) \exp(-2x) \quad (7)$$

und der dazugehörige Messfehler aus der Messung von x bestimmt werden. Offensichtlich ist die Standardfehlerfortpflanzung hier sehr mühsam. Sie sollten sich allerdings daran erinnern, was die Gleichung

$$df(x) = \frac{df}{dx} \quad (8)$$

bedeutet: Sie ist nur eine lineare Näherung um die Werte von $f(x + dx)$ und $f(x - dx)$ abzuschätzen und diese Näherung ist dazu häufig auch noch schlecht. Sie gilt nur für sehr kleine Werte von dx . Es ist viel sinnvoller in so einem Fall die Werte von $f(x + dx)$ und $f(x - dx)$ direkt auszurechnen. Dann ist $dx_- = f(x - dx) - f(x)$ und $dx_+ = f(x + dx) - f(x)$. Das Ergebnis wäre

$$f(x)_{-dx_-}^{+dx_+}. \quad (9)$$

Nur wenn beide Fehler etwa gleich sind sollte man $\pm dx$ schreiben und dafür den Mittelwert der beiden Fehlerabschätzungen nehmen. Das ist im Allgemeinen nur bei kleinen Fehlern so und kann sogar häufig zu groben Fehlern führen. Nehmen sie z.B. an, dass der Messwert zufällig nahe bei einem Extremwert der Funktion (7) liegt. Dann liefert die Fehlerfortpflanzung den Fehler Null, weil die Ableitung Null ist. Bei großen Fehlern ist das offensichtlich Unsinn.

- Sie dürfen den Fehler immer durch Berechnung der Funktionswerte $f(x + dx)$ und $f(x - dx)$ berechnen. Das ist oft einfacher als die Fehlerfortpflanzung und auf jeden Fall zuverlässiger, insbesondere wenn sie einen programmierbaren Rechner zur Hand haben.

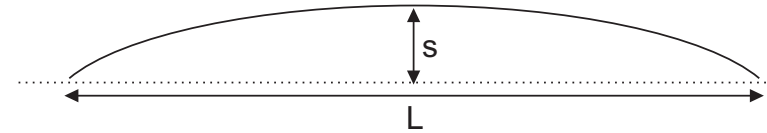


Abbildung 5: Bestimmung des Impuls eines geladenen Teilchens aus der Sagitta des Kreisbogens.

- Die Nutzung dieses Tricks erlaubt auch eine erhebliche Ausweitung der Anwendung prozentualer Fehler.

Zum Abschluss noch ein in der Physik wohlbekanntes Beispiel, bei dem die Standard-Fehlerrechnung versagt: In einem magnetischen Spektrometer wird der Impuls eines geladenen Teilchens aus der Sagitta s des Kreisbogens bestimmt (Abbildung 5).

Dabei ist L die Länge des Kreisbogens. Der Fehler der Sagitta ds ist durch die Genauigkeit des Spurdetektors bestimmt und sei z.B. 1 mm. Wenn der Impuls sehr groß wird, dann kann ds größer oder vergleichbar mit s sein, d.h. $s - ds$ kann negativ werden, was praktisch heißt, dass sich das Vorzeichen der elektrischen Ladung umkehrt, und offensichtlich kann ein Impulswert ∞ nicht ausgeschlossen werden. Dagegen liefert $s + ds$ einen kleineren Impuls. Die Funktion $p \propto 1/s$ verhält sich bei der Fehlerfortpflanzung für große prozentuale Fehler offensichtlich extrem asymmetrisch und liefert für große Werte von ds/s kompletten Unsinn. Hier hilft nur das Verfahren der direkten Funktionsberechnung und die Angabe asymmetrischer Fehler. Diese werden sie in vielen Publikationen finden.

IX Schlussbemerkung

Alles was bisher gesagt wurde, gilt dann, wenn die statistischen Messfehler dominieren. Dies ist bei Präzisionsexperimenten selten der Fall. Der Kampf mit systematischen Fehlern ist daher das eigentliche Problem der Experimentalphysiker. Dafür gibt es aber leider keine Patentrezepte.

Versuch 11 Einführung

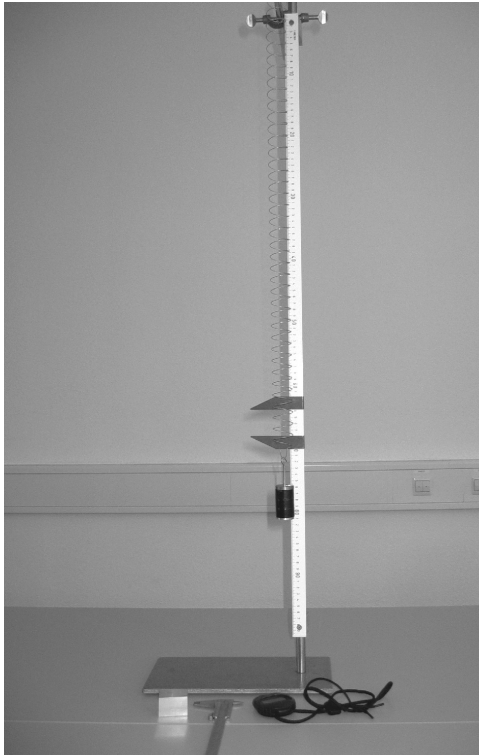


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Vorbemerkung

Ziel des Einführungsveruches ist es Sie mit grundlegenden Techniken des Experimentierens und der Auswertung der Messdaten vertraut zu machen. Diese Grundkenntnisse sind für eine erfolgreiche Durchführung des Praktikums notwendig.

Bei diesem Versuch werden Sie Messungen am Federpendel durchführen. Zunächst wird die Federkonstante gemessen. Das Ergebnis dieser Messung wird

verwendet um in einer zweiten Messung die Erdbeschleunigung zu bestimmen. Sie werden in diesem Versuchsteil den statistischen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Federpendels kennen lernen. Es soll auch gezeigt werden, dass zwei scheinbar identische Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer unterschiedliche Messgenauigkeiten besitzen. Um aus den Messdaten die Federkonstante und die Erdbeschleunigung zu extrahieren ist es notwendig die Ergebnisse graphisch darzustellen. Aus den Diagrammen die erstellt werden, kann man die zu bestimmenden Größen einschließlich des Messfehlers ablesen.

II Messmethode

Die Differentialgleichung für ein Federpendel lautet:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (1)$$

Wenn man das Federpendel zur Zeit $t = 0$ um x_0 auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (3)$$

Die Periodendauer T ist mit ω wie folgt verknüpft:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Somit ergibt sich für die Periodendauer zu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5)$$

Misst man die Periodendauer T als Funktion der Masse m so kann man hieraus die Federkonstante D bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse m belastet, so gilt:

$$mg = Dx \quad (6)$$

Da der Wert der Federkonstante D aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

III Durchführung

Aufgabe 1: Fehlerbestimmung zweier Messmethoden

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse von 200g. Messen Sie dann je 10 mal 3 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen. Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalauschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 10 mal 3 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes¹. Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden Methoden.

Aufgabe 2: Messen der Schwingungsdauer als Funktion der Masse

Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit Massen zwischen 50 g und 250 g in Schritten von 50 g. Für jede Masse werden dreimal drei Pendelschwingungen ausgemessen. Diese Messreihe wird dazu benutzt die Federkonstante des Pendels zu bestimmen.

Aufgabe 3: Bestimmung der Auslenkung als Funktion der Masse

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit den Massen 0g, 50g, 100g, 150g, 200g und 250g beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Notieren Sie die Ablesegenauigkeit für die Auslenkung!

IV Auswertung

Tragen Sie zunächst die Ergebnisse der Vergleichsmessungen der Schwingungsdauer in ein Histogramm ein. Wählen Sie für beide Histogramme den gleichen Abszissenbereich! Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Histogramm für eine Messreihe. Berechnen Sie für beide Methoden den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Welche Methode ist genauer? Was ist der Grund?

¹Für eine Messreihe mit n Messungen x_1, x_2, \dots, x_n und dem Mittelwert \bar{x} ist der mittlere Fehler der Einzelmessung (auch Standardabweichung) durch $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ definiert. Der mittlere Fehler des Mittelwertes ist durch $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$ gegeben.

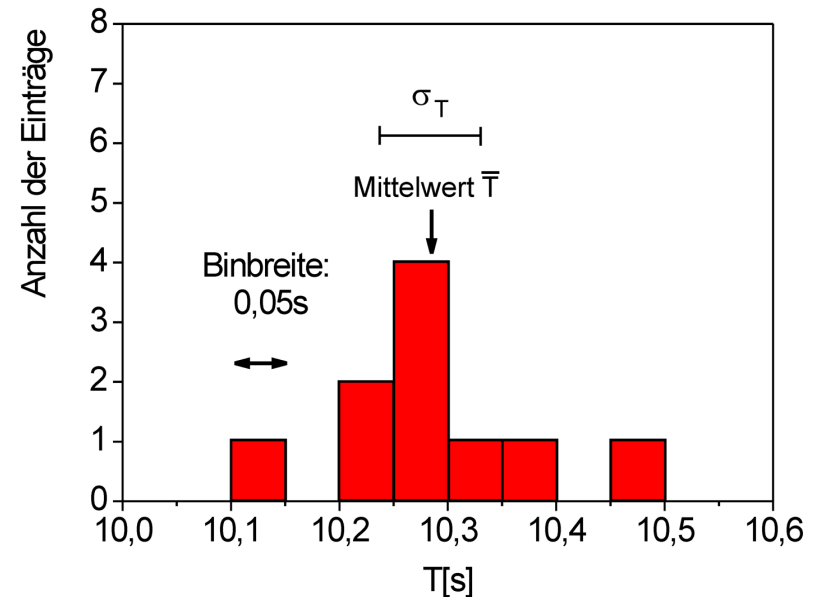


Abbildung 2: Histogramm einer Messreihe.

Messung	T [s]	\bar{T} [s]	σ_T [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	10,11	10,285	0,094	0,03
2	10,23			
3	10,34			
4	10,28			
5	10,26			
6	10,24			
7	10,28			
8	10,46			
9	10,27			
10	10,38			

Um die Federkonstante aus der Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse zu bestimmen, wird eine graphische Methode verwendet. Hierzu wird

Gleichung (5) geschrieben als

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m \quad (7)$$

Dies lässt sich als Geradengleichung

$$y = ax + b \quad (8)$$

interpretieren wenn man

$$\begin{aligned} x &= m \\ y &= T^2 \\ a &= \frac{4\pi^2}{D} \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

setzt. Daher wird im Diagramm das Quadrat der gemessenen Schwingungsdauer T gegen die Masse m aufgetragen. Der Wert von T^2 und von m sind fehlerbehaftet. Folglich müssen Fehlerbalken in das Diagramm eingezeichnet werden. Der Fehler wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern der Mittelwerte der Schwingungsdauern bestimmt. Als nächstes wird die Steigung aus dem Diagramm bestimmt in dem eine Gerade so in das Diagramm gelegt wird, dass die Gerade die Messwerte möglichst gut beschreibt. Die Steigung dieser Geraden kann nun aus dem Diagramm nach

$$a = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \quad (10)$$

abgelesen werden. Um den Fehler von a zu erhalten werden in dasselbe Diagramm zusätzlich Fehlergeraden eingezeichnet. Die Fehlergeraden werden so gelegt, dass sie noch gerade die Messungen unter Berücksichtigung des Messfehlers beschreiben könnten. Die Differenz der Steigungen der optimierten Geraden und der Fehlergeraden wird als Fehler der Steigung σ_a verwendet. Nach Gleichung (9) kann nun die Federkonstante und mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz der Messfehler der Federkonstanten berechnet werden.

Nach Gleichung (7) sollte man erwarten, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Dies ist aber nicht der Fall. Überlegen Sie sich die Ursache hierfür. Aus dem selben Grund ist es übrigens auch nicht möglich die Federkonstante für einzelne Messungen direkt aus Gleichung (5) zu bestimmen. Die graphische Bestimmung der Federkonstante ist in diesem Fall unerlässlich! Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem zweiten Diagramm die

Auslenkung des Federpendels gegen die Masse aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden, da Gleichung (6) wieder als Geradengleichung der Form

$$x = \frac{g}{D} m \quad (11)$$

dargestellt werden kann. Die Steigung

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta m} \quad (12)$$

und ihr experimenteller Fehler können nun nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Erdbeschleunigung wird nach

$$g = D \cdot a \quad (13)$$

berechnet. Um den Fehler der Erdbeschleunigung zu bestimmen muss die Fehlerfortpflanzung angewendet werden, da sowohl der Wert von D als auch der Wert von a fehlerbehaftet sind.

V Messprotokoll

Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer:

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Maximalauslenkung.

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Nulldurchgang

Ablesegenauigkeit der Stoppuhr:

Messung der Federkonstante:

m [g]	Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
50	1	3				
	2	3				
	3	3				
100	1	3				
	2	3				
	3	3				
150	1	3				
	2	3				
	3	3				
200	1	3				
	2	3				
	3	3				
250	1	3				
	2	3				
	3	3				

Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Start/Stop bei

.....

Messung der Erdbeschleunigung:

Δm [g]	Auslenkung x [mm]	Ablesefehler Δx [mm]

Messung der Auslenkung als Funktion der Masse

VI Beispiele für die Darstellung von Messergebnissen

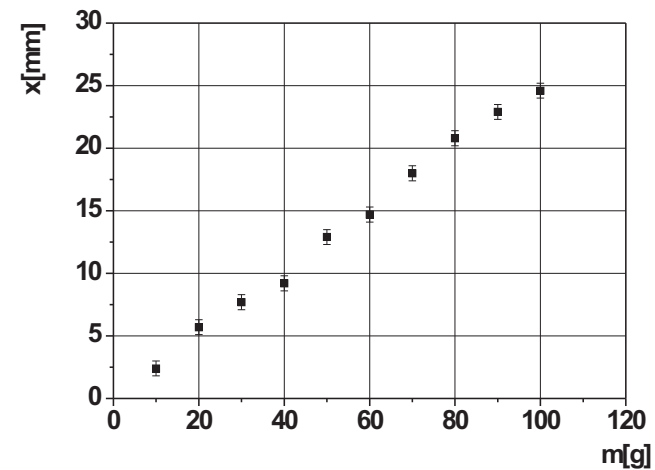
Abschließend werden noch ein paar Beispiele dafür gegeben, wie Messdaten graphisch dargestellt werden sollen. Es werden auch einige Beispiele für typische Fehlerquellen beim Zeichnen von Diagrammen gezeigt.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich zu

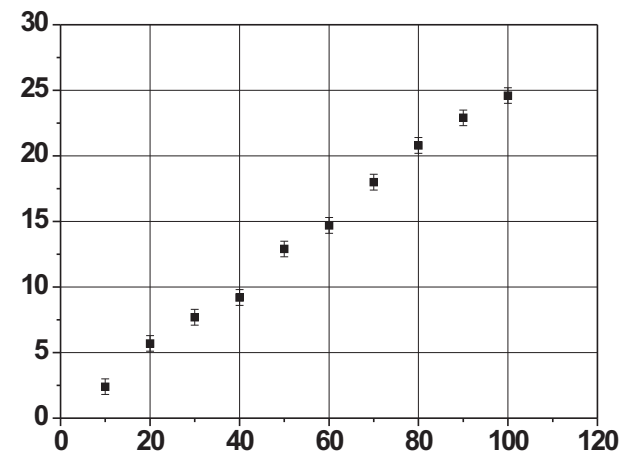
$$a_{\text{Ausgleich}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{20\text{mm}}{80\text{g}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

die der Fehlergeraden zu

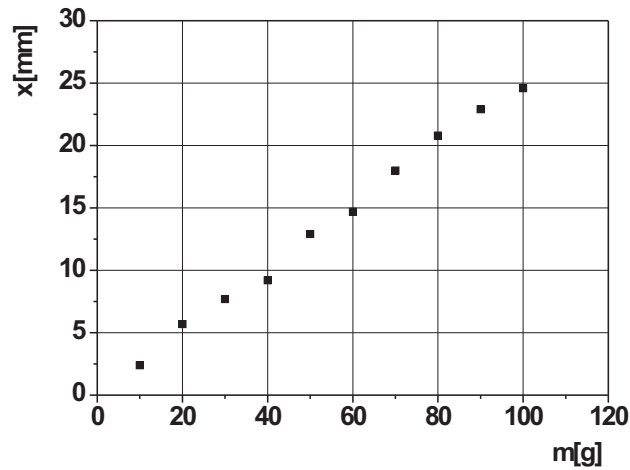
$$a_{\text{Fehler}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{21,5\text{mm}}{78\text{g}} = 0,276 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$



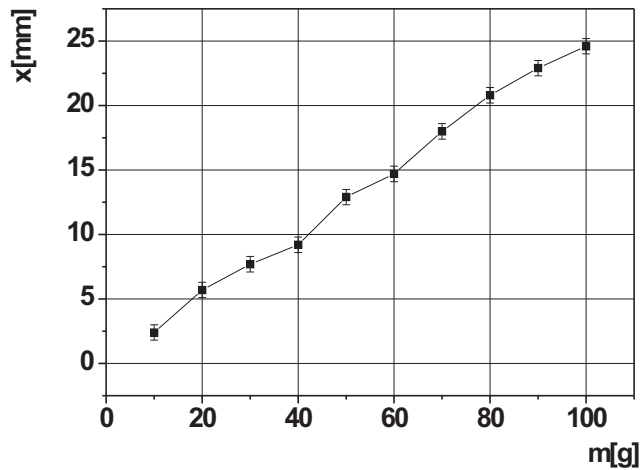
(a) Richtige Darstellung von Messwerten.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Achsenbeschriftungen fehlen.



(a) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Fehlerbalken fehlen.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Messpunkte sind durch eine (unphysikalische) Zick-Zack-Linie verbunden.

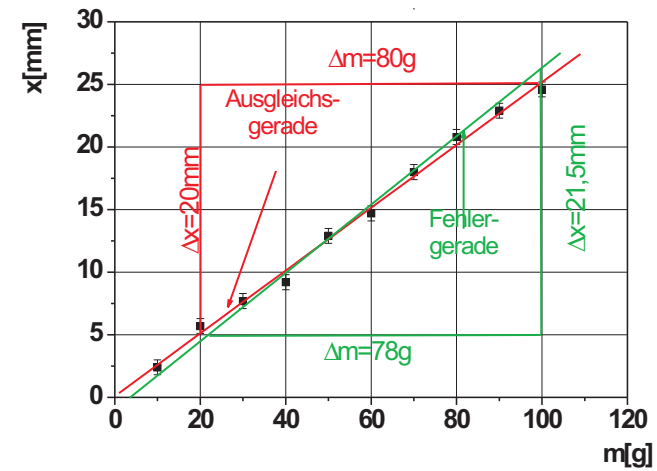


Abbildung 5: Richtiges Anpassung einer Ausgleichsgerade und Ermittlung der Geradensteigung.

Versuch 12 Trägheitsmoment

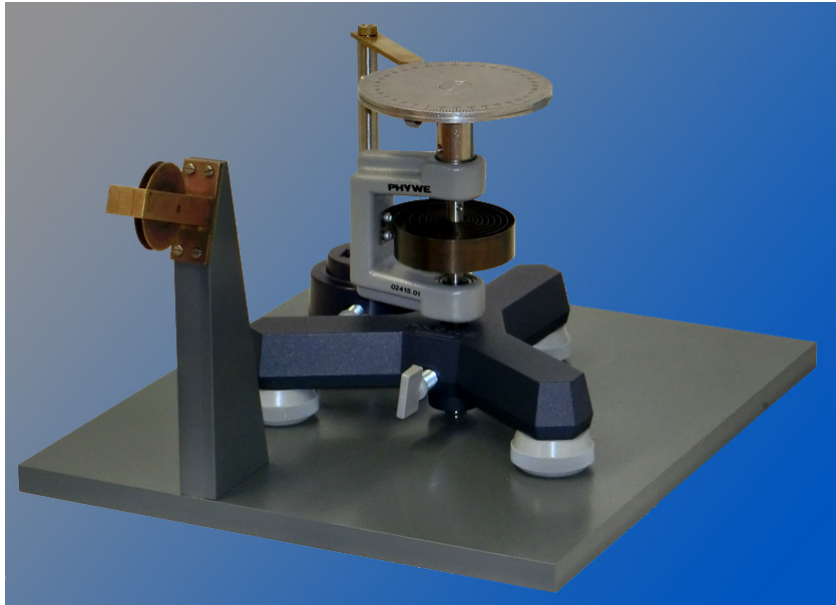


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Drehpendel mit senkrechter Achse
- Drehgabel und Drehtisch
- Waage gemeinsam für alle Aufbauten
- Handstoppuhr und Messschieber
- Balancierschneide
- Zubehör: Al-Scheibe mit Schnurnut und Winkelteilung, runde Messingscheibe, unregelmäßige Messingscheibe, Gewichtsteller mit Zugschnur, 6 Auflegegewichte von je 40 g, Selbstklebeetiketten

II Literatur

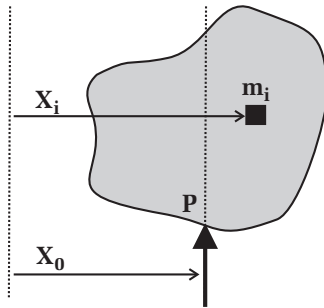
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Drehbewegung fester Körper, Trägheitsmoment, Drehmoment, Drehimpuls, Rotationsenergie, Steinerscher Satz.

Verständnisfragen

1. Die Physik der linearen Bewegung und der Drehbewegung wird bei Verwendung der passenden Begriffe durch völlig analoge Gleichungen beschrieben. Finden Sie für die folgenden Größen der linearen Bewegung, analoge Größen zur Beschreibung der Drehbewegung: Ort \vec{r} , Geschwindigkeit \vec{v} , Masse m , Kraft \vec{F} , Impuls \vec{p} , kinetische Energie W . Vergleichen Sie weiterhin folgende Größen des Federpendels mit dem Drehpendel: lineares Kraftgesetz: $\vec{F} = -k\vec{r}$, Gesamtenergie $W = 1/2kx^2 + 1/2mv^2$, Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.
2. Welches „Kraftgesetz“ erwarten Sie bei der Drehung des Drehpendels?
3. Wie sieht die Differentialgleichung für die Schwingung eines Körpers mit dem Trägheitsmoment J_s aus, wenn sie harmonisch ist, wie sieht dafür der Energiesatz aus?
4. Betrachten Sie die Skizze. Welche Bedingung für x_0 muss gelten, damit der im Punkt P unterstützte Körper im Schwerfeld im Gleichgewicht ist? Was hat das mit dem Schwerpunkt zu tun?
5. Formulieren Sie den Steinerschen Satz (mit Skizze).
6. Was sind die Hauptträgheitsmomente und die zugehörigen Drehachsen für einen homogenen Quader (Skizze)? Wodurch zeichnen sie sich bei freier Rotation aus?



IV Aufgaben

- Das Richtmoment eines Drehpendels ist zu bestimmen.
- Das Trägheitsmoment eines unregelmäßig geformten Körpers soll für verschiedene Lagen der Drehachse im Körper ermittelt werden.

V Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Bestimmung des Richtmoment D des Drehpendels

Das Richtmoment D des Drehpendels ist über den Zusammenhang zwischen angreifendem Drehmoment M und dem Winkel der Auslenkung ϕ nach der Beziehung

$$M = -D\phi \quad (1)$$

zu bestimmen. Das Drehmoment M wird wie folgt erzeugt: Auf der Drehachse wird die Aluminiumscheibe mit der Winkelteilung aufgesetzt und festgeschraubt. Am Umfang der Scheibe greift über eine Schnur tangential die Kraft F (Gewicht des Gewichtstellers mit aufgelegten Massestücken) an. Es ist dann

$$M = -Fr \quad (2)$$

worin r der Radius der Scheibe ist, der über den Durchmesser $2r$ mit dem Messschieber bestimmt wird.

Hängen Sie den Gewichtsteller an die Schnur und lösen Sie die Schraube am Stativ. Drehen Sie nun den gesamten Aufbau so, dass die Schnur über den gesamten Umfang der Scheibe anliegt. Legen Sie nacheinander die 6 Gewichte auf. Notieren Sie den jeweiligen Winkel der Scheibendrehung.

Aufgabe 2: Bestimmung des Richtmoment D des Drehpendels einer Scheibe mit bekanntem Trägheitsmoment

Zum Vergleich ist das Richtmoment D des Drehpendels aus seiner Schwingungsdauer mit einer Scheibe mit bekanntem Trägheitsmoment J_s zu ermitteln. Dazu wird die Al-Scheibe abgenommen und der Drehtisch aufgesetzt. Zunächst wird die Schwingungsdauer T_1 des Tisches bestimmt, dann wird die runde Messing-scheibe so auf dem Drehtisch befestigt, dass ihr Mittelpunkt (Körnermarke) genau über der Achse (Zeigerspitze) liegt und erneut die Schwingungsdauer gemessen (T_2). Zur Ermittlung der Schwingungsdauer stoppen Sie jeweils 3 mal 20 Schwingungen. Bestimmen Sie den Durchmesser der Scheibe mit der Schieblehre sowie dessen Masse.

Aufgabe 3: Bestimmung des Schwerpunktes der unregelmäßigen Messingplatte

Der Schwerpunkt der unregelmäßigen Messingplatte ist auf statischem Wege zu bestimmen. Kleben Sie auf die Platte ein neues Etikett. Legen Sie die Platte auf die am Tisch festgeschraubte Schneide und ermitteln Sie zwei möglichst senkrecht zueinander liegende Gleichgewichtslagen, die Sie durch Striche längs der Auflageschneide auf dem Klebeetikett kennzeichnen. Die erhaltenen Schwerlinien kreuzen sich im Schwerpunkt.

Aufgabe 4: Bestimmung des Trägheitsmoment der unregelmäßigen Messingplatte

Das Trägheitsmoment der unregelmäßigen Platte bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt senkrecht zur flachen Seite der Platte ist aus ihrer Schwingungsdauer zu bestimmen (einmal 20 Schwingungen). Hierzu wird die Platte so auf dem Drehtisch befestigt, dass der Schwerpunkt genau unter der Zeigerspitze liegt. Das Trägheitsmoment des Drehtisches, den Sie in Aufgabe 3 bestimmt haben, wird von dem ermittelten Trägheitsmoment (Tisch + Platte) abgezogen.

Aufgabe 5: Bestimmung der Trägheitsmomente parallel zur Schwerpunktsachse

Bestimmen Sie die Trägheitsmomente bezüglich fünf parallel zur Schwerpunktsachse (Aufgabe 5) im Abstand a_1, \dots, a_5 verlaufende Achsen. Ziehen Sie auf dem Klebeetikett eine Gerade in Längsrichtung der Platte durch den Schwerpunkt. Markieren Sie darauf einige Punkte und deren Abstände vom Schwerpunkt. Für diese so markierten Achsen bestimmen Sie nun die Trägheitsmomente wie in Aufgabe 5. Die Masse der Platte ist durch Wägung zu bestimmen.

sind die Werte für das Trägheitsmoment als Funktion von a^2 einzutragen, die sich aus dem Steiner'schen Satz ergeben. Zeichnen Sie zu den experimentell erhaltenen Werte die Fehlerbalken ein.

VI Auswertung

Aufgabe 1: Tragen Sie die gemessenen Winkel als Funktion des Drehmoments in ein Diagramm ein. Aus der Steigung der durch die Messpunkte zu legenden Geraden kann das Richtmoment D des Drehpendels errechnet werden. Der Fehler von D ist grafisch zu bestimmen.

Aufgabe 2: Das Trägheitsmoment J_s der runden Scheibe bestimmen Sie in einfacher Weise aus deren Masse m_s und ihrem Radius r_s zu

$$J_s = \frac{1}{2} m_s r_s^2 \quad (3)$$

. Ist das Trägheitsmoment des Tisches J_T , dann ist

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T}{D}} \quad (4)$$

und

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_s}{D}}. \quad (5)$$

Nach Quadrieren kann aus (4) und (5) das Trägheitsmoment J_T durch Subtraktion eliminiert werden. Man erhält

$$D = \frac{4\pi^2 J_s}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{2\pi^2 m_s r_s^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (6)$$

Prüfen Sie nach, ob die beiden gefundenen Werte für das Richtmoment D aus Aufgabe 1 und Aufgabe 2 innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen.

Aufgabe 3: Berechnen Sie das Trägheitsmoment der unregelmäßigen Platte.

Aufgabe 4: Tragen Sie die gefundenen Werte des Trägheitsmomentes parallel zur Schwerpunktsachse gegen a^2 in ein Diagramm ein. In dasselbe Diagramm

Versuch 13 Resonanz

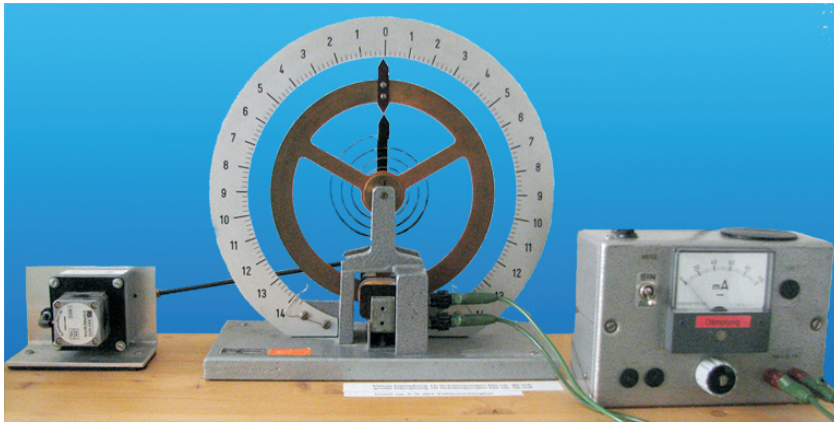


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Drehpendel, angeregt von einem Schrittmotor mit Exzenter
- Schrittmotorsteuerung mit Netzteil
- Frequenzgenerator
- Netzgerät zur Regelung der Dämpfung (bei Aufbau A-C in das Gehäuse der Schrittmotorsteuerung eingebaut)

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Freie Schwingung (gedämpft, ungedämpft), erzwungene Schwingung, Resonanz, Drehpendel, Wirbelströme, Lenzsche Regel.

Verständnisfragen:

1. Welche Kräfte wirken in dem System?
2. Wie sieht die Differentialgleichung für die Schwingung aus, wenn sie gedämpft oder ungedämpft ist? Wie lauten die Lösungen?
3. Mit welcher Frequenz schwingt das Drehpendel, wenn eine äußere Kraft angelegt wird? (Wie sieht die Differentialgleichung aus?)
4. In welche Formen teilt sich die Gesamtenergie im System auf? Was passiert bei der Dämpfung?
5. Wie groß ist die Energie im System in Abhängigkeit von der Frequenz des Erregers (qualitativ)?
6. Eine „Resonanzkurve“ wird durch die Lage des Maximums („Resonanzfrequenz“), die Amplitude an der Resonanzstelle sowie die Halbwertsbreite festgelegt. Welchen Einfluss hat die Größe der Dämpfung auf die genannten Parameter der Resonanzkurve?
7. Was versteht man unter der „Güte“ Q eines Resonators?

IV Aufgaben

- Die Schwingungsdauer T_0 eines ungedämpften, freien Drehpendels (Pohl-sches Rad) ist zu bestimmen.
- Mit einer Wirbelstrombremse wird das Pendel gedämpft und für zwei Ströme aus der Abnahme der Amplitude mit der Zeit die Dämpfung bestimmt.
- Das Pendel wird zu einer erzwungenen Schwingung angeregt und es wird für verschiedene Dämpfungen die Abhängigkeit der Amplitude von der Erregerfrequenz gemessen. Aus der Breite und der Höhe der Resonanzkurven werden nochmals Werte für die Dämpfungskonstanten ermittelt.

V Grundlagen

In diesem Versuch werden Sie freie und erzwungene Schwingungen eines Drehpendels untersuchen. Die freie gedämpfte Schwingung (Schwingungsdauer T_f) ist dadurch gekennzeichnet, dass die Amplitude mit fortschreitender Zeit abnimmt und das Pendel schließlich irgendwann zum Stillstand kommt. Die Amplitudenabnahme tritt auf, wenn Kräfte (z.B. Reibungskraft) vorhanden sind, die der momentanen Bewegungsrichtung entgegenwirken. Sind diese proportional zur Geschwindigkeit (häufigster Fall), so wird die Zeitabhängigkeit der Bewegung durch

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \sin \omega_f t \quad (1)$$

beschrieben. Hier bezeichnet ω_f die Kreisfrequenz des gedämpften, frei schwingenden Oszillators, a_0 die Anfangsamplitude und δ die Dämpfungskonstante. Der erste Teil von Gleichung (1) beschreibt das exponentielle Abklingen, die Sinusfunktion die Oszillation der Schwingung. Betrachtet man die Zeitabhängigkeit der Amplitude nur in einem der Umkehrpunkte, so ist dort der Sinus stets Eins und wir erhalten für die Amplitude

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t}. \quad (2)$$

Sofern die Schwingung zur Zeit $t = 0$ in einem Umkehrpunkt begonnen hat, lässt sich $t = nT_f$ ($n = \text{Zahl der Schwingungen}$, $T_f = \text{Periodendauer}$) schreiben. Trägt man gemäß Gleichung (2) die Amplitude im logarithmischen Massstab über die Zahl der Schwingungen auf, so erhält man eine Gerade (Abbildung 2).

Aus Abbildung 2 kann unmittelbar die Dämpfungskonstante δ bestimmt werden. Ist $t_{1/2}$ die Zeit, zu der die Amplitude auf die Hälfte der Anfangsamplitude abgesunken ist, so folgt

$$a(t_{1/2}) = \frac{a_0}{2} = a_0 e^{-\delta t_{1/2}} \quad \text{und damit} \quad \delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \quad (3)$$

Zwischen der Kreisfrequenz ω_f der gedämpften Schwingung und der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung besteht der Zusammenhang:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (4)$$

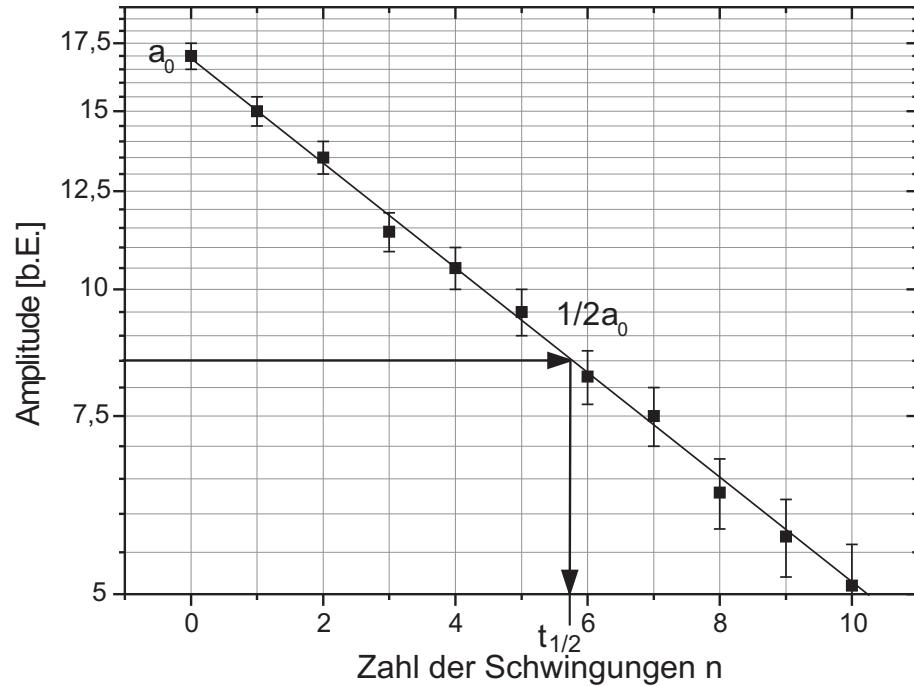


Abbildung 2: Messung der exponentiellen Abnahme der Amplitude eines Oszillators. (b.E.=Beliebige Einheiten). Beachten Sie die logarithmische Auftragung der Amplitude.

Schaltet man über ein mechanisches Übertragungssystem ein periodisch wirkendes Drehmoment (Schrittmotor mit Exzenter) mit der Frequenz ω an das Drehpendel, so spricht man von einer erzwungenen Schwingung. Man beobachtet nach Abwarten des sogenannten Einschwingungsvorganges eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz ω des Erregers. Die Amplitude des Drehpendels hängt von der Erregfrequenz ab. Der Verlauf ist in Abbildung 3 dargestellt und wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$b(\omega) = \frac{A\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \quad (5)$$

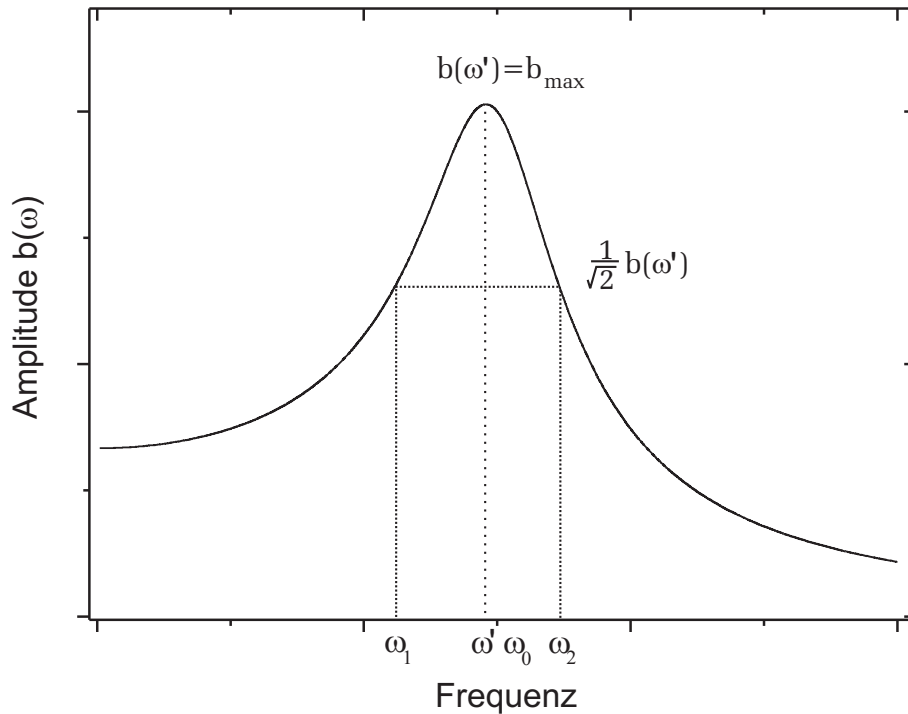


Abbildung 3: Resonanzkurve. Beachten Sie dass hier $\omega = 2\pi f$ und nicht f aufgetragen ist.

wobei $b(\omega)$ die Amplitude des Drehpendels als Funktion der Anregungsfrequenz und A die Amplitude des Erregers darstellen. Aus Gleichung (5) lässt sich durch Differentiation und Bestimmung der Nullstelle die Frequenz ω' bestimmen, bei der die Amplitude maximal wird¹:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (6)$$

¹Die Verschiebung von ω' gegen ω_0 ist sehr gering und im Versuch kaum messbar. Bei einer Dämpfung, bei der die Amplitude pro Schwingung auf die Hälfte abnimmt, beträgt sie 1,2 % von ω_0 . Bei einer solchen Schwingung wäre die Halbwertsbreite der Resonanzkurve $0,23 \omega_0$, d.h. man müsste die Lage des Maximums auf rund 5 % von der Halbwertsbreite messen!

Zwei weitere Größen sind zur Charakterisierung der Resonanzkurve wichtig: Die Halbwertsbreite H und die Resonanzüberhöhung. Die Breite der Kurve in der Höhe $b(\omega')/\sqrt{2}$ ist bei nicht zu starker Dämpfung gegeben durch

$$H = (\omega_2 - \omega_1) = 2\delta. \quad (7)$$

H heißt die Halbwertsbreite der Resonanzkurve, da es die Breite in halber Höhe ist, wenn man das Quadrat der Amplitude über der Frequenz aufträgt.

Die Resonanzüberhöhung ist definiert durch den Quotienten

$$\frac{b(\omega')}{b(\omega \rightarrow 0)} = \frac{\omega_0}{2\delta}, \quad (8)$$

wobei $\omega_0 \approx \omega_f$ angenommen wurde. Die links stehenden Amplituden und ω_0 können gemessen werden, womit eine Bestimmung von δ möglich ist.

Die Theorie der erzwungenen Schwingung liefert für die Auslenkung als Funktion der Zeit $\phi(t)$ folgenden Ausdruck:

$$\phi(t) = a_0 \sin(\omega_f t - \beta) e^{-\delta t} + b(\omega) \sin(\omega t - \epsilon). \quad (9)$$

Diese Gleichung enthält eine exponentiell abklingende Schwingung mit der Frequenz ω_f der freien gedämpften Schwingung plus einer ungedämpften Schwingung mit der Frequenz ω des Erregers. Die Phase β hängt von dem Anfangszustand des Systems ab. ϵ ist die Phasendifferenz zwischen Erreger und erzwungener Schwingung. Der Einschwingvorgang ist beendet, wenn der erste Term in (9) praktisch verschwunden ist. Es bleibt eine stationäre Schwingung der Amplitude b und der Frequenz ω , wobei b nach (5) von ω abhängt.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Bestimmung der Schwingungsdauer T_0 des ungedämpften freien Drehpendels durch dreimaliges Messen von 20 Schwingungsdauern.

Aufgabe 2: Bestimmung der Einschwingzeit bei unterschiedlichen Dämpfungen.

Schalten Sie die Dämpfung ein (sie funktioniert nach dem Prinzip der Wirbelstrombremse; „Lenzsche Regel“) und beobachten Sie zunächst qualitativ den Einfluss auf die Amplitude der Schwingung bei verschiedenen Strömen durch die zur Dämpfung dienende Magnetspule. Stellen Sie dann die an der Apparatur angegebenen 2 Stromwerte ein, bei denen die Amplitude einmal nach ca. 10 Schwingungen und einmal nach ca. 15 Schwingungen vom Vollausschlag auf praktisch 5 % des Vollausschlages abgeklungen ist. Schreiben Sie die zugehörigen Zeiten auf. Sie sind die zu dieser Dämpfung gehörenden Einschwingzeiten für die Messungen unter 5.²

Aufgabe 3: Bestimmung der Schwingungsdauer und Amplitudenabnahme freier Schwingungen

Für die beiden in Aufgabe 3 gewählten Ströme wird jeweils die Schwingungsdauer T_f gemessen und die zeitliche Abnahme der Amplitude registriert. Das Abklingen der Amplitude messen Sie so, dass Sie zur Zeit $t = 0$ das Drehpendel in einem Umkehrpunkt loslassen und dann nach jeder vollen Periode die Amplitude ablesen. Falls Sie alleine arbeiten und es Ihnen nicht gelingen sollte, die Amplitudenwerte in rascher Folge zu Papier zu bringen, bitten Sie einen Kollegen um Hilfe. Für jede Dämpfung die Messung einmal wiederholen.

Aufgabe 4: Bestimmung der Schwingungsdauer und Amplitudenabnahme erzwungener Schwingungen

Das Drehpendel wird von einem Schrittmotor angeregt, der es erlaubt, die Frequenz der Erregung des Pendels direkt zu bestimmen. Der eingebaute Schrittmotor macht pro elektrischem Impuls eine Drehung um $0,72^\circ$, d.h. nach 500 Schritten eine Umdrehung. Durch die Ansteuerlektronik, die das Prinzip der Microsteps verwendet, entsprechen 4000 Hz des Steuersignals 1 Hz an der Welle des Drehpendels.

²Es ist günstig, mit dem jeweils eingestellten Strom die Messungen für Aufgabe 3 und 4 direkt hintereinander durchzuführen und dann den zweiten Stromwert einzustellen.

Die Frequenz der Pendelerregung wird also durch die Frequenz bestimmt, mit der der Motor angesteuert wird. Diese kann an dem Frequenzgenerator eingestellt und abgelesen werden. Der Motor wird durch Ein- und Ausschalten dieses Generators gesteuert. Achtung: Der Einfachheit halber tragen Sie die folgenden Messwerte über der Frequenz des Generators auf und rechnen erst am Schluss bei der Bestimmung von δ und ω' den Faktor 4000 ein. Stellen Sie den Generator in den Bereich „1 k“ (Tasten); messen Sie dann für die beiden in Aufgabe 3 ausgewählten Ströme (=Dämpfungen) die stationäre Amplitude des Drehpendels als Funktion der Frequenz im Bereich von ca. 300 Hz bis 4000 Hz (=maximal erreichbare Frequenz im „1 k“-Bereich). Hierzu messen sie zunächst in ca. 200 Hz Schritten, danach ± 150 Hz um die Stelle der Resonanz in 50 Hz Schritten. Bei jedem Messpunkt müssen Sie die in Aufgabe 3 bestimmte Einschwingzeit abwarten, bis eine stationäre Amplitude erreicht ist. Unter Umständen ist es zweckmäßig in der Nähe der Resonanzspitze und an den Flanken im Bereich von $0,7 b_{max}$ noch je einen weiteren Punkt zu messen. Beobachten Sie die Phasen von Erreger und Pendel, insbesondere bei tiefen, bei hohen Frequenzen und in der Nähe der Resonanzspitze.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie T_0 mit Fehler.

Aufgabe 2: Die Amplitude der gedämpften Schwingungen (für beide Ströme) ist in logarithmischem Massstab als Funktion der Zahl der Schwingungen aufzutragen. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Dämpfungskonstanten δ .

Aufgabe 3: Die Amplitude der stationären Schwingung (für beiden Dämpfungen) ist über der Generatorfrequenz aufzutragen. Bestimmen Sie jeweils die Lage des Maximums der Resonanzkurve und vergleichen Sie die daraus berechnete Frequenz ($1/4000$) des Pendels mit dessen Eigenfrequenz. Sowohl aus der Halbwertsbreite wie aus der Resonanzüberhöhung ist abermals die Dämpfungskonstante zu bestimmen. Prüfen Sie, ob jeweils die drei nach verschiedenen Verfahren gewonnenen Ergebnisse für δ innerhalb ihrer Fehler übereinstimmen.

Versuch 15 Schiefe Ebene

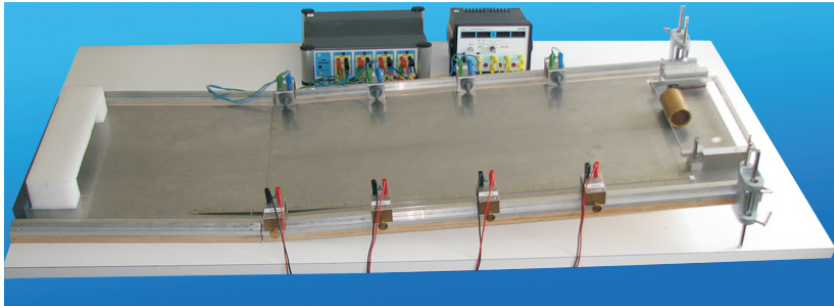


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs schiefe Ebene.

I Messaufbau

- höhenverstellbare Rollbahn
- Lichtschranken mit Steuergerät
- Wasserwaage
- Lineal
- Rollkörper
 - Vollzylinder (Aluminium, $\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$)
 - Hohlzylinder (Messing, $\rho = 8,44 \text{ g/cm}^3$)
 - Verbundzylinder: Mantel aus Aluminium, Kern aus Messing.
- Messschieber
- Waage

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums: <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Gewichtskraft, Gleitreibung, Rollreibung, Drehmoment, Drehimpuls, Trägheitsmoment, Impuls, Impulserhaltung, mechanische Energieformen, Energieerhaltung. **Verständnisfragen:**

1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment für folgende Körper, die um ihre Symmetrieachse rotieren.
 - Vollzylinder
 - Hohlzylinder

Führen Sie die Rechnung durch Integration aus der allgemeinen Definition des Trägheitsmoments durch.

2. Ein „reibungsfreier“ Quader, ein Vollzylinder, ein Hohlzylinder und eine Vollkugel mit jeweils gleichen Radien, gleiten bzw. rollen eine geneigte Ebene hinunter. Vergleichen Sie die Bewegungen miteinander. Welcher Körper kommt als erstes „unten“ an?
3. Ein „reibungsbefahter“ Quader soll durch Oberflächenbehandlung so getrimmt werden, dass seine Beschleunigung an einem um 10° gegen die Horizontale geneigten Hang genauso groß ist wie die eines Vollzylinders. Auf welchen Wert müsste man die Gleitreibungszahl dann einstellen? (Tipp: neben der Hangabtriebskraft wirkt auf den Quader die Gleitreibungskraft.)

IV Aufgaben

- Bestimmung der Beschleunigung auf einer schiefen Ebene für zwei Rollkörper.
- Untersuchungen zum Energieerhaltungssatz.

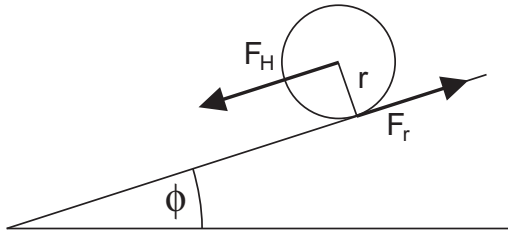


Abbildung 2: Zur Herleitung der Beschleunigung auf der schiefen Ebene.

V Grundlagen

Die Reibungskraft F_R (Haftreibungskraft) eines Rollkörpers am „Hang“ bewirkt am Radius r das Drehmoment

$$M = F_R \cdot r = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (1)$$

Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit und I das Trägheitsmoment des rollenden Körpers. Mit der Rollbedingung $v_s = r\omega$, wobei der Index „s“ auf den Schwerpunkt verweist, lässt sich diese Gleichung wie folgt umformen:

$$M = F_R \cdot r = \frac{I}{r} \frac{dv_s}{dt} = \frac{I_s}{r} \cdot a_s \quad (2)$$

und somit

$$F_R = \frac{I}{r^2} \cdot a_s. \quad (3)$$

Auf den Schwerpunkt des rollenden Körpers wirken Hangabtriebskraft F_H und Reibungskraft in entgegengesetzte Richtung:

$$ma_s = mg \sin \varphi - F_R \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) erlauben die Eliminierung der Reibungskraft:

$$ma_s = mg \sin \varphi - \frac{I}{r^2} \cdot a_s \quad (5)$$

und man erhält für die Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$a_s = \frac{mg \sin \varphi}{m + \frac{I}{r^2}}. \quad (6)$$

VI Durchführung des Versuchs

Machen Sie sich zunächst mit der Zeitmesstechnik vertraut. Die Lichtschranken und der Zähler sind bereits fertig verkabelt. Schließen Sie den am Startmechanismus angebrachten Schalter an den Starteingang der Uhr an. Die Stoppengänge der Uhr werden durch die vier Lichtschranken geschaltet. Die Lichtschranken bestehen jeweils aus einem Sender (Infrarotleuchtdiode) und einem Empfänger (Infrarotphotodiode), die beide jeweils an einen gemeinsamen Kanal der Lichtschrankenbox anzuschließen sind. Der Ausgang jedes Kanals wird dann mit dem entsprechenden Stoppeingang der Uhr verbunden. Die Leuchtdioden an der Lichtschrankenbox zeigen jeweils an, ob die Lichtschranken „scharf“ sind, das heißt, ob die Photodiode hinreichend von der gegenüber platzierten Leuchtdiode angestrahlt wird.

Aufgabe 1: Vermessung der schiefen Ebene und der Probekörper

Für die folgenden Untersuchungen an der geneigten Ebene müssen die Versuchskörper (Voll-, Hohlzylinder) genau vermessen werden. Verwenden Sie zur Bestimmung des Durchmessers einen Messschieber. Wiegen Sie anschließend den Hohl- und Verbundzylinder. Notieren Sie für beide Messungen ebenfalls den Mess bzw. den Ablesefehler. **Die Beobachtungen mit dem Verbundzylinder sind nur qualitativ, weshalb dieser Zylinder nicht vermessen werden muss.**

Überprüfen Sie mit der Wasserwaage ob die geneigte Ebene über die gesamte Breite die gleiche Neigung aufweist. Falls dies nicht der Fall ist, müssen Sie die Ebene nachjustieren, indem Sie die Höhe einer der „Füße“ nachstellen. Die Platte ist sehr schwer. Führen Sie dies daher am besten zu zweit durch. Einer stützt die Platte, der andere löst die beiden seitlichen Schrauben und variiert die Länge der Stahlstange.

Überlegen Sie sich genau, welche Länge und Höhe Sie messen müssen, um den Neigungswinkel der Ebene ausrechnen zu können (Abbildung (3)).

Aufgabe 2: Untersuchung der Bewegungsart für das Rollen an der geneigten Ebene

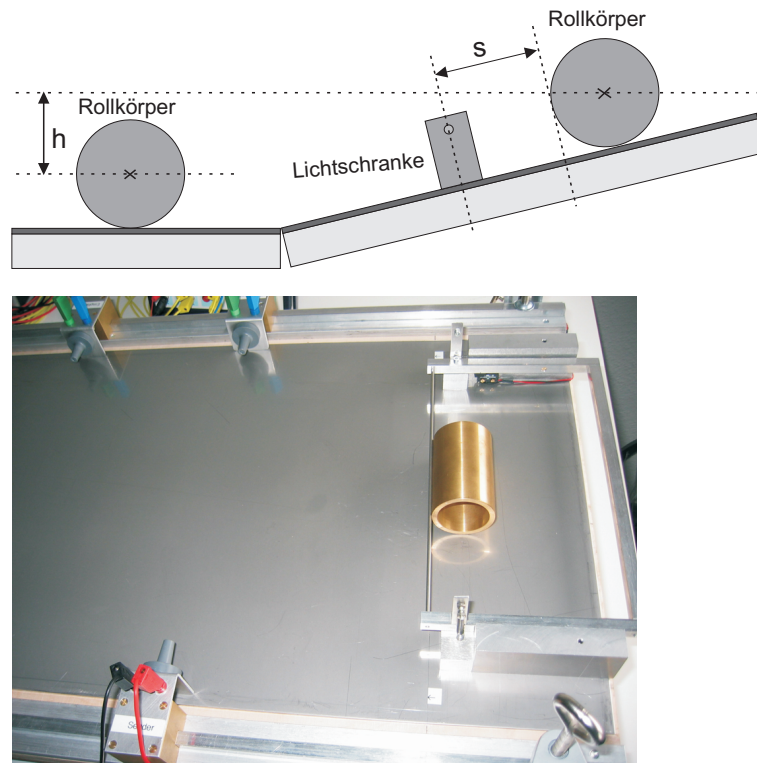


Abbildung 3: Skizze des Versuchsaubaus.

Überprüfen Sie zunächst, ob sich für das Rollen an der geneigten Ebene gleichmäßig beschleunigte Bewegungen ergeben. Hierzu sollten Sie die Lichtschranken **in sinnvollen Abständen** auf der schiefen Ebene positionieren ($t \propto \sqrt{s}$).

Untersuchen Sie qualitativ die Beschleunigungen der Rollkörper. Alle drei Zylinder passen gemeinsam nebeneinander in den Startmechanismus. Erläutern sie ohne Rechnung, warum die verschiedenen Probekörper unterschiedlich lange brauchen um unten anzukommen.

Aufgabe 3: Genaue quantitative Untersuchung der Beschleunigung

Verwenden Sie für die folgenden Messungen nur den Voll- und Hohlzylinder und

eine beliebige Neigung der Ebene. Die Abstände vom Rollkörper bis zu den einzelnen Lichtschranken, müssen vom Mittelpunkt der Lichteintrittsöffnungen an den Lichtschranken bis zum Anlagepunkt des Rollkörpers am Startmechanismus gemessen werden. Die Anlagelinie des Rollkörpers am Startmechanismus ist auf der Edelstahlfläche seitlich neben dem Startmechanismus markiert.

Bestimmen Sie für beide Probekörper (Voll- und Hohlzylinder) die Beschleunigung. Messen Sie die Abstände s der Lichtschranken vom Startmechanismus (siehe Abbildung 3). Stoppen Sie jeweils 5-mal die Zeiten, die die Rollkörper benötigen, um die einzelnen Lichtschranken zu passieren.

Aufgabe 4: Untersuchungen zum Energieerhaltungssatz

Die zu Beginn vorhandene potentielle Energie der Rollkörper wird im Verlauf der Beschleunigung in kinetische Energie umgewandelt. Die kinetische Energie lässt sich in einen Rotations- und einen Translationsanteil zerlegen, so dass sich die Gesamtenergie durch folgende Gleichung ergibt:

$$W_{ges} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh, \quad (7)$$

wobei v die Translationsgeschwindigkeit, I das Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit des Rollkörpers darstellen. In diesem Versuchsteil soll am Fuß der geneigten Ebene auf einem horizontalen Teilstück die Translationsgeschwindigkeit der verschiedenen Rollkörper mit Hilfe von zwei Lichtschranken bestimmt werden. Führen Sie die Messungen jeweils 5-mal durch. Die daraus ermittelte kinetische Gesamtenergie wird mit der anfangs vorhandenen potentiellen Energie verglichen. Um die potentielle Energie zu berechnen benötigen Sie die Höhendifferenz zwischen Start- und Endposition der Rollkörper.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Tragen Sie in einem Diagramm die Strecken s über t^2 auf und berechnen Sie aus der Steigung die Beschleunigung. Vergleichen Sie diese mit dem Wert, der sich aus der Masse und der Geometrie des Rollkörpers sowie aus dem Neigungswinkel der schiefen Ebene ergibt.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die kinetische Energie (Translation- und Rotationsenergie) und vergleichen Sie diese mit der potentiellen Energie. Sind die Ergebnisse innerhalb der statistischen Messfehler verträglich? Welche systematischen Fehler könnte es geben?

Versuch 22 Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

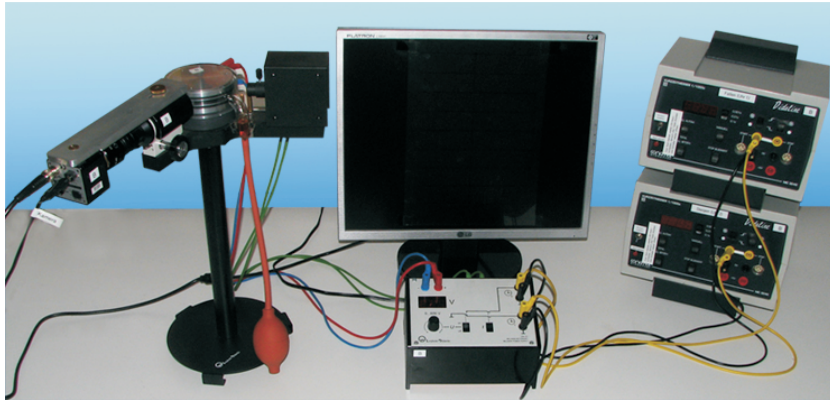


Abbildung 1: Übersicht des Millikan-Versuchs.

I Messaufbau

- Millikan-Gerät (Plattenkondensator, Ölzerstäuber und Beleuchtung).
- Mikroskop-Kamera mit Monitor.
- Millikan-Steuergerät (Hochspannungsquelle, Triggerung der Stoppuhren).
- Zwei elektronische Stoppuhren.
- PC mit Drucker, Datenauswertung mit dem Programm Excel.

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart, 7.Auflage 1994, S. 310-313.
- W. Ilberg, M. Krötzsch, D. Geschke, *Physikalisches Praktikum*, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, Leipzig 10. Auflage 1994, S. 254-256.

- J. Becker, H.J. Jodl, *Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf 1991, S. 152-155.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Auftrieb, Stokesches Gesetz, Elektrisches Feld in einem Kondensator, Kraft auf eine Ladung im homogenen elektrischen Feld. Berechnen Sie die Summe aller Kräfte auf ein im feldfreien Raum mit konstanter Geschwindigkeit sinkendes Öltröpfchen und auf ein im elektrischen Feld des Kondensators mit konstanter Geschwindigkeit steigendes Öltröpfchen. Leiten Sie hiermit die beiden Gleichungen (5) und (6) ab.

IV Aufgaben

- Bestimmung der Elementarladung durch Messung der Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit von elektrisch geladenen Öltröpfchen im Plattenkondensator.

V Grundlagen



Robert A. Millikan

Robert A. Millikan hat im Jahre 1913 in der Fachzeitschrift *Physical Review* eine Arbeit mit dem Titel „On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant“ (Phys.Rev. 2 (1913), 109-143) veröffentlicht. Für die in dieser Arbeit beschriebene Messung der elektrischen Elementarladung erhielt Millikan im Jahre 1923 den Nobelpreis für Physik. Der hier im Praktikum aufgebaute Versuch beruht im wesentlichen auf der Originalapparatur von Millikan. Grundprinzip des Millikan- Experiments ist die Tatsache, dass auf ein im homogenen Feld eines Plattenkondensators bewegliches, elektrisch geladenes Öltröpfchen verschiedene Kräfte wirken, die indirekt messbar sind. Dabei wird die Ladung eines Tröpfchens aus der Messung seiner Fallgeschwindigkeit v_f im feldfreien Raum und seiner

Steiggeschwindigkeit v_s bei einer an den Kondensator angelegten Spannung bestimmt.

Auf ein fallendes Tröpfchen (ohne elektrisches Feld) wirken drei Kräfte:

Gewichtskraft:
$$F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} g \quad (1)$$

Auftriebskraft:
$$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g \quad (2)$$

Stokesche Reibung:
$$F_R = 6\pi r \eta v. \quad (3)$$

Wobei r , $\rho_{\text{Öl}}$, und v der Radius, die Dichte und die Geschwindigkeit des Öltröpfchens bezeichnen, g ist die Schwerebeschleunigung, ρ_{Luft} und η sind die Dichte und die Viskosität der Luft. Trägt das Öltröpfchen eine elektrische Ladung q , so wirkt im Feld eines Plattenkondensators eine zusätzliche Kraft,

elektrische Kraft:
$$F_e = q \frac{U}{d} \quad (4)$$

auf dieses ein. Hier ist q die Ladung des Tröpfchens, U ist die am Kondensator anliegende Spannung und d der Abstand der Kondensatorplatten.

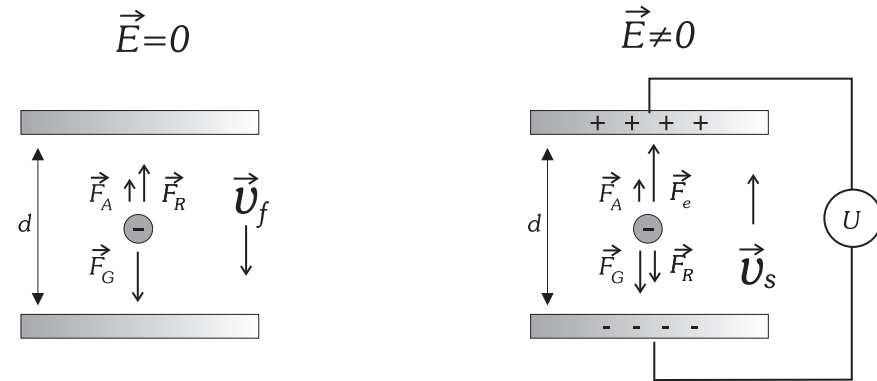


Abbildung 2: Einwirkende Kräfte auf ein elektrisch geladenes Öltröpfchen im Plattenkondensator. Links: Ohne elektrisches Feld. Rechts: Im elektrischem Feld.

Aus der Summe aller Kräfte, die ohne elektrisches Feld auf ein mit konstanter Geschwindigkeit v_f fallendes Tröpfchen wirken und aus der Summe der Kräfte, die auf ein im elektrischen Feld des Kondensators mit konstanter Geschwindigkeit v_s steigendes Tröpfchen wirken, lassen sich die beiden Gleichungen für den Radius r und die Ladung q des Öltröpfchens ableiten:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}} v_f \quad (5)$$

$$q = (v_f + v_s) \sqrt{\frac{9}{2} \frac{v_f \eta^3}{\rho g}} \frac{6\pi d}{U}, \quad (6)$$

wobei ρ die Differenz ($\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}$) darstellt.

Berechnet man die Ladungen der Öltröpfchen mit Hilfe von Gleichung (6) und leitet aus vielen solchen Messungen die Elementarladung e ab, so stellt man fest, dass der so bestimmte Wert um etwa einen Faktor 1,1 zu hoch ist. Genauere Untersuchungen zeigen, dass dieser Faktor um so größer wird, je kleiner der Radius der Öltröpfchen ist. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass die Radien der Öltröpfchen im Bereich 10^{-6} m bis 10^{-7} m liegen (folgt aus Gleichung (5)). Dies entspricht derselben Größenordnung wie die mittlere freie Weglänge der Moleküle in Luft. Die Viskosität η wurde aber bei der bisherigen

Betrachtung als konstant angenommen. Allerdings gilt dies nur dann, wenn der Durchmesser der Öltröpfchen deutlich größer ist als die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle. Man kann aber die Viskosität η mit einem radiusabhängigen Korrekturfaktor $f(r)$ versehen. Dieser auch schon von Millikan benutzte Korrekturfaktor (die sogenannte Cunningham-Korrektur des Stokeschen Gesetzes) ist gegeben durch:

$$\eta(r) = \eta_0 f(r) = \frac{\eta_0}{1 + \frac{b}{rp}}. \quad (7)$$

Hier ist η_0 der Grenzwert der Viskosität für sehr große Öltröpfchen, p ist der Luftdruck und b eine empirische Konstante. Da bei unserer Betrachtung der Radius r von η abhängt (Gleichung 5), müsste man, um r exakt zu berechnen, Gleichung (7) in Gleichung (5) einsetzen und nach r auflösen. Das führt zu einer quadratischen Gleichung. Es zeigt sich aber, dass es genügt, in Gleichung (5) mit η_0 zu rechnen. Der Fehler, den man dabei für r macht, liegt bei etwa 5 %. Der daraus resultierende Fehler für den Korrekturfaktor f beträgt nur etwa 0,5 % und ist somit vernachlässigbar.

Bei der Auswertung zu verwendende Konstanten:

Viskosität der Luft	$\eta_0 = 1,81 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$
Schwerebeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Dichte des Öls bei 15°C	$\rho_{\text{Öl}} = 877 \text{ kg/m}^3$
Dichte des Öls bei 25°C	$\rho_{\text{Öl}} = 871 \text{ kg/m}^3$
Dichte der Luft	$\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$
Konstante im Korrekturfaktor	$b = 7,78 \times 10^{-3} \text{ Pa m}$
Abstand der Kondensatorplatten	$d = (6,00 \pm 0,05) \text{ mm}$
Skala auf dem Bildschirm	$1\text{Skt} = (5,00 \pm 0,13) \times 10^{-5} \text{ m}$

Bachten Sie, dass die roten Linien auf dem Bildschirm nicht einem Skalenteil entsprechen sondern 10 Teilen.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Machen Sie sich mit der Versuchsanordnung vertraut.

Bringen Sie Öltröpfchen in den Kondensator ein und beobachten Sie ihr Verhalten unter dem Einfluss der angelegten Spannung (Für diese und die folgenden Aufgaben ca. 500 V mit dem Drehknopf einstellen. Anschließend den eingestellten Wert notieren und dann für die gesamte Durchführung nicht mehr verändern – **die Spannung ab jetzt über den entsprechenden Kippschalter nur ein- und ausschalten!**). Benutzen Sie zur Scharfstellung das Einstellrad an der Mikroskopführung. Beachten Sie die Prozedur zum Nullstellen der Stoppuhren (ist auf den Uhren angegeben). **Diese müssen Sie nur einmal durchführen.** Mit dem rechten Schalter des Steuergeräts starten Sie die obere Uhr, mit der die Fallzeit der Tröpfchen gemessen wird. Mit dem linken Schalter wird die Spannung am Kondensator angelegt, gleichzeitig wird die obere Stoppuhr angehalten und die untere Stoppuhr gestartet. Am oberen Umkehrpunkt des Tröpfchens wird der linke Schalter wieder ausgeschaltet, dies stoppt die untere Uhr und startet wieder die obere Uhr, usw. Am Ende der Messung eines Tröpfchens wird schließlich wieder der rechte Schalter betätigt.

Aufgabe 2: Notieren Sie die Werte für Temperatur und Luftdruck.

Aufgabe 3: Mehrmaliges Messen der Steig- und Fallgeschwindigkeit an einem einzigen Öltröpfchen

Suchen Sie sich ein **langsam steigendes (ca. 8 s pro 10 Skt.)** Tröpfchen aus. Messen Sie seine Fallgeschwindigkeit (ohne elektrisches Feld) und seine Steiggeschwindigkeit (mit elektrischem Feld) jeweils 5 mal und notieren Sie die Werte der einzelnen Messungen (Wege und Zeiten). Aus der Verteilung der insgesamt 10 Messwerte soll später die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung abgeschätzt werden.

Tragen Sie die gemessenen Werte direkt in das Excelarbeitsblatt ein, um zu überprüfen, ob Sie wirklich ein einfach geladenes Teilchen beobachtet haben. Sie müssen ebenfalls ihre eingestellte Spannung, den Luftdruck und die Temperatur dort eintragen. Falls Sie die Fall- und Steigzeiten nicht über 10 sondern beispielsweise über 20 Skalenteile gemessen haben, müssen Sie dies ebenfalls in der Tabelle ändern. Alle anderen Werte werden automatisch für jeden Eintrag berechnet. Das Excelarbeitsblatt finden Sie auf den Computern im Praktikumsraum oder auch auf der Website des Anfängerpraktikums zum Download.

Aufgabe 4: Nehmen Sie insgesamt 60 Messwerte für Steig- und Fallzeiten von verschiedenen Öltröpfchen auf.

Messen Sie nach Möglichkeit bei 5 Tröpfchen jeweils auch 5 Werte für Steig- und Fallzeit. Insgesamt sollen Sie am Ende 60 Steig- und Fallzeiten notiert haben von verschiedenen Öltröpfchen.

Aufgabe 5: Tragen Sie die 4 Werte für jedes gemessene Tröpfchen (Fallweg und Fallzeit, Steigweg und Steigzeit) in die Tabelle des Excel-Programms zur Auswertung ein.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Verifizieren Sie für ein ausgewähltes Tröpfchen die von Excel berechneten Werte, d.h. berechnen Sie für dieses Tröpfchen von Hand v_f , v_s , r_0 , $f(r_0)$ und q unter Berücksichtigung der Einheiten (r_0 ist der mit η_0 berechnete Radius).

Aufgabe 2: Zeichnen Sie (von Hand) ein Histogramm aller gemessenen Ladungen, die im Bereich von 0 As bis ca. 10^{-18} As liegen. Wählen Sie als Intervallgröße 2×10^{-20} As.

Aufgabe 3: Überprüfen Sie, ob der im Excel-Programm benutzte Wert für die obere Grenze der gemessenen Ladung eines einfach geladenen Tröpfchens vernünftig ist. Können Sie sicher sein, dass der im Excel-Programm berechnete Wert **einer** Elementarladung e entspricht (und nicht etwa $2e$ oder $3e$)?

Aufgabe 4: Schätzen Sie den systematischen Fehler $\Delta q/q$ unter Berücksichtigung der oben angegebenen Fehler einiger Eingabegrößen ab. Nehmen Sie für den Fehler der Spannungsmessung 0,5 %, für den Fehler der Viskosität (einschließlich des Korrekturfaktors) 2,0 % und für den Fehler der Öldichte 0,5 % an. Verwenden Sie dazu die folgende Formel und begründen Sie die in der Formel enthaltenen Vorfaktoren 1/2 und 3/2:

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta s}{2s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta \eta}{2\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \quad (8)$$

mit s für die zurückgelegte Strecke beim Fallen bzw. Steigen.

Aufgabe 5: Nehmen Sie an, dass der statistische Fehler im wesentlichen auf den Messfehlern beruht, die Sie bei den Geschwindigkeitsmessungen machen. Schätzen Sie aus der Verteilung der 5 Werte für q , die Sie mit Hilfe von Gleichung (6) aus den Messungen in Aufgabe 3 erhalten haben, den resultierenden Fehler einer Einzelmessung für q ab und vergleichen Sie ihn mit der von Excel bestimmten Standardabweichung einer Einzelmessung.

Aufgabe 6: Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert

Versuch 23 Strom- und Spannungsmessung

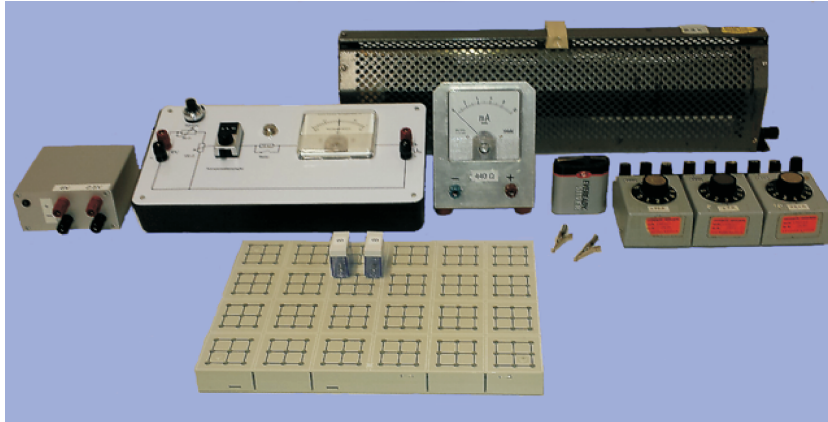


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Strom- und Spannungsmessung.

I Messaufbau

- 6V Netzteil mit zusätzlicher Präzisionsspannungsquelle ($2,5\text{V} \pm 0,02\%$)
- Kompensator. Linearitätsfehler des Kompensationsreglers: $0,25\%$
- Milliamperemeter
- Schiebewiderstand ($100\ \Omega$)
- Drei Dekadenwiderstände
- Batterie
- Taster
- Steckbrett mit zwei Widerständen

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums: <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, Innenwiderstand von Strom- und Spannungsmessinstrumenten, Drehspulinstrument, Kompensationschaltung, Innenwiderstand und Quellenspannung von Spannungsquellen.

Verständnisfragen:

1. Was besagen die Kirchhoffschen Gesetze?
2. Was und wie misst man mit einem Kompensator?
3. Worin besteht der prinzipielle Vorteil eines Kompensators gegenüber einer „normalen“ Spannungsmessung?
4. Welcher Widerstandswert besitzt der Eichregler in Abbildung 5 wenn der Kompensator abgeglichen ist?
5. Wie wird der Messbereich eines Voltmeters bzw. eines Amperemeters erweitert?
6. Wie unterscheiden sich Quellenspannung und Klemmenspannung einer Spannungsquelle? Wie kann die Quellenspannung bestimmt werden?
7. Wie groß ist der maximale (Kurzschluss) Strom, den eine Batterie - kurzzeitig - zur Verfügung stellen kann? Berechnungsbeispiel: Auto-Batterie: $U=12\text{ V}$, Innenwiderstand: $R=0,1\ \Omega$, $I_{max} = ?$

IV Aufgaben

- Erweitern Sie den Messbereich eines Drehspulinstruments auf 5 V.
- Eichen Sie eine Kompensationsschaltung zum Messen von Spannungen.
- Der Messbereich eines Amperemeters ist von 10 mA auf 200 mA zu erweitern.
- Die Klemmenspannung einer Batterie ist als Funktion der Belastung zu messen, um die Quellenspannung und den Innenwiderstand zu bestimmen.
- Zusatzaufgabe für Physiker: Berechnen Sie, für welchen Lastwiderstand aus der Batterie die maximale Leistung $P = UI$ entnommen wird.

V Grundlagen

Ideale Spannungsquellen zeichnen sich dadurch aus, dass die Spannung unabhängig vom entnommenem Strom ist. Die Spannung an den Ausgangsklemmen (Klemmenspannung) entspricht immer der Quellenspannung. Bei realen Spannungsquellen hängt dagegen die Spannung an den Anschlussklemmen vom entnommenen Strom I ab. Mit zunehmendem Strom sinkt die Klemmenspannung U :

$$U = U_q - U(I). \quad (1)$$

Bei linearen Spannungsquellen ist der Spannungsabfall $U(I)$ proportional zum Strom. Solche Spannungsquellen können durch eine Serienschaltung einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_q und einem Widerstand R_{iS} , der als Innenwiderstand der Spannungsquelle bezeichnet wird, dargestellt werden (Abbildung 2). Für die Klemmenspannung gilt dann:

$$U = U_q - R_{iS}I. \quad (2)$$

Wird eine reale Spannungsquelle mit einem Widerstand R_L belastet, so fließt der Strom

$$I = \frac{U_q}{R_{iS} + R_L}. \quad (3)$$

Für die Klemmenspannung, die der Spannung über dem Lastwiderstand entspricht gilt dann:

$$U = R_L I = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L}. \quad (4)$$

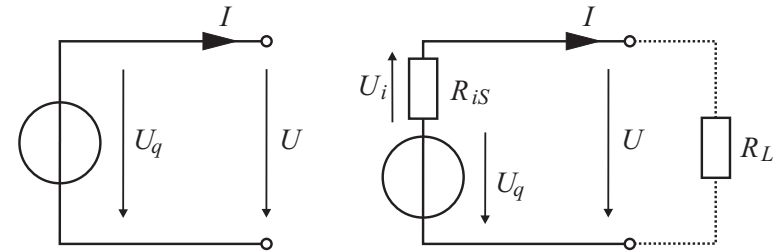


Abbildung 2: Links: Ideale Spannungsquelle. Die Spannung U ist unabhängig vom Strom I und entspricht immer der Quellenspannung U_q . Rechts: Reale Spannungsquellen besitzen einen Innenwiderstand R_{iS} . Fließt ein Strom so fällt am Innenwiderstand die Spannung U_i ab. Die Klemmenspannung $U = U_q - U_i$ hängt somit von der Stromstärke ab.

Nur falls $R_{iS} \ll R_L$ ist kann der Spannungsabfall am Innenwiderstand vernachlässigt werden und die Klemmenspannung entspricht in etwa der Quellenspannung.

Strom- und Spannungsmessung

Ein Drehspulinstrument (Abbildung 3) ist ein Zeigerinstrument dessen Ausschlag proportional zum Strom ist. Eine drehbar gelagerte Spule befindet sich im Feld eines Permanentmagneten. An der Spule ist ein Zeiger und zusätzlich eine Rückstellfeder befestigt. Fließt ein Strom durch die Spule so wirkt aufgrund der Lorentzkraft ein Drehmoment auf die Spule die diese in Drehung versetzt. Die Spule wird soweit ausgelenkt, bis das Drehmoment der Lorentzkraft durch das Drehmoment der Rückstellfeder kompensiert wird. Der Ablenkwinkel α ist proportional zum Strom I und zur Windungszahl n der Drehspule.

$$\alpha \propto nI. \quad (5)$$

Ein Drehspulinstrument ist demnach ein Strommessgerät. Die Messempfindlichkeit eines Instruments ist gegeben durch die Stromstärke bei maximal möglichem Ausschlag. Sollen sehr kleine Ströme gemessen werden, dann muss die Windungszahl n hoch sein und das rückwirkende Drehmoment klein. Im Allgemeinen werden daher Amperemeter für kleine Ströme auf Grund der hohen Windungszahl n hohe Innenwiderstände R_{iA} haben. Bei bekannten Innenwiderstand kann mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes ein Drehspulinstrument auch als Spannungsmessgerät verwendet werden. Strommessgeräte werden immer in Serie zum

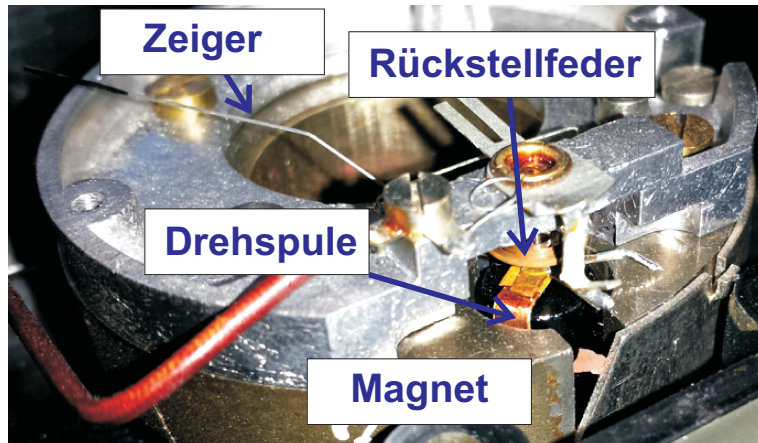


Abbildung 3: Aufbau eines Drehspulinstrument.

Verbraucher R_L geschaltet (Abbildung 4 oben), d.h. der Strom muss durch das Messgerät fließen. Amperemeter dürfen nie parallel zum Messobjekt geschaltet werden! Wegen seines Innenwiderstands beeinflusst ein Amperemeter den Messaufbau. Ohne Amperemeter fließt in der Schaltung 4 oben der Strom

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_{iS}} \tag{6}$$

Wird ein Amperemeter eingebaut, so addiert sich zum Lastwiderstand der Innenwiderstand R_{iA} des Amperemeters hinzu. Der Strom verringert sich auf den Wert

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_{iS} + R_{iA}} \tag{7}$$

Damit diese Abweichung gering ist, muss der Innenwiderstand des Amperemeters möglichst klein sein, bzw. viel kleiner als der Lastwiderstand.

Spannungsmessgeräte werden parallel zum Verbraucher geschaltet (Abbildung 4 unten). Auch hier hat der Innenwiderstand Einfluss auf die Messung. Ohne Messgerät liegt am Verbraucher R_L die Spannung

$$U = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L} \tag{8}$$

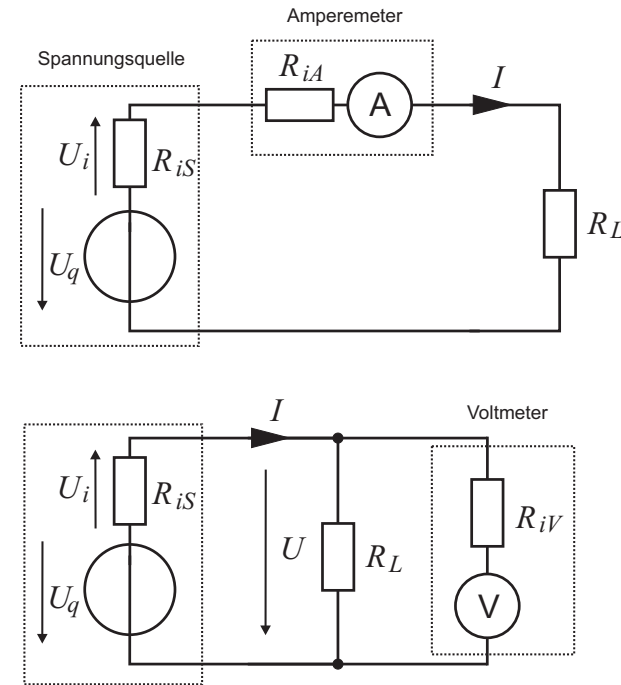


Abbildung 4: Strom - und Spannungsmessung.

an. Wird ein Voltmeter angeschlossen so ist der Lastwiderstand parallel zum Innenwiderstand R_{iV} geschaltet. Die Spannung an R_L beträgt dann

$$U = U_q \frac{R_L}{\frac{R_{iS}R_L}{R_{iV}} + R_{iS} + R_L} \tag{9}$$

Bei einem großen Innenwiderstand $R_{iV} \gg R_{iS}R_L$ ist der erste Term im Nenner klein und somit der Einfluss des Voltmeters gering. Ein Spannungsmessgerät sollte daher einen möglichst großen Innenwiderstand besitzen.

Kompensator

Bei einem Kompensator wird an die zu messende Spannung U_x eine bekannte, einstellbare Spannung U_e gelegt und der Strom zwischen den beiden Spannungsquellen gemessen. Die einstellbare Spannung wird so variiert bis kein Strom mehr

fließt (Abbildung 5 oben). In diesem Fall entspricht die zu messende Spannung der bekannten einstellbaren Spannung. Da bei der Kompensation kein oder nur ein sehr kleiner „Fehlerstrom“ fließt, besitzt ein Kompensator einen sehr großen Innenwiderstand. Der Schaltplan des Kompensators ist in Abbildung 5 unten

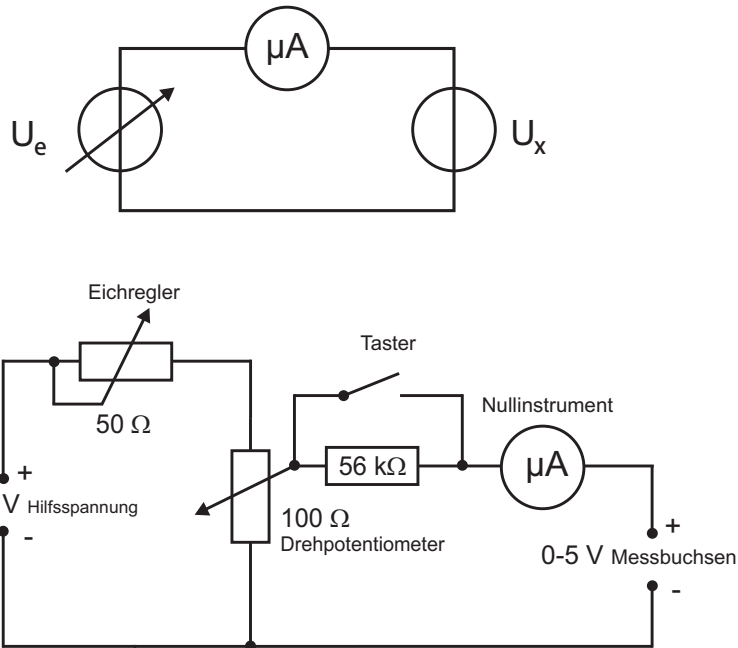


Abbildung 5: Schaltplan des Kompensators.

dargestellt. Die Gegenspannung wird mit einem Drehpotentiometer mit einer digitalen Skala von 0 bis 1000 eingestellt. Diese Skala muss zuvor geeicht werden. Als Eichspannung steht eine präzise Referenzspannung von $2,5 \text{ V} \pm 0,02\%$ zur Verfügung. Der Kompensator soll in einem Bereich von 0 V bis 5 V arbeiten. Das Drehpotentiometer wird auf 500 Skalenteile (entsprechend 2,5 V) eingestellt und die 2,5 V Referenzspannung angeschlossen. Mit einem weiteren Potentiometer, dem Eichregler, wird der Kompensator abgeglichen bis kein Strom mehr fließt. Damit ist der Kompensator geeicht und die Spannung kann direkt am Skalentrieb abgelesen werden.

Der Widerstand direkt in Reihe mit dem Mikroamperemeter sorgt dafür, dass

der dann fließende Strom dieses nicht überlastet. Ist die Referenzspannung so eingestellt, dass Sie ungefähr der zu messenden Spannung entspricht, kann dieser Widerstand mit einem Taster überbrückt werden. Dadurch erhöht sich die „Messauflösung“ und die Referenzspannung kann deutlich genauer auf die zu messende Spannung eingestellt werden.

Messbereichserweiterung

Übersteigt eine zu messende Größe den Messbereich eines Instruments, so muss der Bereich mit Hilfe von Widerständen erweitert werden. Bei Strommessgeräten wird ein Widerstand R_p parallel zum Instrument geschaltet, bei Spannungsmessgeräten in Serie (Abbildung 6). Sei I_0 der Maximalbereich eines Amperemeters

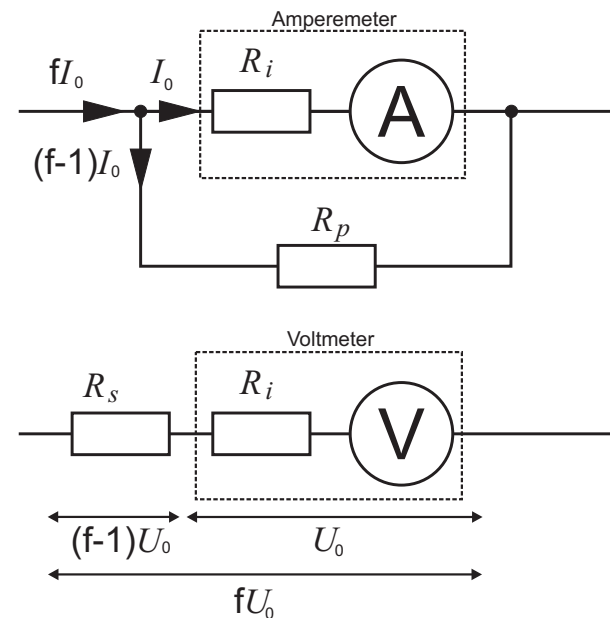


Abbildung 6: Messbereichserweiterung eines Amperemeters (oben) und eines Voltmeters (unten).

mit dem Innenwiderstand R_i . Soll der Bereich um einen Faktor f erweitert werden, muss durch den Parallelwiderstand der Strom $(f - 1)I_0$ fließen. Da an

beiden Widerständen die gleiche Spannung liegt gilt:

$$U_{R_i} = U_{R_p} \rightarrow R_i I_0 = R_p (f - 1) I_0 \rightarrow R_p = \frac{R_i}{f - 1}. \quad (10)$$

Soll bei einem Amperemeter der Messbereich um den Faktor f erweitert werden, so muss der Parallelwiderstand den Wert $R_i/(f - 1)$ besitzen. Bei einem Voltmeter mit dem Messbereich U_0 muss am Serienwiderstand die Spannung $(f - 1)U_0$ und am Innenwiderstand die Spannung U_0 anliegen. Da die Ströme durch beide Widerstände gleich groß sind, folgt:

$$I_{R_i} = I_{R_s} \rightarrow U_0/R_i = (f - 1)U_0/R_s \rightarrow R_s = R_i(f - 1). \quad (11)$$

Soll bei einem Voltmeter der Messbereich um den Faktor f erweitert werden, so muss der Serienwiderstand den Wert $R_i(f - 1)$ besitzen.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Abgleich des Kompensators

Schließen Sie die 6 V Hilfsspannung zum Betrieb des Kompensators an die linken Buchsen an. Die Eichspannung von 2,5 V wird an das rechte Buchsenpaar angeschlossen. Beachten Sie die Polung! Die roten Buchsen sind immer mit dem Pluspol zu verbinden, die schwarzen mit dem Minuspol. Die Genauigkeit der Eichspannung beträgt 0,02%.

Stellen Sie den Kompensationsregler auf 500 Skt. Durch Drehen am Eichregler und Drücken des Tasters wird der Kompensator bei größtmöglicher Auflösung auf Null abgeglichen. Nach erfolgreichem Abgleich darf der Eichregler nicht mehr verstellt werden, da der Abgleich dadurch sofort ungültig würde. Am besten Sie verriegeln den Drehknopf mit dem seitlichen Hebel. Nach dem Abgleich entsprechen 1000 Skt. am Kompensationsregler genau 5 Volt an den Messbuchsen, 800 Skt. entsprechen genau 4 Volt usw. Der Linearitätsfehler des Kompensationsreglers beträgt 0,25%.

Aufgabe 2: Spannungsmessungen mit verschiedenen Messgeräten

Betreiben Sie das Drehspulinstrument als Voltmeter und erweitern Sie den Messbereich so, dass der Vollausschlag bei einer angelegten Spannung von 5 V erfolgt. Benutzen Sie zur Messbereichserweiterung den einstellbaren Dekadenwiderstand. Die Verschaltung und die Toleranzen dieses einstellbaren Widerstandes ist auf der Rückseite eingezeichnet.

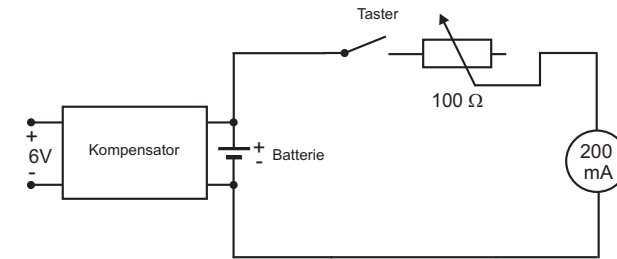


Abbildung 7: Schaltung zu Aufgabe 3.

Der Innenwiderstand ist auf dem Messgerät angegeben (Genauigkeit 1%). Notieren Sie den Gesamtwiderstand des Messgerätes (Innenwiderstand plus den verwendeten Serienwiderstand).

Bauen Sie auf dem Steckbrett und den beiden Steckwiderständen einen Spannungsteiler auf. Die Widerstände sind mit Buchstaben beschriftet. Achten Sie darauf, dass diese bei beiden Widerständen gleich sind. Messen Sie mit dem Drehspulinstrument einmal die Batteriespannung U_0 und die Spannung über jedem der beiden Widerstände U_{R_1} und U_{R_2} . Notieren Sie die gemessenen Werte. Was fällt Ihnen auf? Wiederholen Sie die Messung mit dem Kompensator.

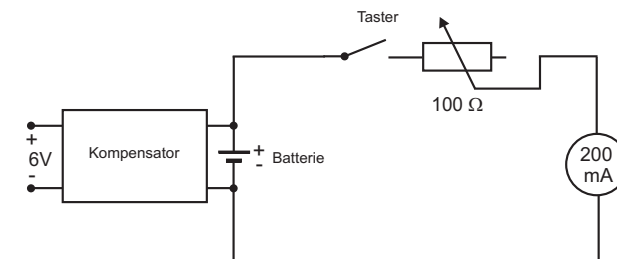


Abbildung 8: Schaltung zu Aufgabe 3.

Aufgabe 3: Messen des Innenwiderstands einer Batterie

Für diese Aufgabe wird das Drehspulinstrument als Amperemeter betrieben. Erweitern Sie dessen Messbereich von 10 mA auf 200 mA. Mit dem erweiterten Milliamperemeter und dem Kompensator wird in der angezeichneten Anordnung die Klemmenspannung der Batterie bei Belastung aufgenommen. Der Batterie wird ein Strom I entnommen und gleichzeitig die Klemmenspannung mit dem

Kompensator gemessen. Mit dem Schiebewiderstand wird eine Stromstärke von ca. 0 bis 200 mA eingestellt (Wählen Sie neun Messpunkte in diesem Bereich aus). Um die Batterie zu schonen, wird die Morsetaste zur Messung immer nur kurz (während des Abgleichs des Kompensators) gedrückt. Zeichnen Sie Ihre Messpunkte direkt in ein Diagramm $U = U(I)$ ein. Welchen Verlauf erwarten Sie?

VII Auswertung

Aufgabe 1: Warum entspricht bei der Messung mit dem Drehspulinstrument, die Summe der Teilspannungen über den Widerständen U_R nicht der Batteriespannung U_0 (Maschenregel)? Berechnen Sie ohne Berücksichtigung der Messfehler den Wert der Widerstände des Spannungsteilers. Beide Widerstände sind gleich groß. Wie gut stimmt die Maschenregel bei der Messung mit dem Kompensator?

Aufgabe 2: Bestimmen Sie aus dem Diagramm R_i und die Quellenspannung der Batterie. Diskutieren Sie Ihre Messungen unter Berücksichtigung der Messfehler.

Versuch 26 Schallgeschwindigkeit

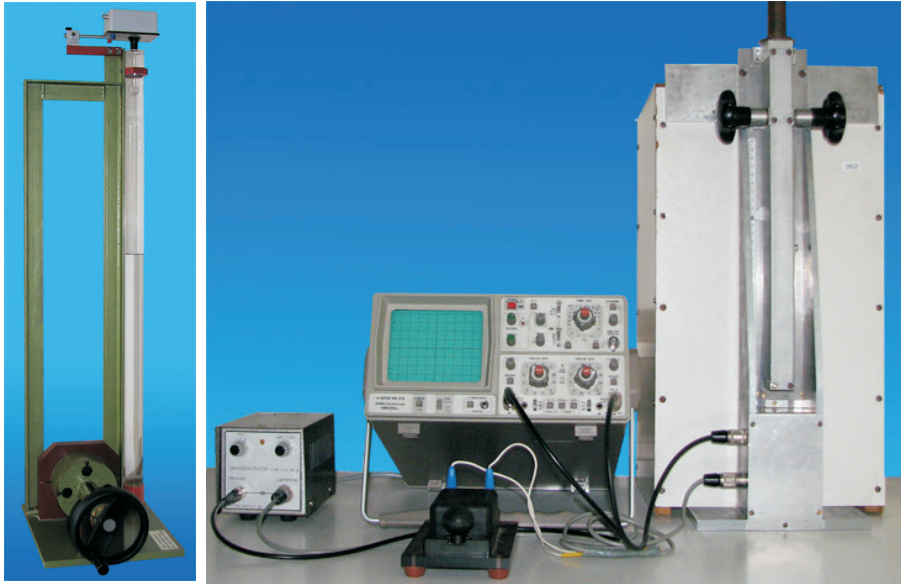


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

Versuchsaufbau I

- Steigrohr mit Stethoskop
- Ausgleichsgefäß für Wasser
- Lautsprecher mit Sinusgenerator
- Gasflasche mit Kohlendioxid, Reduzierventil, Druckastventil und Zuführungsschläuchen für das Gas; Streichhölzer zur Kontrolle

Versuchsaufbau II

- Oszillograph HM 203
- Sinusgenerator mit den Frequenzen 2 kHz, 5 kHz, 10 kHz
- Kasten mit Schalldämmung, darin eingebaut: Lautsprecher und ein verschiebbares Mikrofon

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen über Wellen (transversale und longitudinale Wellen, stehende und fortschreitende Wellen, Reflexion von Wellen, Schallausbreitung, Quincke'sches Rohr. Desweiteren sind Grundkenntnisse in der Bedienung und dem Funktionsprinzip eines Oszilloskops notwendig. Informationen diesbezüglich entnehmen Sie der Versuchsbeschreibung: *Versuch 25, Oszilloskop*, und der angegebenen Literatur.

Verständnisfragen:

1. Was ist Schall? Beschreiben Sie den physikalischen Charakter einer Schallwelle. Warum kann es in Flüssigkeiten und Gasen keine Transversalwellen geben (höchstens an Grenzflächen)? Welchen Frequenzbereich kann der Mensch hören? Was ist die Größenordnung der Wellenlängen?
2. Welche Parameter eines Materials bestimmen die Schallgeschwindigkeit?
3. Warum ist die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten oder Festkörpern größer als in Gasen?
4. Zur Schallgeschwindigkeit in Gasen: Hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit etwas mit der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung der Gasatome/Gasmoleküle zu tun?

5. Was ist eine stehende Welle und wie kann man sie erzeugen?
6. Wie hängen Wellenbauch-Wellenknoten und Druckbauch-Druckknoten zusammen? Welche Situation liegt also im Resonanzfall am geschlossenen/offenen Ende vor?
7. Eine andere Möglichkeit die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen, ist die Messung der Wellenlänge einer fortlaufenden Schallwelle mittels der Phasenverschiebung zwischen Lautsprecher und Mikrofon. Wieso genügt es hier nicht, allein das Signal des Mikrofons zu beobachten?
8. Wieso kann ich jemanden hinter einem (großen) Baum hören aber nicht sehen? Welche Materialien eignen sich gut für die Schallabsorption (vergleiche Tonstudio)?

IV Aufgabe

- Die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Kohlendioxid ist durch Beobachtung stehender Wellen im Quincke'schen Rohr zu bestimmen.
- Die Änderung der Laufzeit einer Schallwelle zwischen dem Lautsprecher und dem Mikrofon wird in Abhängigkeit des Abstandes Mikrofon-Lautsprecher gemessen; diese Messung wird nur für Luft durchgeführt.

V Grundlagen

Die Schallgeschwindigkeit in Gasen kann mit Hilfe stehender Wellen gemessen werden. Dazu benötigt man einen Schallgeber (Lautsprecher) und ein Rohr, an dessen Ende sich ein Reflektor (Wasser) befindet (Quincke'sches Rohr). Die vom Lautsprecher ausgehende Schallwelle trifft auf die Wasseroberfläche und wird an dieser reflektiert. Die reflektierte Welle interferiert mit der einfallenden, so dass es zur Ausbildung einer stehenden Welle kommen kann.

Berücksichtigt man, dass die schwingende Luftsäule am Ort des Schallgebers einen Wellenbauch und am Reflektor einen Wellenknoten aufweist, so gilt im Fall der Resonanz für den Abstand h der Luftsäule (Abstand zwischen Sender und Empfänger):

$$h = \frac{2n+1}{4}\lambda, \quad (1)$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$ gilt und λ die Wellenlänge bezeichnet. Die Schallgeschwindigkeit c ist mit λ und der Frequenz ν durch $c = \nu\lambda$ verknüpft. Überlegen Sie sich, dass nur im Resonanzfall die Tonintensität einen erheblichen Wert erreicht und dass nicht etwa beim Heben des Wasserspiegels, Maxima und Minima an der oberen Rohröffnung vorbeiwandern. Die Schärfe der Resonanz hängt von der Dämpfung des Resonators ab (siehe Versuch 13). Durch Variierung der Resonatorlänge h kann so ein ein Lautstärkemaximum eingestellt werden und damit indirekt über die Wellenlänge λ die Schallgeschwindigkeit c bestimmt werden.

Eine weitere Möglichkeit die Schallgeschwindigkeit in Gasen zu bestimmen ist die Laufzeitmessung einer fortschreitenden Schallwelle. Bei diesem Experiment befindet sich ein Mikrofon in einem einstellbarem Abstand von einem Lautsprecher entfernt. Als Signalquelle für den Lautsprecher wird ein Sinusgenerator verwendet. Das Signal des Sinusgenerators wird gleichzeitig an den Lautsprecher und an ein Oszilloskop angeschlossen. Die Signalfuhr zum Lautsprecher kann durch einen Taster unterbrochen werden. Der Lautsprecher konvertiert das Signal des Sinusgenerators in eine Schallwelle gleicher Frequenz, die sich mit der zu bestimmenden Schallgeschwindigkeit c ausbreitet. Nach Durchlaufen einer einstellbaren Strecke h gelangt die Schallwelle zu einem Mikrofon, wird hier in ein proportionales elektrisches Signal umgewandelt und am zweiten Kanal des Oszilloskops dargestellt. Auf dem Oszilloskop werden nun zwei Signale dargestellt. Kanal 1 zeigt das Signal des Sinusgenerators, das direkt den Lautsprecher ansteuert, Kanal 2 zeigt das um die Schallgeschwindigkeit zeitverzögerte Signal

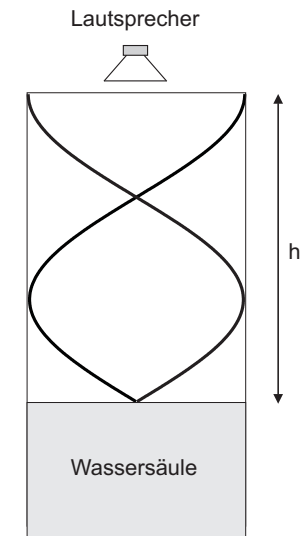


Abbildung 2: *Stehende Welle im Quincke'schen Rohr.*

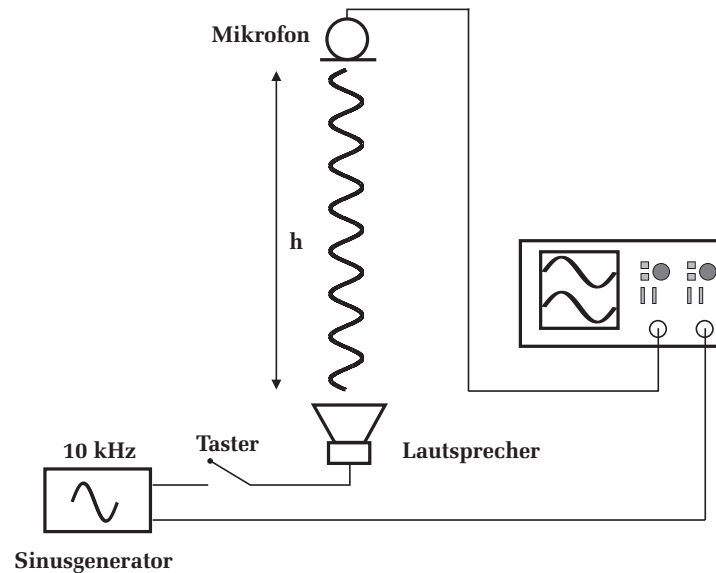


Abbildung 3: Skizze zum Versuchsaufbau II.

des Mikrofons. Um nun die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen, misst man die Phasenverschiebung der Signale. Das vom Sinusgenerator in das Oszilloskop direkt eingespeiste Signal wird nahezu ohne Zeitverzögerung dargestellt. Dagegen benötigt das Signal, das vom Lautsprecher zum Mikrofon läuft, die Zeit

$$\tau = h/c. \quad (2)$$

Hieraus kann durch Messung der Laufzeit der Schallwelle zwischen Lautsprecher und Mikrofon und durch Messung der Laufstrecke h die Schallgeschwindigkeit mit Hilfe eines Oszilloskops bestimmt werden.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft und CO_2 mit dem Quincke'schen Rohr

Das Quincke'sche Rohr ist zunächst mit Luft gefüllt. Stellen Sie am Sinusgenerator eine Frequenz zwischen 2 kHz bis 2,5 kHz ein. Die Lautstärke kann sehr gering eingestellt werden. Durch Heben und Senken des Wasserspiegels wird die effektive Länge des Rohres variiert. Bei bestimmten Höhen wird die Resonanzbedingung erfüllt. In diesem Fall ist ein deutlicher Ton zu hören (Lautstärkemaxima). Zur Vermeidung psychologischer Nachwirkungen beim Einstellen blickt derjenige, der die Resonanz aufsucht, nicht auf die Skala; die Ablesung erfolgt durch den Partner. Suchen Sie die Positionen der Lautstärkemaxima auf. Finden Sie mindestens zehn Lautstärkemaxima. Nach der Messung führt der Praktikumpartner diese erneut durch. Notieren Sie sich die eingestellte Frequenz.

Messen Sie die Schallgeschwindigkeit in CO_2 : Lösen Sie die Rändelschraube an der Stativstange des Lautsprechers und schwenken Sie den Lautsprecher zur Seite, so dass die Rohröffnung gut zugänglich ist. Drehen Sie den Flüssigkeitsspiegel ganz nach unten und platzieren Sie den CO_2 Einfüllschlauch etwas über der Wasseroberfläche, so dass das spezifisch schwerere CO_2 die Luft aus dem Rohr von unten nach oben verdrängen kann. Durch Betätigung des Druckastentventil wird die Röhre mit CO_2 befüllt. Es ist wichtig, dass die gesamte Röhre nur mit CO_2 gefüllt ist und kein Luftanteil mehr vorhanden ist. Als Probe können Sie ein brennendes Streichholz verwenden, das bei vollständiger Befüllung mit CO_2 sofort erlischt. Schwenken Sie den Lautsprecher wieder über das Rohr und fixieren Sie diesen mit der Rändelschraube. Falls Sie während der Messung den Wasserspiegel absenken, so müssen Sie die dadurch angesaugte Luft durch erneutes Nachströmenlassen von Gas verdrängen.

Die Bestimmung der Resonanzstellen der schwingenden CO_2 -Säule erfolgt wie bei der Messung in Luft. Notieren Sie sich zur Umrechnung der gemessenen Schallgeschwindigkeiten auf Normalbedingungen die Raumtemperatur! Nach Versuchsende das Hauptventil schließen und den Wasserspiegel wieder ganz nach unten absenken!

Aufgabe 2: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch eine Laufzeitmessung

- a Zur Bedienung des Oszilloskops: Die Messung wird mit einer Frequenz von

10 kHz durchgeführt. Die vom Frequenzgenerator erzeugte Wechselspannung wird auf den Lautsprecher und auf Kanal 1 des Oszilloskops (Trig. Ausg.-Buchse am Frequenzgenerator) gegeben.

Ein Mikrofon empfängt die Schallwelle und wandelt sie in eine Wechselspannung von 10 kHz um, die auf den y-Eingang des Kanal 2 des Oszilloskops angeschlossen wird.

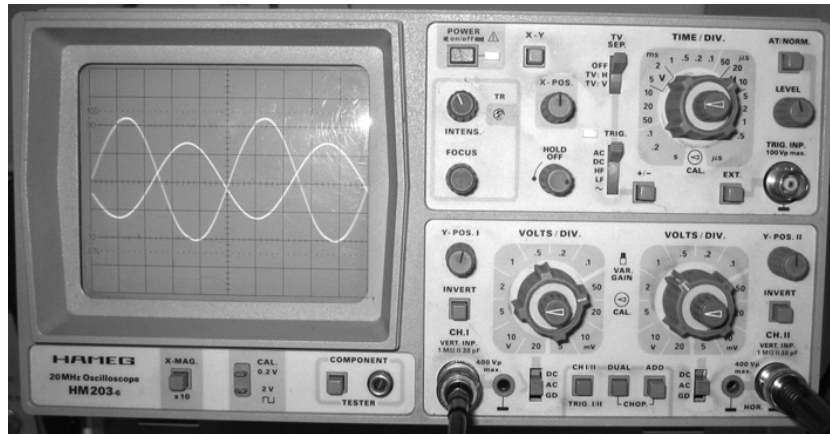


Abbildung 4: Oszilloskop zur Messung der Phasenverschiebung.

Überprüfen Sie, ob der innere rote Drehknopf des TIME / DIV.-Einstellreglers in der Stellung CAL. steht, d.h der Pfeil nach links bzw. rechts je nach Typ des Oszilloskops zeigt. Nur dann sind die Zeitangaben am Einstellknopf kalibriert (Abbildung 4).

Beim Drücken der Taster sollten auf dem Oszilloskop zwei Sinussignale sichtbar sein. Stellen Sie mit Hilfe des Spannungsbereichsschalters und der Ablenkgeschwindigkeit das Bild der Sinusspannung in der gewünschten Größe ein und legen Sie einen markanten Signalpunkt (z.B. Nulldurchgang) auf irgendeinen Rasterpunkt des Oszillographenschirmes. Vergrößert man den Abstand zwischen Mikrofon und Lautsprecher, so wandert das Signal auf dem Oszilloskop nach rechts: die Phase der am Mikrofon einlaufenden Welle verschiebt sich gegenüber der Phase der am Kanal 1 anliegenden Sinusspannung. Entspricht die Abstandsänderung gerade einer Wellenlänge, so ist das Signal auf dem Schirm entsprechend der um $\tau = \lambda/c$ vergrößerten

Laufzeit um eine Periode verschoben (Phasenverschiebung 360°). Bestimmen Sie zweimal alle Abstände zwischen Mikrofon und Lautsprecher, bei denen das Oszilloskopbild um jeweils eine Periode weitergewandert ist.

- b Bestimmen Sie aus der eingestellten x-Ablenkgeschwindigkeit durch Ablesen der Periodenlänge die Frequenz ν des Frequenzgenerators.

Zusatzaufgabe: Falls Sie die Phase genauer messen möchten, lesen Sie die Bemerkung im Anhang.

Aufgabe 3: Beobachten Sie zum Schluss das Spektrum Ihrer Stimme auf dem Oszilloskop. Dazu Deckel des Kastens öffnen.

Aufgabe 5: Der Sinusgenerator liefert auch Signale mit einer Frequenz von 2 kHz und 5 kHz. Überzeugen Sie sich durch eine qualitative Messung, dass die Schallgeschwindigkeit nicht von der Frequenz abhängt.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Aus den gemessenen Höhen der Luftsäule im Resonanzfall (Mittelwert bilden) ist die Schallgeschwindigkeit in Luft bzw. Kohlendioxid zu bestimmen; dabei benutzen Sie nur die Höhendifferenzen. Die Schallgeschwindigkeit in Gasen ist durch die folgende Formel wiedergegeben:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \quad (3)$$

wobei κ den Adiabatenkoeffizienten (für Luft $\kappa=1,40$, für CO_2 $\kappa = 1,30$), R die allgemeine Gaskonstante, T die Temperatur des Gases in Kelvin und M die Molekülmasse (Luft: $M=29$ g/mol, CO_2 : $M=44$ g/mol) bezeichnen.

Zur Umrechnung der gemessenen Schallgeschwindigkeit auf Normalbedingungen benutzen Sie die Gleichung:

$$\frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}. \quad (4)$$

Benutzen Sie diese Formel, um die bei Zimmertemperatur gemessenen Werte auf 0°C umzurechnen. Vergleichen Sie weiterhin das Verhältnis der gemessenen Schallgeschwindigkeiten $c_{\text{Luft}}/c_{\text{CO}_2}$ für die beiden Gase mit dem entsprechenden Wert den Sie aus Gleichung (3) gewinnen.

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Mittelwert von λ und dessen Fehler. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit gemäß

$$c = \nu\lambda \quad (5)$$

verwenden Sie den sehr viel genaueren Wert von 10 kHz, der am NF-Generator fest eingestellt werden kann. Auch hier ist c wieder auf Normalbedingungen umzurechnen.

VIII Anhang

Beim Aufsuchen der Abstände an denen die Phase gerade um 360° verschoben ist, d.h. das Schirmbild wieder gleich aussieht, werden Sie festgestellt haben, dass dies nicht sehr genau durchzuführen ist. Bei einer Ablenkung von $30 \mu\text{s}/\text{cm}$ ist der Abstand zwischen zwei Nulldurchgängen (d.h. 180°) ca. 17 mm. Ein Ablesefehler von 1 mm entspricht in diesem Fall einem Phasenfehler von $\pm 10^\circ$. Falls man wie hier die Phase zweier Sinussignal gleicher Frequenz vergleichen will, gibt es ein empfindlicheres Verfahren: Man gibt das eine Signal auf die Y-Ablenkplatten und das andere anstelle des Sägezahns auf die X-Ablenkplatten. Dazu müssen Sie das Oszilloskop durch Drücken der Taste X - Y in den XY-Modus schalten. Auf dem Schirm entsteht eine sogenannte Lissajous-Figur. Die vertikale und horizontale Größe der Ellipse können Sie mit den beiden Y-Reglern einstellen.

Gehen wir zunächst zur Vereinfachung davon aus, dass die beiden Amplituden gleich groß sind, so hat der Leuchtpunkt in jedem Augenblick die Koordinaten

$$x = a \sin(\omega t) \quad (6)$$

$$y = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

wobei α den Phasenwinkel zwischen den beiden Signalen beschreibt. Die Figur ist in einem Quadrat der Seitenlänge $2a$ eingeschlossen (Abbildung 5).

Einige Spezialfälle:

$\alpha = 0^\circ, y = x$: der Strahl läuft auf einer Diagonalen des Quadrates hin und her.

$\alpha = 180^\circ, y = -x$: der Strahl läuft auf der orthogonal entgegengesetzten Diagonalen.

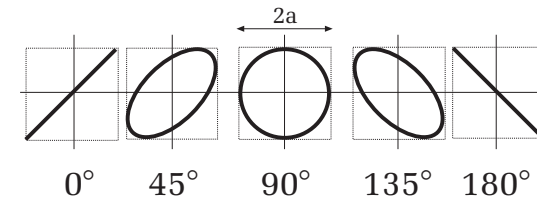


Abbildung 5: Lissajous-Figuren bei unterschiedlichen Phasenwinkeln.

$\alpha = 90^\circ(-90^\circ), y = x$: der Strahl beschreibt eine rechts- oder linkslaufende Kreisbahn.

Im allgemeinen Fall handelt es sich um in einem Quadrat einbeschriebene Ellipsen, deren Hauptachsen in Richtung der Diagonalen liegen. Für $2a=4 \text{ cm}$ und $\alpha=10^\circ$ ergibt sich für die kleine Hauptachse $0,3 \text{ cm}$, d.h. die Ellipse ist ca. $0,5 \text{ cm}$ breit, was man bequem von einem Strich unterscheiden kann! Ist die X-Amplitude nicht gleich der Y-Amplitude, so muss man an Stelle des Quadrates ein Rechteck annehmen.

Versuch 31 Optische Abbildung

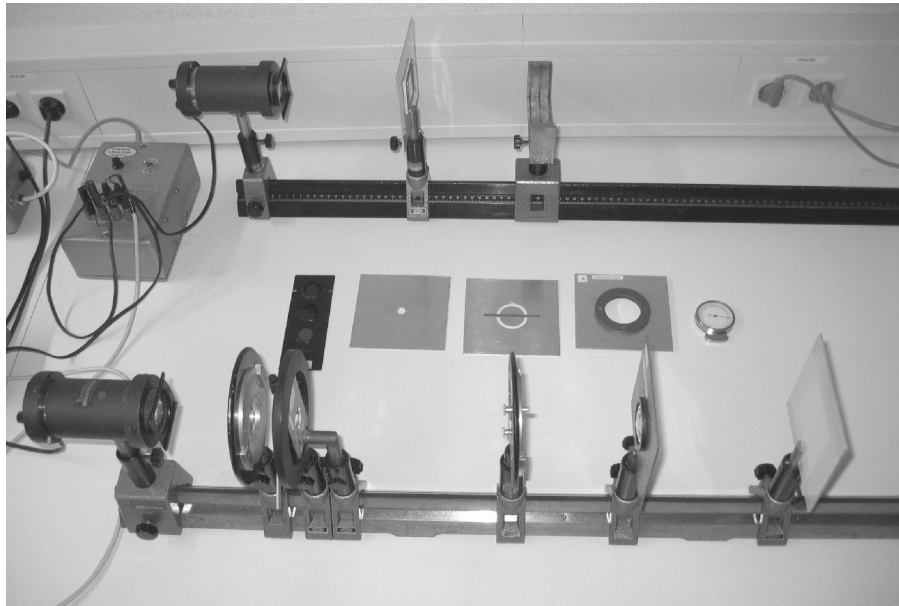


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Optische Abbildung.

I Messaufbau

- Optische Schiene.
- Lampe mit Kondensator und verschiebbaren Farbfiltern.
- 2 bikonvex Linsen, 1 Achromat- Linse.
- Loch- und Ringblende.
- Fassung zur Aufnahme der Linsen und Blenden.
- Schirm.
- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter.

- verstellbarer Messspalt (Spaltbreite ist in mm geeicht).
- Zwischenbild mit mm-Einteilung.

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer,
- W. Demtröder *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, Springer- Verlag.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Abbildung durch Linsen, Linsenfehler (speziell sphärische und chromatische Aberration), Snelliussches Brechungsgesetz, Dispersion, graphische Konstruktion der optischen Abbildung, Mikroskop: Strahlengang und Auflösungsvermögen, Beugung am Spalt, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung.

Verständnisfragen:

1. Konstruieren Sie die Abbildung eines Objekts durch eine Sammellinse und eine Streulinse.
2. Was ist der Unterschied zwischen den Begriffen Abbildungsmaßstab und Vergrößerung?
3. Was ist die physikalische Ursache für die chromatische- und sphärische Aberration?
4. Wie funktioniert die Entspiegelung einer Linse?
5. Wie groß ist das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges? Wodurch wird es limitiert? Wie können kleinere Gegenstände betrachtet werden?
6. Aus welchen optischen Elementen besteht ein Mikroskop?

7. Was ist die Aufgabe des Objektivs, was die Aufgabe des Okulars? Was ist das Messprinzip des Mikroskops?
8. Wie ist die Auflösung definiert?
9. Welche Vergrößerung kann man mit einem professionellen Mikroskop erreichen?
10. Auf einem Mikroskopobjektiv sind folgende Werte abgedruckt: Vergrößerung=40, Tubuslänge=160, NA=0,65. Wie groß ist die Brennweite des Objektivs und wie hoch ist das Auflösungsvermögen wenn mit grünem Licht beleuchtet wird?
11. Qualitativ: Was ist ein Elektronenmikroskop und warum erreicht man damit eine so viel höhere Auflösung als mit einem optischen Mikroskop?

Spiegel nach dem Reflexionsgesetz in den unteren Halbraum divergent reflektiert. Dadurch scheinen für einen Beobachter alle Lichtbündel aus einem Punkt hinter dem Spiegel zu kommen, obwohl die reflektierten Lichtbündel diesen Bildpunkt überhaupt nicht erreichen. Das Spiegelbild wird daher auch als virtuelles Bild bezeichnet. Allgemein entsteht ein virtuelles Bild im Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung divergenter Lichtbündel. Solche Bilder lassen sich nicht mit einem Schirm (Mattscheibe) auffangen.

Im Gegensatz zum Planspiegel erzeugt ein sphärischer Spiegel ein reelles Bild. Das Abbildungsprinzip beruht auch hier allein auf dem Reflexionsgesetz. Allerdings bedingt die Krümmung der Spiegeloberfläche, dass die Lichtbündel nicht divergieren sondern sich im Bildpunkt schneiden. Allgemein entsteht ein reelles Bild im Schnittpunkt von Lichtbündeln, die vom gleichen Objektpunkt ausgehen. Das reelle Bild lässt sich mit einem Schirm auffangen.

IV Aufgabe

- Durch variieren der Bild- und Gegenstandsweite sollen die Eigenschaften der optischen Abbildung untersucht werden (Abbildungsmaßstab, virtuelles und reelles Bild, etc.)
- Es ist die Brennweite einer Sammellinse zu messen. Die chromatische Aberration ist experimentell zu untersuchen und der Einfluss der sphärischen Aberration ist qualitativ zu beobachten.
- Bauen Sie ein Mikroskop auf einer optischen Bank auf. Messen Sie a) die Gitterkonstanten der beiden Strichgitter, b) das Auflösungsvermögen des Objektivs in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Objektivs (quantitativ) und der Wellenlänge (qualitativ).

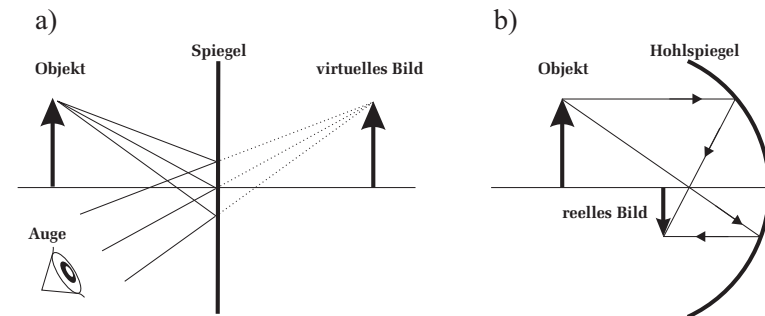


Abbildung 2: a) Virtuelles Bild eines Planspiegels. b) Reelles Bild eines Hohlspiegels.

V Grundlagen

V.1 Reele und virtuelle Bilder

Bei einer optischen Abbildung werden die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel nach Durchgang durch ein optisches System (Linsen, Spiegel, Auge, „Lochkamera“) in einem Punkt, dem Bildpunkt, wieder vereinigt. Ein einfaches Beispiel für ein abbildendes optisches System ist der Planspiegel (Abbildung 2). Die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel werden am

Brechung an sphärischen Flächen

Treffen **parallel** zur optischen Achse verlaufende Lichtbündel auf eine transparente, kugelförmige Fläche, die das Medium 2 begrenzt, so werden alle Lichtbündel in einem Punkt auf der optischen Achse gebrochen (Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser Teilbündel wird als Brennpunkt F bezeichnet. Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Kugeloberfläche entlang der optischen Achse, heißt Brennweite f . Mit Hilfe einfacher geometrischen Überlegungen und unter Berücksichtigung des Brechungsgesetz folgt für die

Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \frac{1}{r}, \quad (1)$$

wobei n_i die Brechungsindizes der beiden Medien darstellen und r der Radius der Kugelkrümmung ist. Diese Gleichung gilt allerdings nur für kleine Einfallswinkel bzw. nur für Lichtbündel, die in einem geringen Abstand h zur optischen Achse auf die Linse treffen. In der Literatur wird diese Näherung auch als paraxiale oder als Gaußsche Näherung bezeichnet. Bereits mit einer einzigen sphärischen

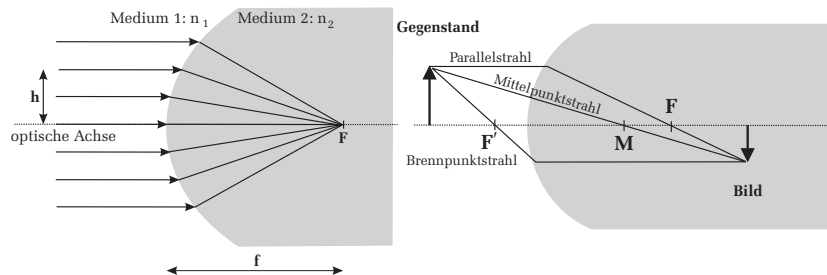


Abbildung 3: Links: Brechung von parallelen Lichtbündeln an einer sphärischen Fläche. Rechts: Abbildung eines Gegenstandes durch ein Kugelsegment.

Grenzfläche lässt sich ein Gegenstand abbilden (Abbildung 3 rechts). Um das Bild des Gegenstandes geometrisch zu konstruieren, bedarf es lediglich zweier Strahlenbündel¹, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen. Besonders einfach ist die Bildkonstruktion, wenn man spezielle Lichtbündel einzeichnet, nämlich einen der gegenstandsseitig parallel zur optischen Achse verläuft und einen der durch den Mittelpunkt M der Kugeloberfläche geht. Mittelpunktstrahlen fallen senkrecht auf die Kugeloberfläche und werden daher nicht gebrochen. Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie zu Brennpunktstrahlen werden (siehe Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entspricht dem abgebildeten Bildpunkt. Zur Konsistenzprüfung kann zusätzlich noch ein dritter Strahl eingezeichnet werden: Aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges folgt, dass ein Strahl, der im Medium 2 parallel zur optischen Achse läuft, im Medium 1 die optische Achse im gegenstandsseitigen Brennpunkt F' schneidet. Von der Gegenstandsseite aus gesehen bedeutet dies, dass ein Brennpunktstrahl zu einem bildseitigen Parallelstrahl wird.

¹Der Begriff Strahlenbündel und Strahl wird in diesem Text synonym verwendet.

Zusammenfassend sind bei der geometrischen Abbildung eines Gegenstandspunktes, folgende drei Regeln zu beachten:

1. Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt
2. Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen
3. Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen

V.2 Linsen

Linsen, speziell sphärische Linsen, bestehen aus einem transparenten Material mit dem Brechungsindex n und sind durch eine kugelförmige Fläche begrenzt. Trifft ein Lichtbündel auf die Linse ist zu berücksichtigen, dass der Strahl insgesamt zweimal an den Grenzflächen mit den Radien r_1, r_2 gebrochen wird. Für dünne Linsen, bei denen die Dicke klein gegenüber der Krümmungsradien ist, ergibt sich für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

Die Brennweite hängt also nur vom Brechungsindex und von den Radien der Grenzflächen ab. Je nach Vorzeichen und Kombination der Grenzflächen definiert man verschiedene Linsentypen. Eine Zusammenfassung kann Abbildung 4 entnommen werden. Bei der geometrischen Konstruktion der Abbildung durch eine dünne Linse, gelten die gleichen Merksätze wie bei der Brechung an einer einzelnen sphärischen Fläche: **Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt, gegenstandsseitige Parallelstrahlen werden zu bildseitigen Brennpunktstrahlen und gegenstandsseitige Brennpunktstrahlen werden zu bildseitigen Parallelstrahlen.** Die Brechung erfolgt dabei an der Mittelebene der Linse (Abbildung 5). Es soll nochmals betont werden, dass dies nur für dünne Linsen gilt. Im allgemeinen Fall hat eine Linse zwei sogenannte Hauptebenen, an denen die Brechungen erfolgen. Nur für dünne Linsen fallen diese Hauptebenen zusammen. Bei der optischen Abbildung mit einer Linse sind die Größen Bildweite b , Gegenstandsweite g und Brennweite f durch die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (3)$$

miteinander verknüpft. Bildweite und Gegenstandsweite stehen im direkten Zusammenhang mit der Gegenstandsgröße G und der Bildgröße B . Man definiert

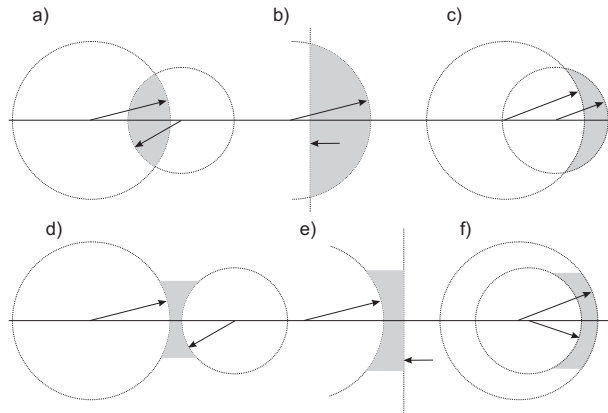


Abbildung 4: *Klassifizierung von Linsen: a) bikonvex b) plankonvex c) positiver Meniskus d) bikonkav e) plankonkav f) negativer Meniskus.*

den Abbildungsmaßstab β durch:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \tag{4}$$

der sich mit Gleichung (3) schreiben lässt als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{b}{f} - 1. \tag{5}$$

V.3 Messung der Brennweite einer Linse

Die Bestimmung der Brennweite einer Linse kann prinzipiell durch Messung der Gegenstands- und Bildweite unter Anwendung der Abbildungsgleichung (3) erfolgen. Allerdings ist diese Methode in der Regel mit größeren Fehlern behaftet, da die Abstände absolut gemessen werden. Dies setzt voraus, dass die Linse gut zentriert in die Fassung montiert sein muss. Für reale, „dicke“ Linsen kommt hinzu, dass sich die Abstände g und b nicht auf die Mittelebene sondern auf die Hauptebenen beziehen, deren genaue Lage im allgemeinen unbekannt ist. Diese Nachteile treten bei der sogenannten *Bessel-Methode* nicht auf. Bei diesem Verfahren (Abbildung 6) wird ausgenutzt, dass es bei einem konstanten Abstand

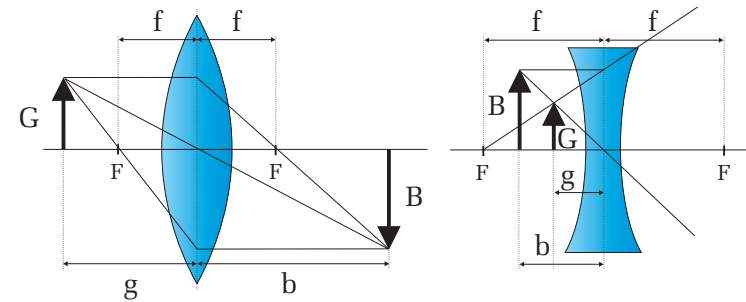


Abbildung 5: *Optische Abbildung durch eine dünne bikonvex Linse und eine bikonkav Linse.*

$L > 4f$ zwischen Bild und Gegenstand zwei Linsenstellungen gibt, die zu einer scharfen Abbildung führen. Bei einer Stellung findet eine Vergrößerung, bei der anderen eine Verkleinerung statt. Ist d der Abstand zwischen diesen beiden Stellungen, der über eine Differenzmessung recht genau ermittelt werden kann, so gilt für die Brennweite:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{6}$$

Die Genauigkeit des Besselverfahrens reicht aus, um bestimmte Abbildungsfehler (Linsenfehler) zu untersuchen. Bei sphärischen Linsen gilt Gleichung (3) nur für achsennahe Strahlen. Lichtbündel, die auf weiter außen von der optischen Achse gelegenen Zonen der Linse treffen, werden nicht mehr in den gleichen Punkt fokussiert und haben daher eine etwas andere Brennweite als das Linsenzentrum. Dieser Linsenfehler wird als sphärische Aberration bezeichnet. Es gibt mehrere Methoden die sphärische Aberration einer Linse zu minimieren. Am einfachsten gelingt dies durch Abblenden d.h. mit Hilfe einer Lochblende werden nur achsennahe Lichtbündel zur Abbildung zugelassen. Allerdings geht dies auf Kosten der Lichtstärke, die proportional zur Fläche der Linse ist. Je kleiner der Blendendurchmesser, desto schärfer ist zwar das Bild aber auch umso dunkler. Eine andere Methode ist die Verwendung von asphärischen Linsen. Solche Linsen sind so geschliffen, dass auch achsenferne Strahlen in den selben Punkt fokussiert werden wie achsennahe. Die Herstellung dieser Linsen ist allerdings sehr aufwendig, so dass diese vorwiegend nur in teuren Spezialoptiken eingesetzt werden.

Ein weiterer Linsenfehler ist die chromatische Aberration. Bei der Abbildung

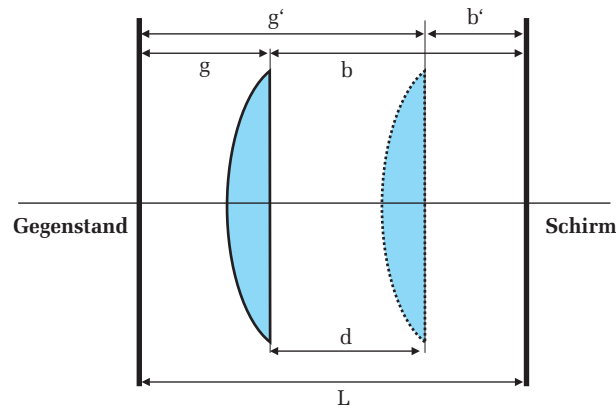


Abbildung 6: Prinzip des Bessel-Verfahren zur Brennweitenbestimmung.

eines Gegenstandes der mit weißem Licht beleuchtet wird, treten im Bild Farbsäume auf. Diese beruhen auf der Dispersion des Linsenmaterials. Nach Gleichung (2) geht in die Brennweite der Brechungsindex n ein, der wiederum von der Wellenlänge abhängt. Im Fall der normalen Dispersion hat blaues Licht beispielsweise einen größeren Brechungsindex als rotes und wird daher stärker gebrochen. Somit ist die Brennweite für kurzwelliges Licht kleiner als für Licht mit einer größeren Wellenlänge.

Da achsenferne Lichtbündel am meisten zur Aberration beitragen, lässt sich der Farbfehler ebenfalls durch Abblenden reduzieren. Eine bessere Methode ist die Verwendung von sogenannten Achromaten. Dabei handelt es sich um Linsensysteme mit unterschiedlicher Dispersion und Brechkraft, die den Farbfehler für zwei Wellenlängen vollständig ausgleichen können.

V.4 Vergrößerung des Sehwinkels: Lupe und Mikroskop

Wenn Sie einen kleinen Gegenstand möglichst groß sehen möchten, so verringern Sie den Abstand zwischen Ihrem Auge und dem Gegenstand, indem Sie beispielsweise den Gegenstand näher an Ihr Auge herantreten. Dadurch wird das Bild auf der Netzhaut größer dargestellt und Sie können feinere Details erkennen. Aus dem linken Teilbild in Abbildung 7 ist zu erkennen, dass das Bild auf der Netzhaut um so größer ist je geringer der Abstand zum Gegenstand ist oder um so größer der Sehwinkel α ist. Allerdings können Sie den Gegenstand

nicht beliebig nah an das Auge herantreten, da die Ziliarmuskulatur des Auges den Krümmungsradius der Linse nur bedingt variieren kann (Akkommodation). Unterhalb einer bestimmten Entfernung kann der Gegenstand nicht mehr auf die Netzhaut fokussiert werden und der Gegenstand erscheint verschwommen. Der kleinste Abstand auf dem ein gesundes Auge über einen längeren Zeitraum ermüdungsfrei akkomodieren kann, heißt deutliche Sehweite s_0 . Der Wert von s_0 ist auf 25 cm festgelegt. Überprüfen Sie doch mal die deutliche Sehweite bei Ihnen selbst, in dem Sie z.B. diese Anleitung an Ihr Auge herantreten und den Abstand messen, bei dem Sie auch über einen längeren Zeitraum den Text ohne Anstrengung lesen können. Sollen noch feinere Details eines Objekts erkannt

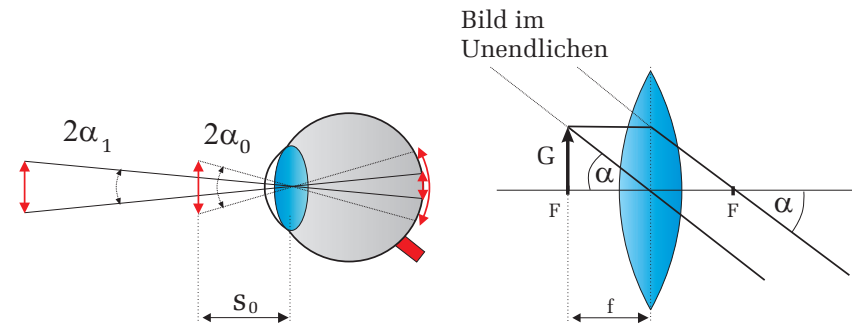


Abbildung 7: Links: Je größer der Sehwinkel α desto größer ist das Bild auf der Netzhaut. Für Abstände kleiner als die deutliche Sehweite $s_0 \doteq 25 \text{ cm}$ kann das Bild in der Regel nicht mehr scharf auf die Netzhaut abgebildet werden. Rechts: Wirkungsweise einer Lupe.

werden, so benötigt man optische Instrumente, die den Sehwinkel und damit die Bildgröße auf der Netzhaut vergrößern. Das einfachste Instrument ist die Lupe. Eine Lupe besteht lediglich aus einer einfachen biconvex Linse mittlerer Brennweite. Ist bei der Abbildung die Gegenstandsweite kleiner oder gleich der Brennweite so erfolgt eine Vergrößerung des Sehwinkels. In Abbildung 7 rechts liegt der Gegenstand z.B. genau in der Brennebene der Linse. In diesem Fall ist das Auge völlig entspannt und somit auf Unendlich akkomodiert. Für den Sehwinkel α_L , wobei der Index L für Lupe steht, ergibt sich:

$$\tan \alpha_L = \frac{G}{f}. \tag{7}$$

Ohne Lupe, bei dem sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite $s_0=25\text{ cm}$ befindet, erhält man dagegen für den Sehwinkel α_0 :

$$\tan \alpha_0 = \frac{G}{s_0}. \quad (8)$$

Definiert man als Vergrößerung V das Verhältnis der Sehwinkel mit Lupe (bzw. allgemein mit einem zusätzlichen optischen Instrument) und ohne Lupe (allgemein ohne optisches Instrument) in der deutlichen Sehweite, so ergibt sich für die Vergrößerung V :

$$V_{Lupe} = \frac{\tan \alpha_L}{\tan \alpha_0} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (9)$$

Wenn im Folgenden von Vergrößerung gesprochen wird, ist grundsätzlich die Vergrößerung des Sehwinkels gemeint!

Typische Werte für die Brennweite einer Lupe liegen zwischen 25 mm und 50 mm. Werte unter 25 mm können nicht realisiert werden, da dann die Abbildungsfehler zu groß werden. Somit kann mit einer gewöhnlichen Lupe maximal eine 10-fache Vergrößerung erreicht werden.

Weitaus größere Vergrößerungen lassen sich mit einem Mikroskop erreichen. Ein Mikroskop besteht im wesentlichen aus zwei Linsen, dem Objektiv und dem Okular, die die Abbildung und Vergrößerung bewirken. Der Strahlengang ist in Abbildung 8 dargestellt. Der zu beobachtende Gegenstand G befindet sich in der Gegenstandsweite g etwas außerhalb der Brennweite des Objektivs. Mit dem Objektiv wird dieser Gegenstand in die Bildebene abgebildet. Es entsteht ein reelles, umgekehrtes Bild B , das im Folgenden als Zwischenbild bezeichnet wird. Mit dem Okular wird dieses Zwischenbild als Lupe betrachtet, d.h. das Zwischenbild befindet sich genau in der Brennweite der Okularlinse, so dass das Auge auf Unendlich akkomodiert.

Um die Vergrößerung des Mikroskops zu bestimmen, muss wieder der Sehwinkel mit und ohne Mikroskop bestimmt werden. Für den Sehwinkel mit Mikroskop ergibt sich aus Abbildung 8:

$$\tan \alpha_M = \frac{B}{f_2}, \quad (10)$$

wobei B die Bildgröße des Zwischenbilds und f_2 die Okularbrennweite darstellt. Aus dem unteren Teilbild in Bild 8 kann zusätzlich abgelesen werden, dass sich

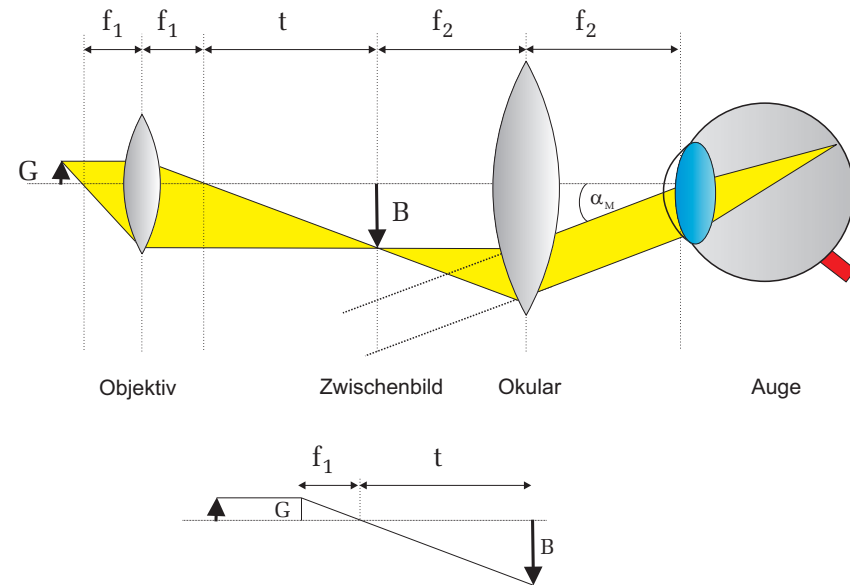


Abbildung 8: Strahlengang eines Mikroskops. Die untere Skizze dient zur Berechnung der Mikroskopvergrößerung.

$G : f_1$ genauso verhält wie $B : t$:

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B}{t}. \quad (11)$$

Die Größe t wird als Tubuslänge bezeichnet und gibt den Abstand zwischen gegenstandsseitigen Objektivbrennpunkt und bildseitigen Okularbrennpunkt an. Setzt man Gleichung (11) in (10) ein, so ergibt sich für den Sehwinkel:

$$\tan \alpha_M = \frac{Gt}{f_1 f_2} \quad (12)$$

und für die Vergrößerung

$$V_M = \frac{\tan \alpha_M}{\tan \alpha_0} = \frac{Gt}{f_1 f_2} / \frac{G}{s_0} = \frac{s_0}{f} = \frac{s_0 t}{f_1 f_2}. \quad (13)$$

Definiert man nun die Objektivvergrößerung durch

$$v_1 = \frac{t}{f_1} \tag{14}$$

und schreibt für die Okularvergrößerung nach Gleichung (9)

$$v_2 = \frac{s_o}{f_2}, \tag{15}$$

so ist die Gesamtvergrößerung das Produkt dieser beiden Einzelvergrößerungen:

$$V_M = v_1 v_2 = \frac{t}{f_1} \frac{s_o}{f_2}. \tag{16}$$

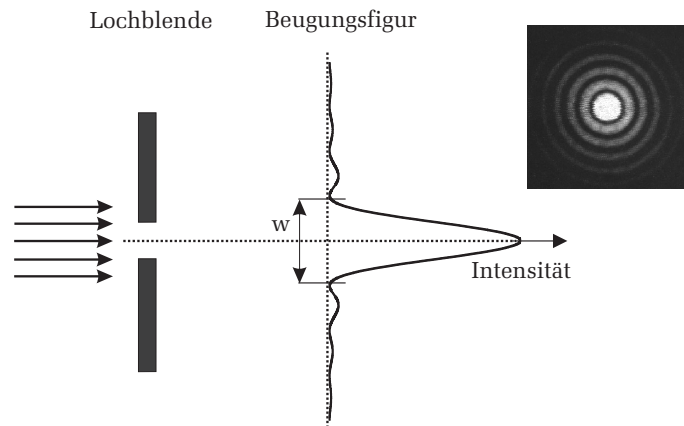


Abbildung 9: *Beugung an einem Spalt.* Auf einem hinter dem Spalt befindlichen Schirm wird nicht ein scharfer Lichtstreifen dargestellt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern eine Beugungsfigur mit einem sehr hellen Maximum, gefolgt von Nebenmaxima, dessen Intensität mit höherer Ordnung rasch abfällt. Das Bild rechts zeigt die Beugungsfigur einer Lochblende.

Offenbar könnte man meinen, dass die Gesamtvergrößerung beliebig erhöht werden kann, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Mikroskops sehr groß wählt. In der Realität ist aber die nutzbare Vergrößerung aufgrund der Wellennatur des Lichtes durch die Beugung begrenzt.

Die Beugung ist eine spezielle Interferenzerscheinung von Wellen an geometrischen Hindernissen (Spalt, Lochblende etc.). Bei einem Mikroskop entspricht solch ein Hindernis beispielsweise dem endlichen Durchmesser des Objektivs, das als Lochblende wirkt.

Wird eine Lochblende mit parallelem Licht beleuchtet, so erkennt man auf einem dahinter stehenden Schirm nicht einen hellen Lichtpunkt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern ein Beugungsbild mit einer Intensitätsverteilung wie sie in Abbildung 9 zu sehen ist. Ihr Betreuer wird Ihnen dies mit Hilfe eines Lasers und einer Spaltblende demonstrieren. Das Beugungsbild besitzt ein sehr helles zentrales Maximum, gefolgt von mehreren Minima und Nebenmaxima, dessen Intensitäten allerdings schnell abnehmen. Bei einem

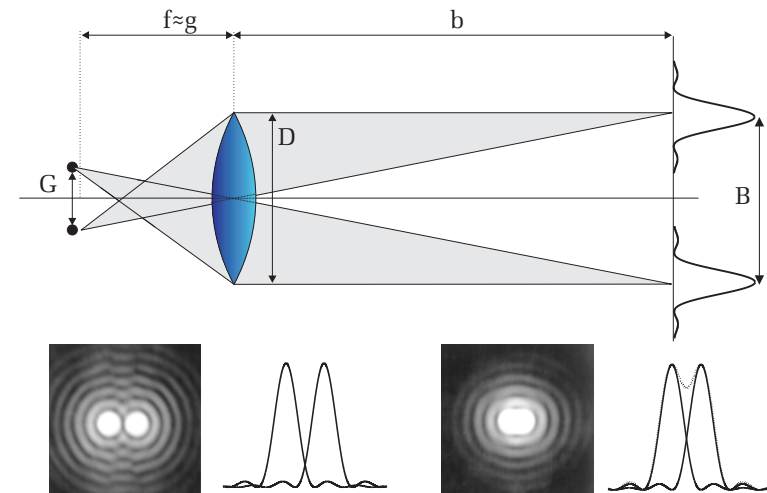


Abbildung 10: *Jeder Objektpunkt erzeugt im Zwischenbild eine Beugungsfigur.* Damit zwei Punkte noch getrennt zu erkennen sind, dürfen sich die Beugungsbilder nicht zu stark überlappen. Im unteren rechten Bild sind die beiden Punkte nicht mehr unterscheidbar.

Mikroskop erzeugt nun jeder Punkt des darzustellenden Gegenstands solch ein Beugungsbild im Zwischenbild (Abbildung 10). Die Breite w des zentralen Maximums beträgt:

$$w = 2,44 \frac{\lambda b}{D}. \tag{17}$$

Die Herleitung dieser Gleichung können Sie z.B. im Demtröder, *Experimentalphysik 2*, nachlesen.

Je kleiner der Abstand g zweier Objektpunkte, desto näher rücken auch die Beugungsbilder dieser Punkte im Zwischenbild zusammen. Ab einem gewissen Abstand b_{min} überschneiden sich die Beugungsbilder so stark, dass sie nicht mehr als zwei getrennte Objekte wahrnehmbar sind. Um dies zu quantifizieren, definiert man das Auflösungsvermögen nach dem Rayleigh-Kriterium: Zwei Objektpunkte sind nur dann voneinander unterscheidbar, wenn der Abstand der beiden Beugungsfiguren größer ist als die halbe Breite des zentralen Maximums. Die Auflösungsgrenze ist also dann erreicht, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das Beugungsminimum des anderen fällt. Der minimale Abstand der Beugungsfiguren ist dann nach Gleichung (17):

$$B_{min} = 1,22 \frac{\lambda b}{D}. \tag{18}$$

Mit Hilfe von (4) erhält man mit $B_{min}/b = G_{min}/g$ den kleinsten Abstand G_{min}

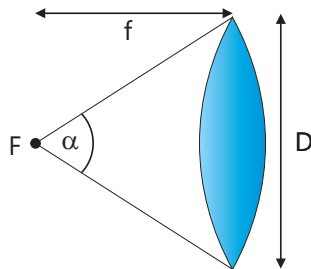


Abbildung 11: Numerische Apertur einer dünnen Linse.

zweier Objektpunkte, der mit dem Mikroskop noch aufgelöst werden kann:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda g}{D}. \tag{19}$$

Da die Objektpunkte praktisch in der Brennebene der Objektivlinse liegen ($g \approx f$), können wir auch schreiben:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}. \tag{20}$$

Der Quotient D/f ist mit der sogenannten numerischen Apertur NA verknüpft (Abbildung 10). Diese ist definiert durch den Sinus des halben Öffnungswinkels

der Objektivlinse multipliziert mit dem Brechungsindex n des Materials zwischen Objektiv und Präparat (Stichwort Immersionsöl):

$$NA = n \sin \alpha = n \sin \left[\arctan \left(\frac{D}{2f} \right) \right] \approx n \frac{D}{2f}. \tag{21}$$

Somit folgt schließlich für das Auflösungsvermögen:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}, \tag{22}$$

bzw.:

$$G_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{NA}, \tag{23}$$



Abbildung 12: Kommerzielles Objektiv eines Lichtmikroskops. Die Objektivvergrößerung beträgt 40. Die Zahl 160 besagt, dass das Objektiv nur für Mikroskope mit einer Tubuslänge von 160 mm verwendet werden kann. Zusätzlich ist noch die numerische Apertur, $NA=0,65$ und die zu verwendene Deckglasdicke von $0,17$ mm angegeben.

VI Durchführung des Versuchs

Hinweis: Die Bilder dienen nur als Hilfe zur Identifizierung für die einzelnen optischen Objekte und zeigen nicht den korrekten Aufbau für die einzelnen Aufgaben!

Aufgabe 1: Bestimmung der Parameter der achromatisch korrigierten Linse



Abbildung 13: Optische Objekte für Aufgabe 1.

Bauen Sie auf der optischen Schiene einen Aufbau bestehend aus Lampe mit Kondensorlinse, Gegenstand, Linse und Bildschirm auf. Verwenden Sie dabei die achromatisch korrigierte Linse (Achromat). Als Gegenstand stehen zwei Dias mit einer Teststruktur zur Verfügung. Verändern Sie nun die Bild- oder Gegenstandsweite so, dass Sie ein scharfes Bild erkennen können. Notieren Sie die Bild- und Gegenstandsweiten und berechnen Sie sofort die Brennweite.

Fertigen Sie folgende Tabelle an und messen Sie bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten, die Bildweite/Bildgröße, die Art des Bildes (reell oder virtuell) und die Ausrichtung. In den Bereichen $\infty > g > 2f$ und $2f > g > f$ sind jeweils drei verschiedenen Positionen auszumessen. Falls das Bild zu klein wird, verwenden Sie das Dia mit großen Doppelpfeil als Gegenstand. Andernfalls nehmen Sie das Dia mit der komplexen Teststruktur. Notieren Sie sich auch bei jeder Messung die Fehler.

	g	G	b	B	Art	Richtung
$\infty > g > 2f$					reel/virtuell	aufrecht/umgekehrt
$g = 2f$						
$2f > g > f$						
$g = f$						
$f > g$						

Aufgabe 2: Messung der Brennweite der bikonvex Linse L_1 nach dem Besselverfahren

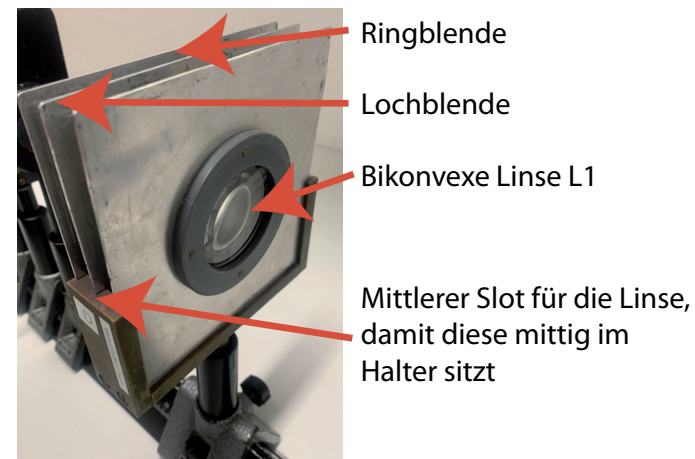


Abbildung 14: Optische Objekte für Aufgabe 2 und 3.

Stellen Sie auf der optischen Bank einen geeigneten Abstand zwischen dem Objekt und dem Abbildungsschirm ein (etwa $L \approx 5f$ bis $6f$, ein Wert für f ist am Linsenhalter angegeben). Platzieren Sie den Halter der bikonvexen Linse dazwischen und überprüfen Sie, ob die Linse im mittleren Slot eingesteckt ist. Suchen Sie die beiden Positionen der Linse für eine scharfe Abbildung des Objekts. Beachten Sie dabei, dass der weiße Schirm nicht in der Mitte der Halterung sitzt, sondern um einige Millimeter versetzt ist. Sie müssen daher die Dicke des Alubleches (2 mm) beim Abstand L berücksichtigen (Die Seite mit dem Gitter ist in der Mitte).

Vermessen Sie je dreimal abwechselnd die beiden Positionen der Linse L_1 , die für ein scharfes Bild sorgen.

Aufgabe 3: Untersuchung der chromatischen Aberration

Wiederholen Sie die Messung der vorherigen Aufgabe je einmal mit einem Rotfilter und einmal mit einem Blaufilter. Am Ende müssen Sie 6 Positionsmessungen der Linse für jedes verwendete Filter notiert haben.

Beobachten Sie qualitativ die sphärische Aberration, indem Sie einmal die Lochblende und einmal die Ringblende vor die Linse stellen: Wie ändert sich d ? (Größeres d heißt kleineres f .)

Aufgabe 4: Aufbau eines Mikroskops auf der optischen Bank

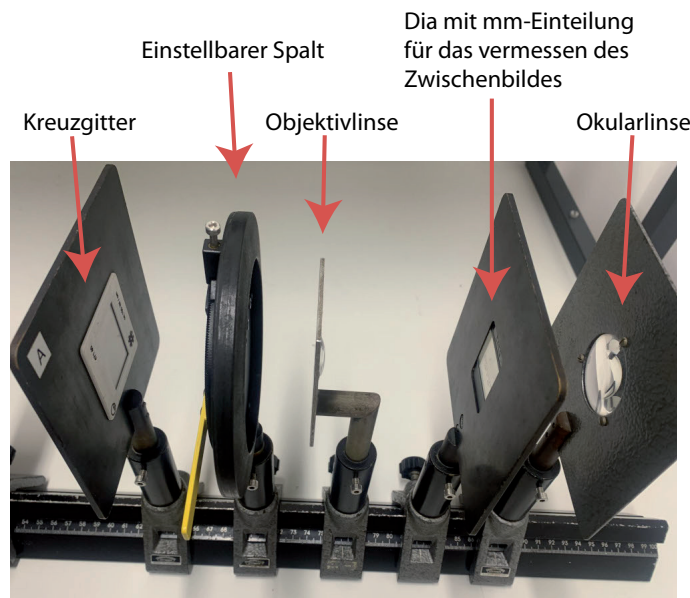


Abbildung 15: Optische Objekte für Aufgabe 4.

Bauen Sie das Objekt (Dia mit Kreuzgitter) hinter die Lampe mit dem eingesetzten Grünfilter ein. Dicht dahinter wird der einstellbare Spalt platziert. Dicht meint hier wenige mm dahinter. Wieder dicht hinter dem einstellbaren Spalt wird das Objektiv eingesetzt. Der Abstand Linsenebene des Objektivs bis zur Mitte des Reiters beträgt genau 3 cm. Der Schirm für das Zwischenbild (Dia mit mm-Teilung) wird im Abstand von 25 cm vom Objektiv aufgestellt. Vergessen Sie nicht die 3 cm zusätzlichen Abstand zwischen Objektivlinse und dem

Objektivlinsenhalter. Hinter dem Dia für das Zwischenbild wird im Abstand f_2 die Okularlinse. Die Brennweite der Okularlinse ist auf dem Linsenhalter notiert. Ganz am Ende der optischen Bank platzieren Sie die Abbildungsebene. Zur Scharfeinstellung verschieben Sie das Kreuzgitter bis ein scharfes Bild der Gitterstrukturen auf dem Schirm zu sehen ist. Vergewissern Sie sich, dass der einstellbare Spalt voll geöffnet ist. Lampe und Kondensor werden so eingestellt, dass das Bild des Gitters in vernünftiger Helligkeit erscheint. Zu diesem Zweck kann der Lampensockel im Gehäuse verschoben werden.

a) Aus der Bildweite b und f_1 lässt sich der Abbildungsmaßstab berechnen (Gleichung (5)). Bestimmen Sie aus der Größe des Zwischenbildes (z.B. Zahl der Striche pro 5 mm) bei weit geöffnetem Spalt und mit grünem Licht den Strichabstand des Gitters.

b) Verringern Sie nun die Öffnung des Messspalts und beobachten Sie dabei wie die senkrechten Strukturen des Kreuzgitters verschwinden. Messen Sie dreimal die Spaltbreite bei der die senkrechten Strukturen gerade nicht mehr auflösbar sind. Notieren Sie den Abstand des Spalts zum Objekt. Machen Sie sich klar, dass durch das Verengen des Spalts das Auflösungsvermögen nur in einer Dimension eingeschränkt wird! Beobachten Sie qualitativ den Einfluss der Wellenlänge auf das Auflösungsvermögen, in dem Sie das rote und das blaue Farbfilter benutzen.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Werten Sie Ihre Ergebnisse anhand folgender Tabelle aus (β bezeichnet den Abbildungsmaßstab.) Konstruieren Sie grafisch die Abbildung eines Objekts für die jeweiligen Gegenstandsweiten.

Nr.	g	b	Art	Richtung	β
I	$\infty > g > 2f$	z.B. $2f = b > f$	reel/ virtuell	aufrecht/ umgekehrt	z.B. > 1
II	$g = 2f$				
III	$2f > g > f$				
IV	$g = f$				
V	$f > g$				

Tragen Sie Ihre Messwerte für die Bild- und Gegenstandsweite in ein Diagramm ein. Tragen Sie dazu immer ein Wertepaar b, g so auf, dass die Gegenstandsweite

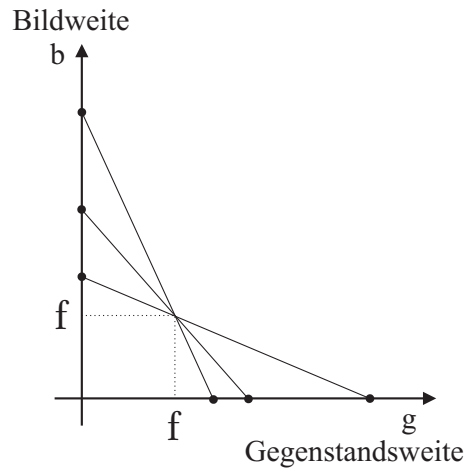


Abbildung 16: Grafische Bestimmung der Brennweite.

auf der Abszisse und die Bildweite auf der Ordinate liegt und verbinden Sie die beiden Punkte durch eine Gerade (Abbildung 16). Alle Geraden schneiden sich in einem Punkt, aus dem die Brennweite abgelesen werden kann. Schätzen Sie den Fehler ab.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Brennweite nach dem Besselverfahren und geben Sie auch die Fehler Ihrer Messungen an.

Aufgabe 3: Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse bezüglich der untersuchten Linsenfehler.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Gitterkonstante des Kreuzgitters und bestimmen Sie das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Berechnen Sie aus der Breite des Spalts und seinem Abstand vom Objekt den Öffnungswinkel des Systems und damit das Auflösungsvermögen; für λ wird der Wert 550 nm eingesetzt. Der erhaltene Wert wird mit der zuvor bestimmten Gitterkonstante verglichen.

Versuch 33 Prismenspektrometer

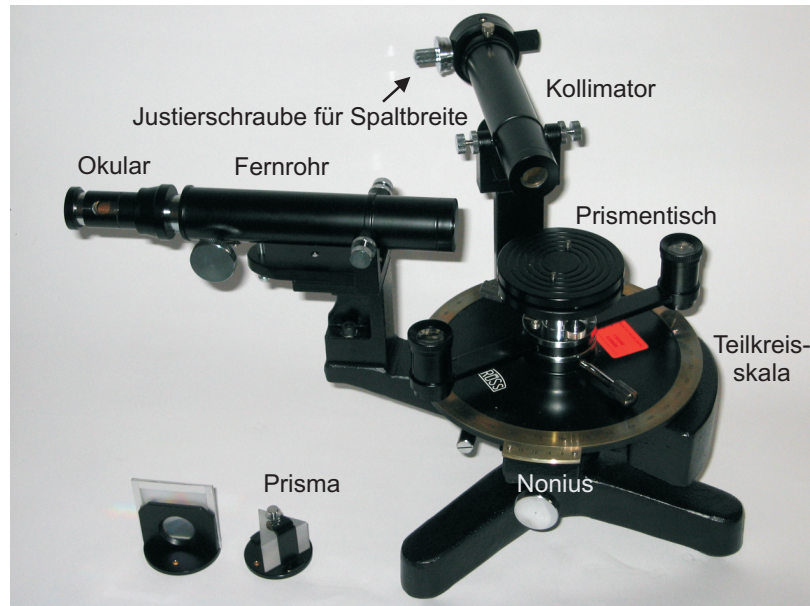


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Spektrometer mit Prisma.
- Hg-Lampe in einem Gehäuse montiert auf einem Stativfuß.
- He-Lampe in einem Gehäuse montiert auf einem Stativfuß.
- Netzteil.
- Wasserstofflampe mit Netzgerät (für je 2 Aufbauten gemeinsam)

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Brechungsgesetz, Aufbau des Prismenspektrometers, Dispersion, Auflösungsvermögen eines Prismenspektroalapparates, Energieniveaus des Wasserstoffatoms, Balmerformel.

Verständnisfragen:

1. Ändert sich die Wellenlänge λ oder die Frequenz ν , wenn Licht von einem Medium in ein anderes tritt?
2. Von welchen Parametern hängt der Gesamtablenkwinkel δ (siehe Abbildung 2) im Allgemeinen ab? Wie kann man zeigen, dass δ ein Minimum annimmt und in diesem Fall der Strahlengang im Prisma symmetrisch verläuft?
3. Wie setzt sich die Kurve $n(\lambda)$ zu größeren und kleineren Wellenlängen fort? Was versteht man unter normaler und anomaler Dispersion?
4. Wird bei einem Prisma (normale Dispersion angenommen) bei gleichem Einfallswinkel, rotes Licht oder blaues Licht stärker abgelenkt?
5. Wie entstehen Spektrallinien? Welche Bedeutung hat die Spektralanalyse?
6. Was begrenzt die Möglichkeit zwei Spektrallinien benachbarter Wellenlängen im Spektrometer zu trennen?

IV Aufgabe

- Die Winkeldispersionskurve $\delta(\lambda)$ des Prismas ist durch Messung der Ablenkungswinkel δ bei gegebenem Spektrum des Hg aufzunehmen und als Eichkurve zur Bestimmung der Wellenlänge des He-Spektrums zu benutzen.

Zusatzaufgabe: Führen Sie zusätzlich noch eine der beiden Aufgaben durch.

- Die Dispersionskurve $n(\lambda)$ soll durch Messung der Minimalablenkwinkel $\delta_{min}(\lambda)$ für vier Linien des Hg-Spektrums ermittelt werden.
- Die Wellenlänge der sichtbaren Linien des Wasserstoffspektrums sind zu bestimmen und daraus mit Hilfe der Balmerformel die Rydberg-Konstante für Wasserstoff zu berechnen.

V Grundlagen

Ein Spektrometer ist ein Instrument, mit dem Licht in seine Spektralfarben (Wellenlängen) zerlegt werden kann. Beim Prismenspektrometer erfolgt diese Zerlegung durch ein optisches Prisma. Dabei handelt es sich um einen Körper aus einem lichtdurchlässigen Material (i.a. Glas), der von zwei ebenen, nicht parallelen Flächen begrenzt wird. Die Gerade, in der sich die beiden Flächen schneiden, wird brechende Kante genannt. In einem Schnitt senkrecht dazu (Hauptschnitt) liegt an der brechenden Kante der brechende Winkel ϵ . Mit Hil-

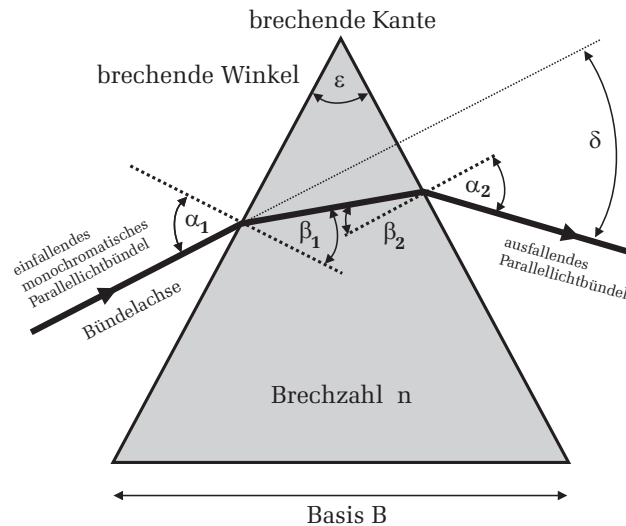


Abbildung 2: Hauptschnitt eines Prismas.

fe des Brechungsgesetzes und unter der Annahme, dass für den Brechungsindex von Luft $n_{Luft} = 1$ gilt, folgt für den totalen Ablenkungswinkel δ , um den ein

einfallendes Lichtbündel abgelenkt wird:

$$\delta = \alpha_1 - \epsilon + \arcsin(\sqrt{n^2 - \sin(\alpha_1)^2} \sin(\epsilon) - \sin(\alpha_1) \cos(\epsilon)). \quad (1)$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, bei dem das Prisma symmetrisch vom Licht durchsetzt wird. Dabei trifft das einfallende Lichtbündel senkrecht auf die Ebene, die den brechenden Winkel ϵ halbiert. Bei diesem Einfall nimmt der Ablenkwinkel δ ein Minimum ein und es gelten die Beziehungen:

$$\alpha_{min} = \alpha_1 = \alpha_2 = \left(\frac{\delta_{min} + \epsilon}{2} \right) \quad (2)$$

$$n = \frac{\sin((\delta_{min} + \epsilon)/2)}{\sin(\epsilon/2)} \quad \text{(Fraunhofersche Formel).} \quad (3)$$

Gleichung (3) (Fraunhofersche Formel) beschreibt eine Methode um den Brechungsindex des Prismamaterials zu bestimmen. Messungen an Prismen sollten stets beim minimalen Ablenkwinkel erfolgen, da in diesem Fall der Ablenkwinkel δ kaum vom Einfallswinkel α_1 abhängt (δ nimmt ein Minimum ein!).

Bisher haben wir uns nur auf ein einfallendes monochromatisches Lichtbündel beschränkt. Allerdings hängt aufgrund der Dispersion der Brechungsindex n von der Wellenlänge ab, so dass bei einem einfallenden „weißes“ Lichtbündel n durch $n(\lambda)$ ersetzt werden muss. Da der Ablenkwinkel δ von dem Brechungsindex abhängt, wird ein „weißes“ Parallellichtbündel spektral zerlegt.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

Aufgabe 2: Justierung des Spektrometers

Machen Sie sich zunächst mit den verschiedenen Funktionen der Arretierungsschrauben und Feintriebe vertraut. Bei Unklarheiten fragen Sie den Assistenten. Der Strahlengang ist in Abbildung 3 dargestellt.

Einstellen des Fernrohres Entfernen Sie den oberen Teil des Prismentischs und visieren Sie ein weit entfernten Gegenstand an. Platzieren Sie dazu das Spektrometer auf dem Podest vor dem Laborraum und richten Sie das Fernrohr auf die gegenüberliegende Tür. Stellen Sie zunächst das Fadenkreuz scharf indem Sie das Okular im Okulartubus verschieben. Anschließend stellen Sie mittels der seitlichen Rändelschraube die anvisierte Tür scharf. Bild und Fadenkreuz sollen

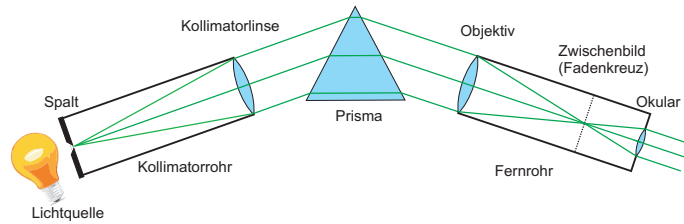


Abbildung 3: Strahlengang des Prismenspektrometers.

keine Parallaxe mehr zeigen, d.h. bei Bewegung des Auges vor dem Okular soll keine gegenseitige Verschiebung eintreten. (Beide liegen dann in einer Ebene).

Einstellen des Kollimators Beleuchten Sie den Spalt mit der Hg- Lampe und richten Sie das justierte Fernrohr auf den Kollimator. Zur Einstellung des Kollimatorrohres auf Parallellicht verschiebt man den Spalteinsatz, bis man im justierten Fernrohr ein scharfes Spaltbild parallaxenfrei zum Fadenkreuz beobachtet. Sollte das Spaltbild verkippt sein, so können Sie durch Drehen des Spalttubus dieses aufrichten.

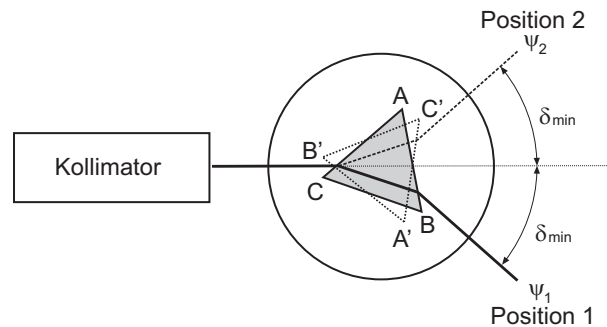


Abbildung 4: Messung des Minimalablenkwinkel.

Aufgabe 3: Aufnahme der Eichkurve

Für die Messung sollte der Prismenschwerpunkt ungefähr in der Spektrometerachse liegen. Stellen Sie den Minimalablenkwinkel für die grüne Hg-Linie ein. Dieser ist dann erreicht, wenn das im Fernrohr beobachtete grüne Spaltbild (Fadenkreuz benutzen) bei Drehung des Prismentisches stehen bleibt. Kleine

Drehungen des Tisches nach rechts oder links lassen das Bild in die gleiche Richtung zurückwandern. Messen Sie bei festgehaltener Prismenlage die Ablenkungswinkel $\delta(\lambda)$ für folgende zehn Linien des Hg-Spektrums:

Nr.	$\lambda(\text{nm})$	Farbe	Intensität
1	690,7	rot	schwach
2	623,4	rot	mittel
3	579,1	gelb	stark
4	577,0	gelb	stark
5	546,1	grün	stark
6	499,2	blaugrün	schwach
7	491,6	blaugrün	mittel
8	435,8	blau	stark
9	407,8	violett	mittel
10	404,7	violett	stark

Tabelle 4: Linien des Quecksilberspektrums.

Zur Feineinstellung können Sie die Mikrometerschraube am Fernrohrträger benutzen. Es genügt die genaue Messung der Ablenkungswinkel nach einer Seite. Nutzen Sie unbedingt die Genauigkeit des Nonius aus. Achten Sie darauf, dass während der Durchführung der Aufgabe 3, Aufgabe 4 und gegebenenfalls der Zusatzaufgabe II die Teilkreissskala in der gleichen Lage arretiert bleibt! Für die starken Linien kann der Spalt sehr eng gestellt werden; für die schwächeren Linien öffnen Sie den Spalt soweit wie nötig.

Aufgabe 4: Wellenlängenbestimmung des He-Spektrums

Messen Sie Bei unveränderter Einstellung des Prismas (Minimum der Ablenkung für die grüne Hg-Linie) die Ablenkungswinkel für folgende sechs Linien des He-Spektrums: rot (stark); gelb (stark); grün (stark); grün (mittel); blau (mittel); blau (stark).

Zusatzaufgabe I: Wellenlängenbestimmung der Balmer Serie des Wasserstoffspektrums.

Die Wasserstofflampe samt Netzgerät wird vor den Spektrometerspalt gestellt und das Gerät eingeschaltet. Nach ca. 2 Minuten Betriebsdauer wird das Gerät vorsichtig so vor dem Spalt verschoben, dass die Linien mit maximaler Helligkeit

sichtbar sind. Die Wellenlängen der drei starken Linien (rot, türkis, violett) werden aus der Eichkurve bestimmt. Versuchen Sie durch Öffnen des Spaltes eine vierte, kurzwelligere Linie zu sehen. Achtung: Die Wasserstofflampe hat starken Bandenuntergrund, der weitere Linien vortäuscht.

Zusatzaufgabe II: Messung der Dispersion des Prismamaterials

Für die Spektrallinien 2, 5, 7, 10 des Hg-Spektrums werden die Minimalablenkwinkel $\delta_{Min}(\lambda)$ nach „rechts“ und „links“ (siehe Abbildung 4) gemessen.

VII Auswertung

Zu Aufgabe 3 und 4: Zeichnen Sie auf mm-Papier die Winkeldispersionskurve $\delta(\lambda)$ des Hg-Spektrums und bestimmen Sie anhand dieser Eichkurve die Wellenlängen der He-Linien. Berücksichtigen Sie den Fehler aus der Ablesegenauigkeit des Nonius. Wie groß sind die Abweichungen von den Tabellenwerten (706,5 nm - 667,8 nm - 587,6 nm - 501,6 nm - 492,2 nm - 471,3 nm - 447,1 nm)?

Zu Zusatzaufgabe I: Vergleichen Sie die gemessene Spektrallinien mit den Literaturwerten (siehe Anhang). Berechnen Sie die Rydberg-Konstante R_∞ mit Hilfe der Balmer-Formel:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4)$$

und vergleichen Sie diese mit dem Literaturwert. m ist hier die Hauptquantenzahl des betreffenden angeregten Zustands ($m = 3, 4, 5, \dots$).

Zu Zusatzaufgabe II: Bestimmen Sie nach der Gleichung (gültig für symmetrischen Strahlengang)

$$n(\lambda) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\delta_{Min}(\lambda) + \epsilon)\right)}{\sin(\epsilon/2)} \quad (5)$$

die Brechungsindizes für die gemessenen Hg-Linien. Der brechende Winkel des Prismas ϵ beträgt 60° . Zeichnen Sie die Dispersionskurve $n(\lambda)$.

VIII Anhang

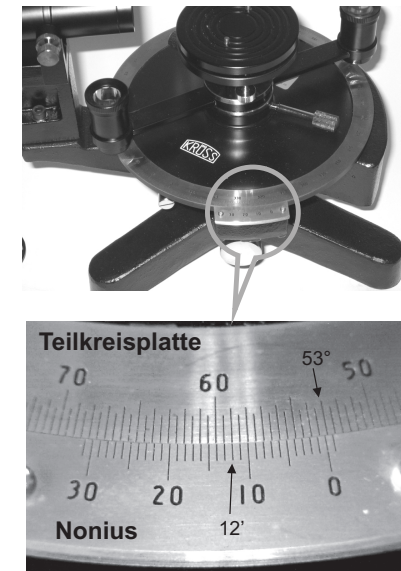


Abbildung 5: Die Spektrometer besitzen einen Nonius der den Winkel in Bogenminuten angibt. Das Ablesen geschieht folgendermaßen: Lesen Sie zunächst den Winkel der Teilkreisaska mit dem Nullteilstrich des Nonius auf $0,5^\circ$ genau ab. Im unteren Bild beträgt der Winkel 53° , da der Nullteilstrich zwischen 53° und $53,5^\circ$ liegt. Die Nachkommastellen werden mit dem Nonius abgelesen. Beachten Sie, dass der Nonius in Bogenminuten geeicht ist. Dabei entsprechen die 30 Skalenteile ($30'$ entspricht 30 Bogenminuten) einem halben Grad. Sie müssen nun den Teilstrich des Nonius suchen der genau unter einem Teilstrich der Kreisskala steht. Im Bild ist dies der Teilstrich 12. Das Ergebnis der Winkelmessung ist demnach $53^\circ 12'$ bzw. im Gradmaß: $53^\circ + (12'/60') = 53,2^\circ$.

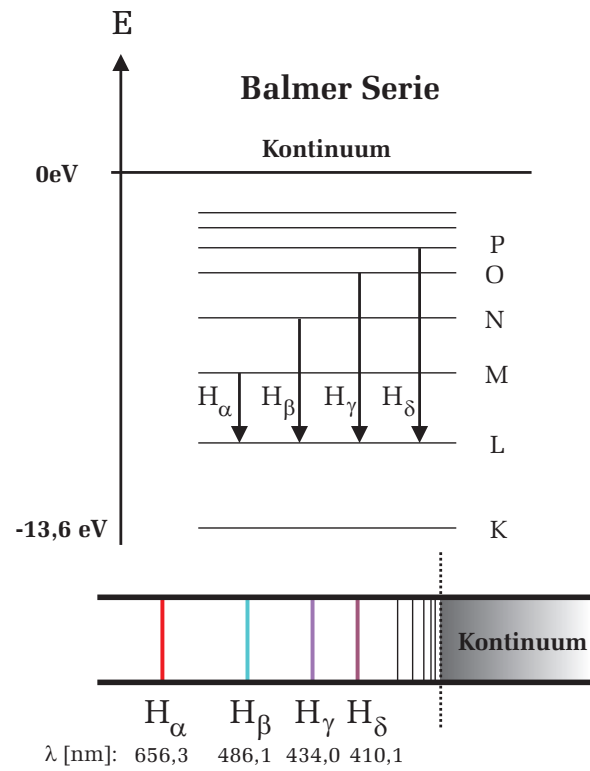


Abbildung 6: *Balmer-Serie des Wasserstoffs.*

Versuch 34 Spektralphotometrie

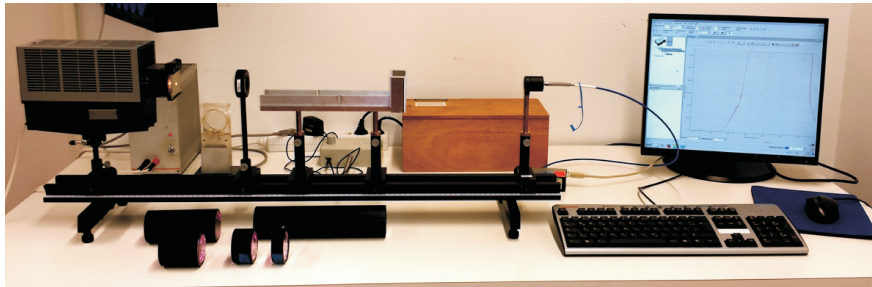


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Spektralfotometrische Messanordnung bestehend aus: Lichtquelle, Lochblende, Linse, Küvettenbank und Fasereinkoppler.
- Gitterspektrometer, Ocean Optics USB4000
- Computer mit Drucker.
- Je Versuchsaufbau:
 - 1 Satz (5 Stück) Küvetten mit 0,00005-molaren Kaliumpermanganatlösung (KMnO_4), Schichtdicken: $l_1=1,5$ cm, $l_2=3$ cm, $l_3=6$ cm, $l_4=12$ cm, $l_5=24$ cm.
 Für alle Aufbauten gemeinsam: Eine 25 ml-Bürette mit 1/20 ml-Teilung und 2 l Vorratsgefäß (VE-Wasser), eine 25 ml-Bürette mit 1/10 ml-Teilung und 2 l Vorratsgefäß (0,001-molare wässrige KMnO_4 -Lösung)
- Eine offene Küvette (rechteckig), $l=1,5$ cm
- Zur Auswertung einfachlogarithmisches Papier mit 3 Dekaden.

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Aufbau eines Gitterspektrometers, Absorption (Extinktion) von Strahlung, Lambert-Beersches Gesetz, Absorptionsspektren (Absorption in Lösungen), Fotometrie, Spektralfotometrie. Beantworten Sie bei Ihrer Vorbereitung folgende Fragen zum Versuch:

1. Nach welchem Prinzip funktioniert ein Gitterspektrometer? Wie hoch ist die spektrale Auflösung?
2. Was passiert bei der Absorption von Licht durch die KMnO_4 -Moleküle der verwendeten Probelösung?
3. Wie hängt die Absorption von Länge und Konzentration der durchstrahlten Lösung ab? Wie kommt man zu den entsprechenden Formeln?

IV Aufgabe

- Aufnahme des Absorptionsspektrum einer KMnO_4 -Lösung.
- Durch Messung der Absorption von Licht der Wellenlänge $\lambda=525$ nm als Funktion der Schichtdicke bzw. der Konzentration einer KMnO_4 -Lösung wird der molare Extinktionskoeffizient ϵ für $\lambda=525$ nm ermittelt.

V Grundlagen

V.1 Fotometrie

Als Fotometrie bezeichnet man die Konzentrationsbestimmung einer Substanz durch Absorption (bzw. durch Streuung oder Fluoreszenz). Das Prinzip beruht auf der Messung der Abschwächung der Intensität eines einfallenden Lichtbündels durch die in der Messzelle enthaltene Substanz.

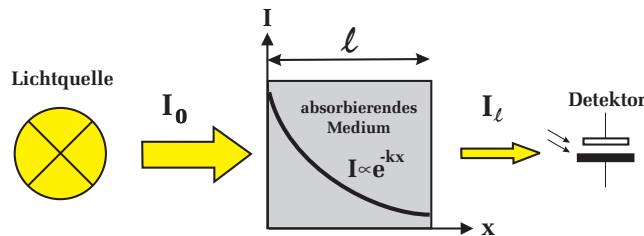


Abbildung 2: Veranschaulichung des Lambert'schen Absorptionsgesetzes.

Das Absorptionsgesetz für Licht lautet in der differentiellen Schreibweise:

$$\frac{dI}{I} = -kdl. \tag{1}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die relative Intensitätsabnahme dI/I bei kleinen Wegstrecken der Dicke dl proportional ist. Durch Integration von Gleichung (1) erhält man die Intensität I des Lichts nach Durchlaufen der Strecke l im absorbierenden Medium (Lambert'sches Absorptionsgesetz):

$$I = I_0 e^{-kl}. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet I_0 die in das Medium eindringende Intensität, l die Länge des Lichtweges im absorbierenden Medium und k die Absorptionskonstante (bzw. „Extinktionskonstante“, die beiden Bezeichnungen werden in der Literatur nebeneinander verwendet und sind identisch).

Zur Auswertung von Messungen empfiehlt sich die logarithmische Schreibweise:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -kl \quad \text{bzw.} \quad \ln I = -kl + \text{const} \quad \text{mit} \quad \text{const} = \ln I_0. \tag{3}$$

Trägt man I gegen l auf halblogarithmischem Papier auf, so ergibt sich eine Gerade. In der Praxis verwendet man dekadische Logarithmen. Gleichung (3) hat dann die Gestalt

$$\log I = -k'l + \text{const}' \quad \text{mit} \quad k' = \log e \cdot k = 0,434 k. \tag{4}$$

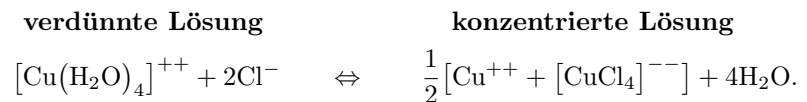
k' heißt „dekadischer oder Bunsenscher Absorptionskoeffizient“.

Für verdünnte Lösungen gilt im allgemeinen, dass die Absorptionskonstante k' der Konzentration c proportional ist (Beersches Gesetz):

$$k' = \epsilon c. \tag{5}$$

Man nennt ϵ den molaren Extinktionskoeffizienten oder kurz Molarextinktion, wobei c in mol/l oder mol/cm³ anzugeben ist. Nach dem Beerschen Gesetz ist ϵ von der Konzentration c der Lösung unabhängig, d.h. ϵ ist eine Stoffkonstante.

Bei hohen Konzentrationen können Abweichungen vom Beerschen Gesetz auftreten. Ein Beispiel bietet die CuCl₂-Lösung, bei der beim Übergang von verdünnter zu konzentrierter Lösung eine Gleichgewichtsverschiebung bei der Komplexbildung auftritt, gemäß



Eine Erhöhung der Konzentration bedeutet also in diesem Fall nicht einfach eine Vergrößerung der Zahl der an der Absorption beteiligten Ionen (wie im Gültigkeitsbereich des Beerschen Gesetzes), sondern Neubildung von Ionen anderer Art, die i.a. auch ein anderes Absorptionsverhalten zeigen.

Die Konzentrationsabhängigkeit der Absorption bietet auch eine einfache Möglichkeit, den zeitlichen Verlauf von chemischen Reaktionen (Auftauchen bzw. Verschwinden von Ionen) zu verfolgen.

k' bzw. ϵ hängen von der Wellenlänge ab. Die Funktionen $k'(\lambda)$ bzw. $\epsilon(\lambda)$ beschreiben das Absorptionsspektrum der Lösung. Unter einem Spektrum versteht man ein Diagramm, in dem die Intensität eines Strahlers bzw. eine ihr proportionale Größe (hier der Fotostrom) über der Wellenlänge aufgetragen ist. Die Stellen maximaler Absorption sind die Schwerpunkte von sog. Absorptionsbanden, die für jedes Ion charakteristisch sind und zu dessen Nachweis dienen können.

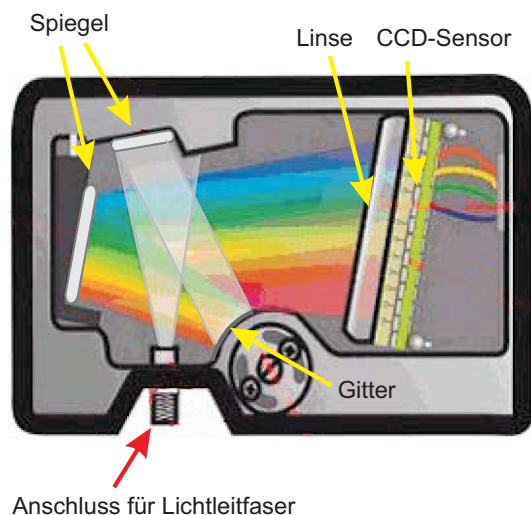


Abbildung 3: Strahlengang im Gitterspektrometer.

Zusammenfassend lässt sich mit den eingeführten Größen das Absorptionsgesetz folgendermaßen schreiben:

$$I = I_0 10^{-k'l} = I_0 10^{-\epsilon cl} \quad (6)$$

Es gibt zwei Methoden k' und ϵ zu messen:

1. Man misst die Intensität des austretenden Lichts als Funktion der Länge der durchstrahlten Flüssigkeit bei konstant gehaltener Konzentration. Auftragung von $\log I$ gegen l ergibt k' . Bei bekannter Konzentration errechnet sich daraus ϵ .
2. Man hält die Schichtdicke l konstant und variiert die Konzentration c in definierter Weise. Auftragen von $\log I$ gegen c ergibt zunächst das Produkt ϵl und damit bei bekanntem l wieder ϵ .

V.2 Bedienung des Spektrometers und der Software

Im Versuch wird ein computergesteuertes Gitterspektrometer (Abbildung 3) eingesetzt, das es erlaubt, den Spektralbereich einer Lichtquelle von 180 nm bis

950 nm zu registrieren. Die zu untersuchende Lichtquelle wird über eine Lichtleitfaser in das Spektrometer eingekoppelt und über ein optisches Gitter auf eine CCD-Zeile mit 3648 Pixel abgebildet. Dabei entspricht ein Pixel einem Wellenlängenintervall von 0,21 nm. Die Auflösung des Spektrometers beträgt etwa 1 nm. Das verfügbare Datenerfassungsprogramm *OceanView* erlaubt es den Dunkelstrom zu messen und bei der Datenaufnahme automatisch abzuziehen. Zur Reduzierung von Fluktuationen kann automatisch über viele Scans gemittelt werden.

Starten Sie das Programm *OceanView* vom Desktop aus. Dabei sollte die Datenaufnahme des Spektrometers automatisch gestartet werden. In diesem Modus wird das Spektrum mit der angegebenen Integrationszeit kontinuierlich gemessen und dargestellt. Sie sehen dann ein Fenster gemäß Abbildung 4. Falls das Spektrometer vom Programm nicht erkannt wird, dann überprüfen Sie ob der USB-Stecker des Spektrometers angeschlossen ist. Klicken Sie anschließend auf das Icon *Device Manager* oder drücken Sie die Taste F5. Im erscheinenden Dialogfenster können Sie dann das Spektrometer durch Drücken der Taste *Rescan* neu initialisieren.

In diesem Modus werden kontinuierlich Spektren aufgenommen und grafisch dargestellt. Schalten Sie eine Lichtquelle ein und richten Sie den Fasereinkoppler auf die Lichtquelle aus. Das Maximum des angezeigten Spektrums sollte bis mindestens 2/3 des Skalenbereichs gehen. Die Anpassung der gewünschten Intensität erfolgt über die gewählte Integrationszeit. Reduzieren Sie die Integrationszeit, wenn die Intensität zu hoch ist, d.h. das Spektrum gesättigt ist, vergrößern Sie die Integrationszeit wenn sie zu klein ist. Die Integrationszeit können Sie am linken Rand im Reiter *Aquisition Group Window* einstellen. Sie können das Rauschen des Spektrums verringern, indem Sie über mehrere Einzelmessungen mitteln. Dazu im Feld *Scans to Average* die Zahl der Einzelmessungen eintragen.

Dunkelmessung

Das Spektrometer liefert auch dann ein von Null verschiedenes Signal, wenn die Lichtquelle nicht eingeschaltet ist. Daher muss der Dunkelstrom für quantitative Messungen vom Spektrum abgezogen werden.

Stellen Sie zunächst die gewünschte Integrationszeit und die Anzahl der Messungen zur Mittelwertbildung ein. Schalten Sie anschließend die Lichtquelle aus und klicken Sie auf das Symbol der Dunkelmessung . Die korrigierte Messung wird in einem neuen Fenster mit der Bezeichnung *View Minus Bkgnd*

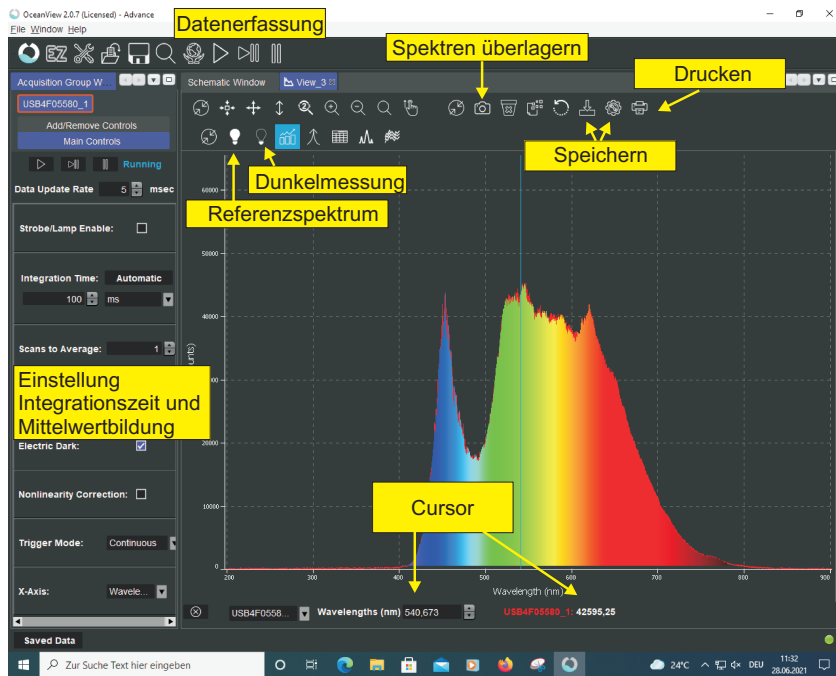



Abbildung 4: Oberfläche des Datenerfassungsprogramms.

angezeigt. Wenn Sie nun die Lichtquelle wieder einschalten sehen Sie in diesem Fenster das auf die Dunkelmessung korrigierte Spektrum.

Falls Sie die Integrationszeit oder die Zahl der Scans zur Mittelung ändern, müssen Sie eine neue Dunkelmessung durchführen.

VI Durchführung

Aufgabe 1: Absorptionsbanden von KMnO_4



Starten Sie die Software. Schalten Sie die Lichtquelle ein. Der Fasereinkoppler muss symmetrisch ausgeleuchtet sein. Falls dies nicht der Fall ist können Sie die Lichtquelle und die Lochblende nachjustieren. Zum Einstellen dieser Messung können Sie einen Assistenten verwenden. Klicken Sie auf das Icon . Wählen Sie den Assistenten *Absorbance* und anschließend *Absorbance only* → *Next*. Vari-

ieren Sie die Integrationszeit so dass das Spektrum nicht in Sättigung ist (Spektrum darf oben nicht abgeschnitten sein). Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein und klicken Sie auf *Next*. Nehmen Sie eine Referenzmessung des Spektrums auf indem Sie auf das Glühbirnen Symbol links oben klicken. Drücken Sie die Taste *Next*. Schalten Sie die Lichtquelle aus und machen Sie eine Dunkelmessung. Klicken Sie dazu auf die Glühbirne links oben im Dialogfeld und anschließend auf *Finish*. Die Messung wird nun in einem neuen Fenster mit dem Namen *AbsorbanceView* angezeigt. In diesem Modus wird das aktuelle Spektrum durch das Referenzspektrum dividiert und der Dunkelstrom abgezogen. Sie sehen nun die Absorption als Funktion der Wellenlänge. Auf der Ordinate ist die optische Dichte aufgetragen:

$$OD = -\log_{10} \left(\frac{I}{I_R} \right), \quad (7)$$

wobei I das aktuell gemessene Spektrum und I_R das zuvor bestimmte Referenzspektrum darstellen. Platzieren Sie die 12 cm lange Küvette in den Strahlengang und nehmen Sie das Absorptionsspektrum auf. Zoomen Sie in den Bereich zwischen 430 nm bis 660 nm und bestimmen Sie mit der Cursorfunktion die Lagen der Permanganatbanden in nm. Um den Cursor zu aktivieren klicken Sie mit der Maus in das Diagramm. Die Lage des Cursors können Sie dann im Eingabefeld unter dem Diagramm variieren. Drucken Sie das Diagramm aus und beschriften Sie die Absorptionsbanden mit den zuvor gemessenen Wellenlängen.

Aufgabe 2: Absorption einer KMnO_4 - Lösung als Funktion der Schichtdicke: Lambertsches Absorptionsgesetz

Platzieren Sie die kürzeste Küvette ganz rechts auf den Küvettenhalter. Klicken Sie im Fenster *View* in das Diagramm und stellen Sie den Cursor auf 525 nm ein. Die Intensität an der Cursorposition wird rechts neben dem Eingabefeld der Wellenlänge angezeigt. Stellen Sie die Integrationszeit so ein, dass das Spektrum an der Cursorposition gerade noch nicht in Sättigung ist, d.h. die Intensität sollte etwa bei 63500 liegen. Um die Intensität leicht zu erhöhen oder abzusenken, können Sie zusätzlich die drei Justageschrauben am Lampengehäuse verwenden. Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein. Schalten Sie die Lichtquelle aus und machen Sie eine Dunkelmessung. Klicken Sie dazu auf das Symbol . Anschließend die Lichtquelle wieder einschalten und die Aufnahme im Fenster *View Minus Bkgnd* starten. Messen Sie für alle Küvetten 5-mal die Intensität die unterhalb des Diagramms angezeigt wird. Verwenden Sie dazu den Aufnahmemodus . In diesem Modus stoppt die Aufnahme nach einer

Messung und die Intensität wird dauerhaft angezeigt. Drücken Sie erneut die Taste um die nächste Messung zu starten. Achten Sie darauf, dass die Küvetten immer rechts am Anschlag des Küvettenhalters platziert werden. Berechnen Sie die Mittelwerte und deren Fehler und tragen Sie diese sofort auf halblogarithmischem Papier gegen die Küvettenlänge ein.

Hinweis: Die Küvetten haben Einfluss auf den Strahlengang. Die Küvette bewirkt, dass sich der Durchmesser der Lochblende, die auf den Lichtleiter abgebildet wird verkleinert. Damit erhöht sich die Intensität. Insbesondere bei der längsten Küvette führt dies zu einem signifikanten Fehler. Messen Sie daher bei der längsten Küvette den Durchmesser der abgebildeten Lochblende an der Position des Fasereinkopplers einmal mit Küvette (D_{mK}) und einmal ohne Küvette (D_{oK}). Korrigieren Sie dann den Messwert I bei der längsten Küvette gemäß:

$$I_{\text{korrr.}} = I \frac{D_{mK}^2}{D_{oK}^2}. \quad (8)$$

Zum Ausmessen können Sie das Stahllineal oder die Schieblehre verwenden.

Aufgabe 3: Absorption einer KMnO_4 -Lösung als Funktion der Konzentration: Beersches Gesetz

Bei konstanter Schichtdicke l wird die Konzentration c schrittweise erhöht. Als erstes wird eine sogenannte Nullmessung mit reinem VE-Wasser¹ gemacht. Geht man von einem abgemessenen Volumen V_0 reinen Wassers aus und gibt nach und nach die Volumina V_1, V_2, \dots einer KMnO_4 -Lösung bekannter Konzentration \tilde{c} zu (in der Bürette beträgt die Konzentration $\tilde{c}=10^{-3}\text{mol/l}$), so erhält man die Konzentrationen

$$c_0 = \tilde{c} \frac{0}{V_0} = 0, \quad c_1 = \tilde{c} \frac{V_1}{V_0 + V_1}, \quad c_2 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2}{V_0 + V_1 + V_2},$$

$$c_3 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3}, \quad c_4 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4}.$$

Aus den oben angegebenen Gleichungen ergibt sich für $V_0=21$ ml, $V_1=1,4$ ml, $V_2=1,6$ ml, $V_3=4,0$ ml und $V_4=14,0$ ml ($V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V_0$) die gewünschte

1:2-Abstufung, nämlich

$$\left(\frac{10^{-3}}{16} : \frac{10^{-3}}{8} : \frac{10^{-3}}{4} : \frac{10^{-3}}{2} \right) \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

Füllen Sie die rechteckige Küvette mit 21 ml VE- Wasser und stecken Sie diese in den rechten Küvettenhalter. Variieren Sie die Integrationszeit so, dass das Spektrum im Fenster *View* bei 525 nm gerade noch nicht in Sättigung ist. Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein. Führen Sie wieder eine Dunkelmessung durch. Die Messung führen Sie dann in dem neu angelegten Fenster *View Minus Bkgnd* durch. Messen Sie für die Konzentration V_0 bis V_4 jeweils 5- mal die Intensität. Berechnen Sie wieder die Mittelwerte und deren Fehler und tragen Sie diese in das zuvor angefertigte Diagramm mit ein. Wählen Sie hierfür eine zusätzliche Abszisse.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Die gemessenen Intensitäten werden sofort in ein gemeinsames halblogarithmisches Diagramm mit zwei (linearen) Abszissenskalen für l und für c eingezeichnet. Zu Hause berechnen Sie aus der Steigung der „Lambert-Geraden“ (mit $c = 5 \times 10^{-5}$ mol/l) den dekadischen Absorptionskoeffizienten k' und hieraus dann die Molarextinktion ϵ gemäß $\epsilon = k'/c$. (Berücksichtigen Sie dazu, dass eine Intensitätsabnahme um den Faktor 10 gerade eine Änderung des dekadischen Logarithmus um 1.0 bedeutet: die hierzu erforderliche Absorptionlänge l' entnehmen Sie der Zeichnung. k' ist dann gegeben durch $k' = 1/l$). Schätzen Sie die Fehler ab. Analog verfahren Sie bei der „Beer-Geraden“. Geben Sie die Molarextinktion sowohl in liter/(mol cm) als auch in cm^2/mol an. Wie gut stimmen die Werte aus der Lambert- und aus der Beer-Geraden überein?

¹VE-Wasser: Voll Entsalzenes Wasser.

Versuch 35 Fotoeffekt

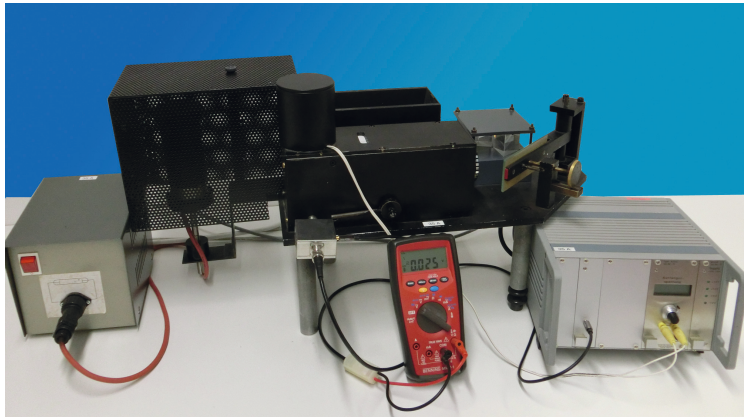


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Fotoeffekt.

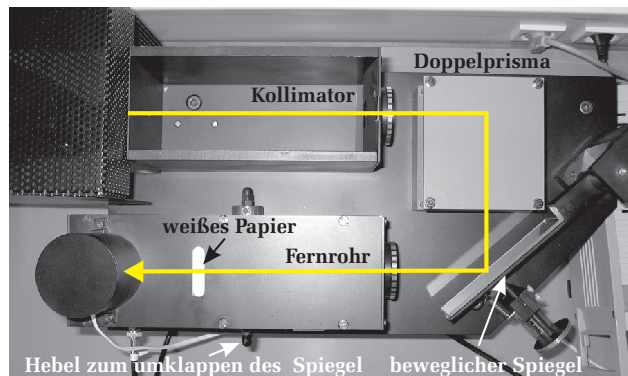


Abbildung 2: Strahlengang im Spektrometer.

I Messaufbau

- Spektrometernaufbau mit zwei Prismen und eingebauter Vakuumfotозelle
- Hg-Spektral-Lampe mit Netzteil

- Piko-Amperemeter mit externen Netzteil
- Multimeter

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Fotoeffekt, Aufbau eines Prismenspektrometers.

Verständnisfragen:

1. Licht kann Elektronen aus Metallen auslösen. Geht das für jede Frequenz und für alle Metalle? Der Effekt wurde zuerst mit UV Licht beobachtet. Ist das Zufall?
2. Wovon hängt die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen ab?
 - vom Metall?
 - von der Intensität des Lichts und damit vom E-Feld?
 - von der Wellenlänge des Lichts?
3. Erklären Sie die Einsteinsche Gleichung $h\nu = A + 1/2mv_e^2$. Warum haben beim Versuch nicht alle Elektronen dieselbe kinetische Energie?
4. Wo wird der fotoelektrische Effekt angewandt?
5. Warum ist der „Dunkelstrom“ bei hohen negativen Sperrspannungen negativ? Was würde passieren, wenn Sie den Anodenring direkt beleuchten würden?

IV Aufgabe

- Für fünf starke Linien des Hg-Spektrums zwischen gelb und nahem Ultraviolett ist die Grenzenergie der beim Fotoeffekt emittierten Elektronen mit der Gegenfeldmethode zu messen. Daraus ist das Planck'sche Wirkungsquantum h zu bestimmen.

V Grundlagen

Dieser Versuch demonstriert die Existenz von Lichtquanten. Die Emission von Elektronen bei der Bestrahlung von Metalloberflächen mit Licht zeigt folgendes Verhalten:

- Die Elektronemission erfolgt erst für Licht mit einer Mindestfrequenz, die vom Metall abhängt (für die meisten Metalle wird UV-Licht benötigt).
- Die Energie der emittierten Elektronen hängt nur von der Frequenz des Lichts ab und dem Metall, nicht aber von der Lichtintensität, wie klassisch erwartet, weil sie proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke der Lichtwelle ist.

Im Versuch wird die Emission von Elektronen aus einer Metalloberfläche nachgewiesen und die maximale Energie der Elektronen als Funktion der Lichtfrequenz gemessen.

V.1 Energie von Leitungselektronen im Metall

Zum Verständnis des Fotoeffekts, müssen wir uns zunächst näher mit den elektronischen Eigenschaften der Metalle beschäftigen. Bei der Bildung eines Metalls geben die einzelnen Metallatome eine bestimmte Anzahl ihrer Valenzelektronen ab und bilden ein Metallgitter, bestehend aus positiv geladenen Atomrümpfen und delokalisierten Elektronen. Diese Elektronen können sich im ganzen Metall nahezu frei bewegen und werden als Leitungselektronen bezeichnet. Allerdings können die Leitungselektronen das Metallgitter nicht ohne weiteres verlassen. Sie sind im Metallgitter gebunden.

Die Energie der Leitungselektronen eines Metalls unterliegt einer ganz bestimmten Verteilung (Fermiverteilung), die von der Temperatur des Metalls abhängt. Bei $T=0\text{K}$ sind alle Energiezustände von Null bis zu einer Maximalenergie, die

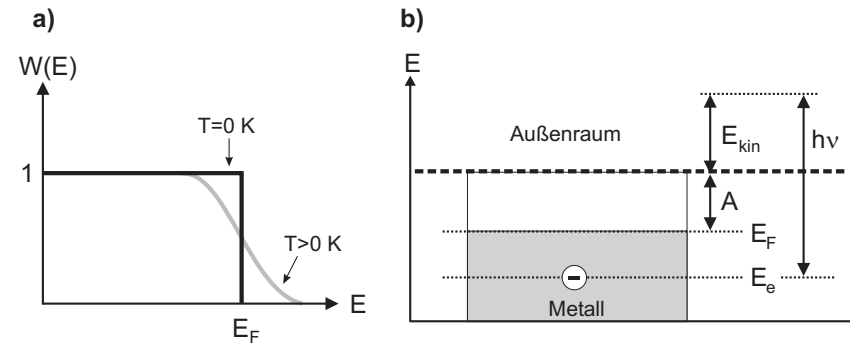


Abbildung 3: a) Energieverteilung der Elektronen eines Metalls. b) Potenzialtopfmodell.

als Fermienergie E_F bezeichnet wird, besetzt. Solch eine Verteilung ist in Abbildung 3a) dargestellt. $W(E)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, das ein Elektron die Energie E besitzt. Bis zur Fermienergie ist die Besetzungswahrscheinlichkeit für alle Energien Eins, darüber Null. Die Verteilung besitzt daher bei der Fermienergie eine scharfe Kante (Fermikante). Bei Temperaturen über 0K ist die Fermikante „aufgeweicht“. Es gibt dann auch Elektronen mit Energien oberhalb der Fermikante. Dementsprechend sind einige Energieniveaus mit $E < E_F$ unbesetzt.

Die energetischen Verhältnisse sind anhand eines Potenzialtopfs in Abbildung 3b) dargestellt. Die Leitungselektronen sind im Metall gebunden und bevölkern dort kontinuierlich alle Energiezustände von Null bis zur Fermienergie. Um ein Elektron aus dem Metall herauszulösen, muss eine zusätzliche Energie aufgebracht werden. Die Energie, die benötigt wird um Elektronen von der Fermienergie aus, aus dem Potenzialtopf in den Außenraum zu bringen, wird als Austrittsarbeit A bezeichnet.

Trifft nun ein Photon mit der Energie $h\nu$ auf ein Leitungselektron der Energie E_e , so überträgt es seine Energie auf das Elektron, so dass dieses bei einer hinreichend großen Photonenenergie die Metalloberfläche verlassen kann und zudem noch eine kinetische Energie E_{kin} erhält. Aus dem Energiesatz folgt dann:

$$h\nu = A + (E_F - E_e) + E_{kin}. \quad (1)$$

Die kinetische Energie der emittierten Elektronen ist am größten für Elektronen an der Fermikante, d.h. $E_e = E_F$. Diese maximale Energie

$$E_{kin}(max) = h\nu - A \quad (2)$$

kann durch Messung der Strom-Spannungskurve einer Fotozelle bestimmt werden. Das ist das Ziel des Experiments. Abbildung 4 skizziert den Aufbau einer

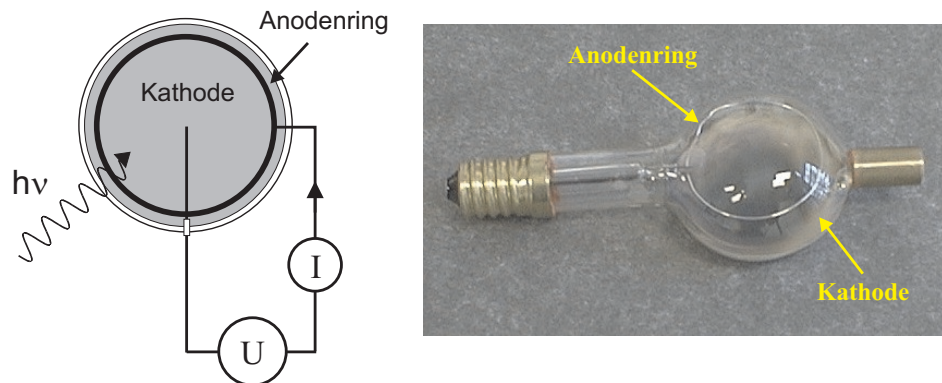


Abbildung 4: Aufbau einer Fotozelle.

Fotozelle. Die Innenseite eines evakuierten Glaskolbens ist auf einer Seite mit einem Metall (Kalium), welches eine geringe Austrittsarbeit besitzt, bedampft. Diese Metallfläche stellt die Fotokathode dar. Darüber, in einigen Millimetern Abstand, befindet sich die Anode, die als dünner Drahtring ausgelegt ist.

Zwischen Anode und Kathode lässt sich eine Spannung U anlegen. Befindet sich die Anode auf positivem Potenzial, so erreichen alle aus der Kathode ausgelösten Fotoelektronen die Anode. Bei negativer Spannung nimmt der Fotostrom ab, da nur noch Elektronen mit höherer kinetischer Energie und damit größerem E_e die Anode erreichen. Bei der Sperrspannung U_s wird der Strom schließlich Null, so dass auch die Elektronen an der Fermikante, mit $E_e = E_F$, die Anode nicht mehr erreichen.

Der Fotostrom ist daher konstant für positive Spannung, während er für negative Spannungen abnimmt. Bei $T = 0\text{K}$ verschwindet der Fotostrom bei $U = U_s$. Tatsächlich nähert sich der Strom aber asymptotisch dem Wert Null, da es für $T > 0\text{K}$ auch Leitungselektronen oberhalb der Fermikante gibt, deren Zahl aller-

dings mit dem Energieabstand von der Fermikante exponentiell abnimmt (Abbildung 5). Im Versuch steht einer ebenen Kathode eine Ringelektrode gegenüber.

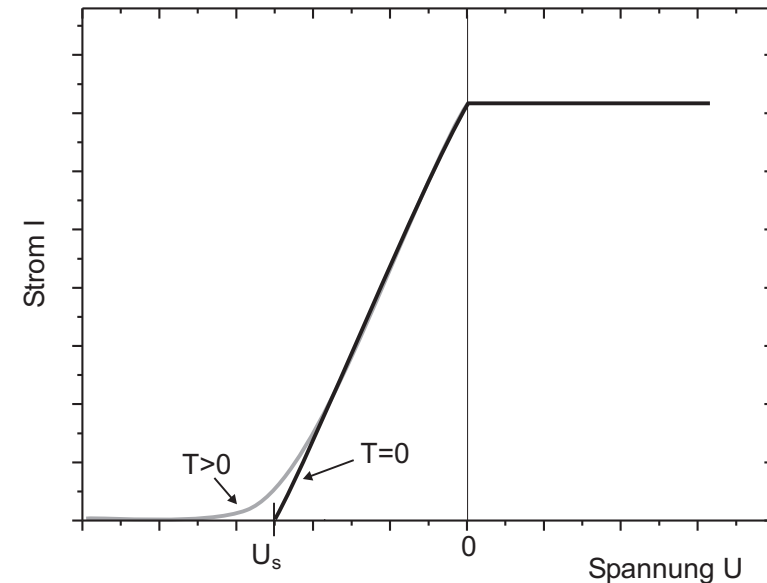


Abbildung 5: Strom-Spannungskennlinie einer idealen Fotozelle.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fotoelektronen auf die Anode treffen, selbst bei kleinen positiven Spannungen U klein. Es braucht eine hohe positive Saugspannung um alle Fotoelektronen dort zu sammeln, d.h. den Fotostrom in Sättigung zu bringen (Abbildung 6). Zur Bestimmung von U_s müssen Sie wissen, welchen funktionalen Verlauf die Strom-Spannungskennlinie in der Nähe von U_s für $T > 0$ hätte. Dies hängt von der Geometrie von Anode und Kathode ab. Es lässt sich zeigen, dass für unsere Geometrie diese Funktion ungefähr $I \propto U^2$ ist. Daher wird bei der Auswertung \sqrt{I} gegen U aufgetragen und eine Gerade zum Schnittpunkt $I = 0$ extrapoliert (Abbildung 7). Die Sperrspannung U_s ist dann gegeben durch

$$e U_s = E_{kin}(max) = h\nu - A \propto \sqrt{I}. \quad (3)$$

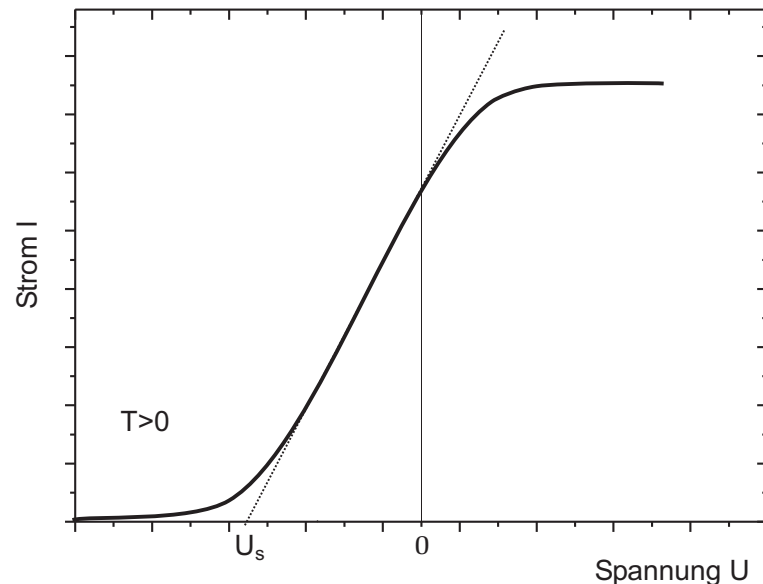


Abbildung 6: Strom-Spannungskennlinie einer realen Fotozelle.

V.2 Der Versuchsaufbau im Detail

Auf einer Grundplatte ist ein Prismen-Spektralapparat aufgebaut. Um die Dispersion zu erhöhen, sind zwei gleichartige Flintglas Prismen hintereinander angeordnet. Anders als beim Versuch 33 wird das Spektrum durch einen beweglichen Spiegel über den Eingang des „Fernrohrs“ bewegt. In dem „Fernrohr“-Kasten ist der Austrittspalt eingebaut, hinter dem sich eine Fotozelle befindet, so dass die verschiedenen Spektrallinien einzeln auf die Fotokathode gelenkt werden können. Vor dem Austrittspalt befindet sich in dem Kasten ein schwenkbarer Spiegel, mit dem das Licht zur Beobachtung auf einen eingebauten Schirm (weißes Papier) gelenkt werden kann. Da normales Papier im UV fluoresziert, kann auf dem Schirm auch die UV-Linie bei 365,0 nm beobachtet werden.

Fällt Licht hinreichend großer Energie (Frequenz) auf die Fotokathode, so werden daraus Elektronen mit einer kinetischen Energie von $E = h\nu - A$ ausgesandt. Ist der Ring über ein Amperemeter mit der Kathode verbunden, so fließt ein

Strom. Im Versuch wird die Kathode (über das Pico-Amperemeter) geerdet und an den Ring eine Vorspannung gegen Erde gegeben. Ist diese Vorspannung hinreichend negativ, können keine Elektronen mehr auf dem Ring ankommen. Aus der linearen Abhängigkeit der hierzu benötigten Spannung mit der Frequenz kann dann die Planck'sche Konstante h bestimmt werden.

Da das Auflösungsvermögen des Spektrometers nicht so gut ist, sind in der Tabelle nur die starken Linien des Hg-Spektrums vermerkt und benachbarte Linien sind zusammen gefasst worden. (*).

Nr.	Wellenlänge (nm)	Frequenz (THz)	Farbe	Intensität
1	623,4	480,9	rot	mittel
2	→578*	518,7	gelb	sehr stark
3	→546,1	549,0	grün	stark
4	491,6	609,8	blaugrün	mittel
5	→435,8	687,9	blau	stark
6	→405*	740,2	violett	stark
7	→365,0	821,3	UV	stark

Die auftretenden Fotoströme sind sehr klein (einige 10 pA) und müssen daher verstärkt werden. Dies geschieht mit einem Strom-Spannungswandler. Der von der Fotozelle gelieferte Strom fließt dabei durch einen Widerstand (1 GΩ). Nach dem Ohmschen Gesetz fällt dann am Widerstand eine Spannung ab die proportional zum Fotostrom ist. Diese Spannung wird mit einem hochohmigen Verstärker nochmals um den Faktor 11 verstärkt. Sie messen also den Strom indirekt über eine Spannungsmessung, wobei eine Spannung von 1 V einen Strom von 91 pA entspricht. Im Folgenden wird der Fotostrom durch U_I angegeben. Dies impliziert, dass der Fotostrom durch eine dazu proportionale Spannung gemessen wird.

VI Durchführung des Versuchs

Aufnahme der Strom-Spannungskennlinie für verschiedene Emmissionslinien des Hg-Spektrums

Schalten Sie die Spektrallampe an und warten Sie einige Minuten bis die Intensität konstant bleibt. Schwenken Sie den Spiegel im Fotozellenkasten mit dem Hebel so nach oben, dass auf dem kleinen weißen Schirm oben auf dem Kasten das Spektrum erscheint. Es sind fünf kräftige Linien zu beobachten, eine gel-

be und grüne Linie, danach drei weitere Linien, die allerdings auf dem Schirm mit Fehlfarben angezeigt werden. So erscheint die blaue Linie eher violett, die violette Linie und die UV Linie erscheinen in einem blassen blau.

Durch Drehen an der großen Rändelschraube können Sie den Spektrometer-Spiegel verstellen und die Linien über die Marke schieben, die die Lage des Spaltes angibt.

Es genügt, die Strom-Spannungskennlinien für die mit einem Pfeil gekennzeichneten Linien bei 578 nm (gelb), 546 nm (grün), 436 nm (blau), 405 nm (violett) und 365 nm (UV) zu messen.

Hinweis zur Durchführung: Den Fotostrom messen Sie mit dem Multimeter im Bereich \bar{V} . Schliessen Sie das Multimeter an die BNC- Buchse des Verstärkers an. Das rote Kabel verbinden Sie mit dem V- Eingang des Multimeters und das schwarze Kabel mit dem COM- Eingang.

Klappen Sie den Fotozellenspiegel (siehe Abbildung 2) in den Strahlengang, so dass Sie die Spektrallinien auf dem weißen Schirm sehen und justieren Sie den rechten beweglichen Spiegel (siehe Abbildung 2) mit der Rändelschraube so, dass die UV-Linie innerhalb der mittleren Markierung des Schirms liegt. Die Vorspannung stellen Sie auf 0 V ein. Klappen Sie nun den Fotozellenspiegel aus dem Strahlengang und beobachten Sie den Messwert des Multimeters. Versuchen Sie diesen Wert durch Drehung der Rändelschraube in kleinen Schritten zu maximieren. Das garantiert, dass Sie die Linie zentral auf die Fotokathode abbilden.

Nehmen Sie nun die Kennlinie ab einer Vorspannung von $U=0$ V in Schritten von 0,1 V hin zu negativen Vorspannungen auf. Beenden Sie die Messreihe wenn U_I einen Wert im Bereich von 20-50 mV erreicht. Messen Sie anschliessend noch den Untergrundstrom U_{I0} bei einer hohen Sperrspannung (-4 V). Hinweis: Der Untergrundstrom entspricht nicht dem Dunkelstrom eines optischen Detektors bei abgedeckter Lichtquelle. Der Strom wird in der Regel bei hohen negativen Vorspannungen negativ. Aufgrund des Dampfdrucks des Kaliums der Fotokathode können sich auf dem Anodenring Kaliumniederschläge abscheiden. Wird die Anode beleuchtet können auch aus der Anode Elektronen herausgelöst werden. Beachten Sie daher das Vorzeichen.

Wiederholen Sie diese Messung für die violette, blaue, grüne und gelbe Linie. Für diese Linien beginnen Sie bei einer Vorspannung von +0,3 V.

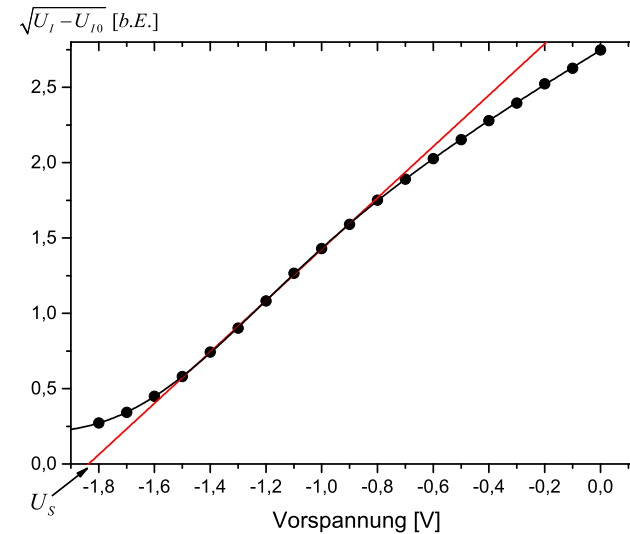


Abbildung 7: Wurzel aus dem gemessenen Fotostrom abzüglich des Untergrundstroms als Funktion der Spannung.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Die Ströme werden auf den Untergrundstrom U_{I0} (bei einer hohen negativen Gegenspannung) korrigiert und aus den so erhaltenen Werten die Wurzel gezogen. Dazu ist es zweckmäßig, für jede Farbe eine Tabelle der nachfolgenden Art anzulegen. Die ersten beiden Zeilen sind die Messwerte, die unteren beiden dann Ihre Auswertung. Die Zahlenwerte sind willkürlich gewählt.

U [V]	0,3	0,2	0,1	0	-0,1	...	-0,5	-0,6	...
U_I [V]	8,61	8,14	7,62	6,81	6,23	...	5,064	4,469	...
$U_I - U_{I0}$ [V]	8,67	8,20	7,68	6,87	6,29	...	5,124	4,529	...
$\sqrt{U_I - U_{I0}}$	2,94	2,86	2,77	2,62	2,51	...	2,26	2,06	...

Nur die letzte Zeile wird für alle Linien graphisch aufgetragen. Auf die Ordinate tragen sie die Wurzel des korrigierten Stroms auf und auf der Abszisse die

eingestellten Vorspannungen. In Abbildung 7 ist als Beispiel die Kennlinie der UV- Linie dargestellt.

An den linearen Teil wird ein Lineal angelegt und aus dem Schnitt mit der Spannungsachse die Spannung extrapoliert, bei der die Elektronen gerade den Ring nicht mehr erreichen ($\sqrt{U_I - U_{I0}} = 0$). Achten Sie auf einen vernünftigen Maßstab, so dass Sie die Steigung gut bestimmen können. Es ist wichtig, dass Sie wirklich nur den linearen Teil berücksichtigen. Die Messwerte bei sehr kleinen und großen Vorspannungen weichen in der Regel vom linearen mittleren Teil ab.

Der Fehler von U_s wird dadurch bestimmt, wie stark Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden innerhalb der Messfehler im linearen Bereich variieren können!

Fertigen Sie ein weiteres Diagramm an, in das Sie die ermittelten Sperrspannungen der jeweiligen Linien gegen ihre Frequenzen auftragen. Aus der Steigung können Sie durch Multiplikation mit der Elementarladung das Plancksche Wirkungsquantum h bestimmen.

Versuch 223 Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung

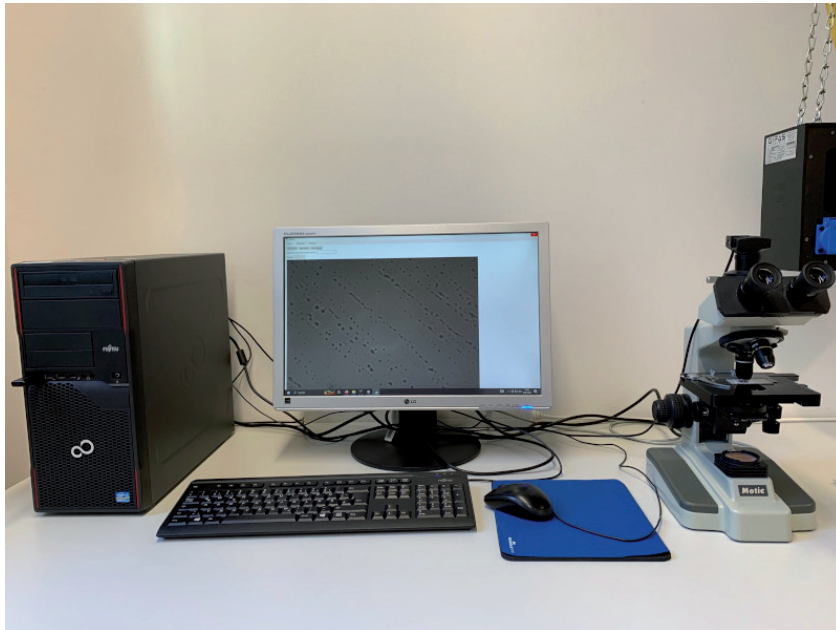


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Messprogramm, Jupyternotebook und Excel
- Thermometer
- Objektmikrometer

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Demtröder, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Die Grundlagen zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Sie in der Versuchsbeschreibung des Versuchs 251: *Statistik des radioaktiven Zerfalls* nachlesen.
- Homepage des Praktikums <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomial- und Gauß-Verteilung.

Verständnisfragen:

- Was ist Wärme aus Sicht der kinetischen Theorie der Wärme? Was besagt der Gleichverteilungssatz? Wie hoch ist die thermische Geschwindigkeit eines Partikels der Masse 10^{-15} kg bei Zimmertemperatur?
- Berechnen Sie das Produkt kT für Zimmertemperatur und geben Sie diesen in der Einheit eV an. Diesen Wert sollten Sie sich für die Zukunft unbedingt merken.
- Was bezeichnet man als Brownsche Bewegung? Worin liegt die Ursache dieser Bewegung? Welche Größen haben Einfluss auf die Brownsche Bewegung?
- Wie groß ist der zu erwartende Wert der mittleren Verschiebung bzw. der mittleren quadratischen Verschiebung eines Partikels.
- Berechnen Sie die mittlere quadratische Verschiebung eines Partikels (Partikelradius $a=500$ nm) suspendiert in Wasser ($T=20^\circ\text{C}$) innerhalb eines Zeitraums von $t=1$ s. Die Viskosität von Wasser können Sie Abbildung 21 entnehmen.

- Wozu wird das Immersionsöl benötigt?

IV Aufgaben

1. Präparieren Sie eine Mikroskopprobe einer Partikelsuspension.
2. Nehmen Sie jede Sekunde und mindestens 150 Mal das Mikroskopbild eines einzelnen Partikels auf.
3. Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops mit einem Objektmikrometer.
4. Vermessen Sie die Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder.
5. Berechnen Sie aus der mittleren quadratischen Verschiebung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante.

V Motivation

Mit Blütenpollen läßt sich die Existenz von Atomen und Molekülen beweisen

„Heute vor 100 Jahren, am 11. Mai 1905, reichte Albert Einstein bei den „Annalen der Physik“ eine wichtige Arbeit ein, in der er die sogenannte Brownsche Bewegung erklärte. Dem schottischen Botaniker Robert Brown war bereits im Jahr 1827 aufgefallen, daß Blütenpollen in einem Glas Wasser eine eigenartige Zickzackbewegung ausführen. Was war die Ursache dafür? Alle Versuche, diese Brownsche Bewegung zu erklären, scheiterten zunächst. Sie blieb jahrzehntelang geheimnisvoll. Erst Albert Einstein erkannte, daß die Bewegung der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit durch ein fortwährendes Stoßen der Wassermoleküle verursacht wird. Dies war in jener Zeit tatsächlich noch ein gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist. Und gleichzeitig paßte Einsteins Beschreibung zur molekularen Theorie der Wärme. Je wärmer beispielsweise Wasser ist, um so größer ist die mittlere Geschwindigkeit, mit der die Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stöße verursachen können. So erklärt sich auch der Begriff Thermodynamik: Wärme ist eben etwas Dynamisches. Einstein schrieb damals an einen Freund, daß „unter der Voraussetzung der molekularen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von der Größenordnung

1/1000 Millimeter bereits eine wahrnehmbare ungeordnete Bewegung ausführen müssen, welche durch die Wärmebewegung erzeugt ist.“

Nahezu zeitgleich mit Albert Einstein lieferte auch der polnische Physiker Marian Smoluchowski eine korrekte Erklärung der Brownschen Bewegung. Es war dann allerdings der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin der einige Jahre später die Brownsche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigte. Dafür wurde Perrin im Jahr 1926 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. ¹

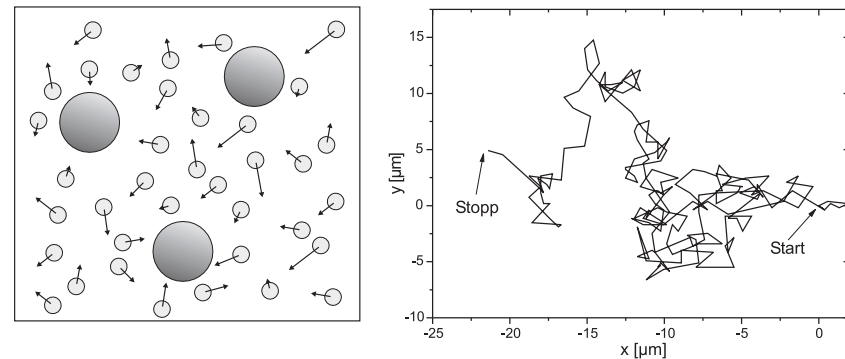


Abbildung 2: Links: Modell der Brownschen Bewegung. Die Moleküle des umgebenden Mediums stoßen aufgrund ihrer thermischen Energie mit den suspendierten Partikeln, wodurch sich diese auf völlig unregelmäßigen Bahnen bewegen. Rechts: Gemessene Bahn eines einzelnen Partikels.

In diesem Versuch werden Sie die Brownsche Bewegung von Partikeln suspendiert in Wasser mit einem Mikroskop beobachten und deren statistische Bewegung untersuchen (Abbildung 2). Durch Vermessen der Teilchenbahn und der Berechnung der pro Zeiteinheit auftretenden mittleren Verschiebung, können Sie die Boltzmannkonstante bestimmen.

Eine genaue Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung ist nur bei der Beobachtung sehr vieler Einzelschritte möglich und daher im Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich. Bei einer sorgfältigen Durchführung ist aber eine Genauigkeit von besser als 10 % möglich.

¹Norbert Lossau, Artikel vom 11. Mai 2005 in der Zeitung „Die Welt“

VI Grundlagen

VI.1 Brownsche Bewegung

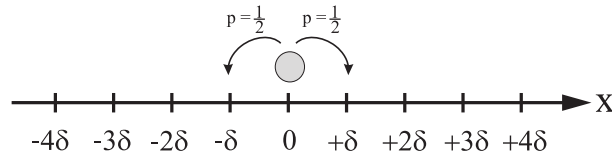


Abbildung 3: *Eindimensionaler Random-Walk.* Bei jedem Stoß bewegt sich das Partikel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts. Die Sprungweite δ soll bei allen Stößen gleich groß sein

Die Brownsche Bewegung lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Random-Walk Modell quantitativ beschreiben (Abbildung 3). Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, dass sich ein Partikel nur in einer Dimension, der x -Richtung, bewegen kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Partikel an der Position $x = 0$. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, das Partikel nach der Zeit t im Intervall $[x, x + \Delta x]$ zu finden. Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Das Partikel erfährt alle τ -Sekunden einen Stoß. Innerhalb der Zeit t treten somit $n = t/\tau$ Stoßprozesse auf.
- Bei jedem Stoß wird das Partikel um die gleiche Distanz δ verschoben. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Partikel dabei um $+\delta$ nach rechts, bzw. um $-\delta$ nach links bewegt, sind gleich groß.
- Bei mehreren Partikeln hängt die Brownsche Bewegung eines einzelnen Partikels nicht von der Bewegung der anderen Partikel ab. Jedes Partikel bewegt sich völlig unabhängig von den anderen, auch dann, wenn sich zwei oder mehrere Partikel sehr nahe kommen.

Damit sich das Partikel nach n -Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet, muss es insgesamt $(n+m)/2$ -mal in die positive x -Richtung gelaufen sein und $(n-m)/2$ -mal in die negative Richtung. Dabei ist zu beachten, dass m bei geradem n ebenfalls gerade sein muss und entsprechend bei ungeradem n , ungerade sein muss.

Beispiel: Befindet sich das Partikel nach $n = 10$ Stößen an der Position 6δ (d.h. $m = 6$), so ist es insgesamt $(n+m)/2 = 8$ -mal nach rechts gesprungen und $(n-m)/2 = 2$ -mal nach links. Nun gibt es aber verschiedene Möglichkeiten, wie das Partikel an die Position $x = m\delta$ gekommen ist. Es kann z.B. am Anfang zweimal nach links gesprungen sein und anschließend hintereinander 8 Mal nach rechts gelaufen sein. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \quad (1)$$

Möglichkeiten, welchen Weg das Partikel gelaufen sein könnte. Für unser Beispiel mit $n = 10$ und $m = 6$ ergeben sich 45 verschiedene Schrittfolgen.

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(m; n)$ angeben, mit welcher sich das Partikel nach n -Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet. Diese ist gerade durch die Binomialverteilung² gegeben:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2}, \quad (2)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Sprungs nach links bzw. nach rechts angibt. Da die Sprungwahrscheinlichkeiten in beiden Richtungen gleich groß sind, gilt $p = 1/2$ und somit

$$P(m; n) = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

In der Regel ist die Zeit τ zwischen zwei Stößen sehr klein, so dass $n = t/\tau$ bei einer Beobachtungszeit von typischerweise $t = 1$ s, eine sehr große Zahl darstellt. Für diesen Fall können wir $n!$ und $m!$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel

$$n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (4)$$

nähern. Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für die Wahrscheinlichkeit $P(m; n)$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \quad (5)$$

²Siehe auch Versuch 251 „Statistik des radioaktiven Zerfalls“

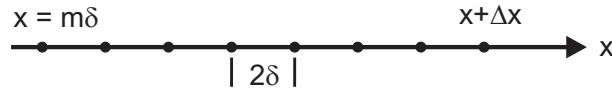


Abbildung 4: Anzahl der Positionen im Bereich $[x, x + \Delta x]$.

Wir wollen nun statt m und n , die leicht messbaren Größen x und t verwenden. Da m entweder gerade oder ungerade ist, gilt für Δm :

$$\Delta m = \pm 2 \tag{6}$$

Im Intervall $[x, x + \Delta x]$ gibt es somit $\frac{\Delta x}{2\delta}$ mögliche Positionen (Abbildung 4). Somit folgt:

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x. \tag{7}$$

Substituieren wir $n = t/\tau$ sowie $m = x/\delta$ und definieren zusätzlich die Größe D :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau}, \tag{8}$$

so erhalten wir schließlich für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit t innerhalb des Bereichs $[x, x + \Delta x]$ zu finden:

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{9}$$

$P(x; t)$ in Gleichung (9) ist eine Gaußverteilung (Abbildung 5). Die allgemeine Form solch einer Verteilung lautet

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

wobei $\langle x \rangle$ den Mittelwert und σ^2 die Varianz, bzw. σ die Standardabweichung beschreiben. Da die Verteilung (9) symmetrisch zu $x = 0$ ist, verschwindet die mittlere Verrückung $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0. \tag{11}$$

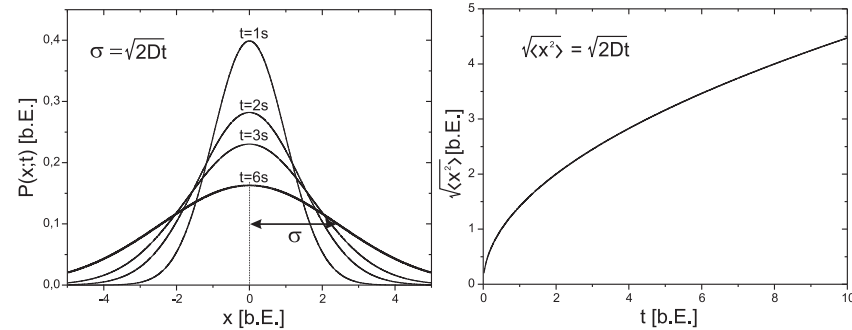


Abbildung 5: Links: Gaußverteilung mit dem Mittelwert $\langle x \rangle = 0$ und der Varianz $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 2Dt$. Da die Varianz zeitabhängig ist, wird die Verteilung mit zunehmender Zeit immer breiter. Rechts: Mittelere Verschiebungswurzel $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ als Funktion der Zeit.

Dies ist auch sofort einzusehen, da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel bei einem Stoß entweder nach links oder nach rechts springt, gleich groß ist. Der verschwindende Mittelwert $\langle x \rangle$ ist daher nicht geeignet, die Brownsche Bewegung des Partikels zu beschreiben. Anders sieht es aus, wenn wir das mittlere Verschiebungswurzel $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ berechnen:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2. \tag{12}$$

Das mittlere Verschiebungswurzel entspricht der Varianz $\sigma^2 = 2Dt$ und damit der Breite der Verteilung.

Damit können wir das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung wie folgt formulieren:

Der mittlere Abstand ($\equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) eines Partikels vom Ursprungsort, nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit t zu:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad \text{Einstein-Smoluchowski-Gleichung.} \tag{13}$$

Bisher haben wir die Brownsche Bewegung nur in einer Dimension untersucht. Unser Ergebnis lässt sich aber sehr einfach auf mehrere Dimensionen übertragen.

Findet die Brownsche Bewegung in zwei Dimensionen statt, so gilt für das mittlere Verschiebungsquadrat³ $\langle r^2 \rangle$:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (14)$$

Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, liefert jeder Summand den Beitrag $2Dt$ und somit

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}, \quad (15)$$

bzw. im Dreidimensionalen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}. \quad (16)$$

Der Parameter D wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die Beweglichkeit des Partikels im umgebenden Medium. Nach Einstein ist der Diffusionskoeffizient gegeben durch

$$D = \frac{kT}{f}, \quad (17)$$

wobei f den Reibungskoeffizienten, k die Boltzmannkonstante und T die Temperatur der Flüssigkeit darstellen. Für kugelförmige Partikel mit dem Radius a , die in einer Flüssigkeit der Viskosität η suspendiert sind, berechnet sich f nach dem Stokesschen Gesetz (siehe Versuch 212 - Zähigkeit von Flüssigkeiten):

$$f = 6\pi\eta a. \quad (18)$$

Damit folgt für den Diffusionskoeffizient nach Stokes-Einstein:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (19)$$

Diese Beziehung verknüpft die makroskopischen Größen η , a und T mit den mikroskopischen Größen δ und τ in Gleichung (8). Einsetzen von (19) in Gleichung (15), liefert für das mittlere Verschiebungsquadrat kugelförmiger Partikel im Zweidimensionalen:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t. \quad (20)$$

³Im mehrdimensionalen Fall schreiben wir für das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ anstatt $\langle x^2 \rangle$.

Damit haben wir die Möglichkeit die Boltzmannkonstante experimentell zu bestimmen. Sind die Größen T , η und der Kugelradius a der Partikel bekannt, so kann durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrats die Boltzmannkonstante berechnet werden:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle. \quad (21)$$

VI.2 Bedienung des Versuchsaufbaus

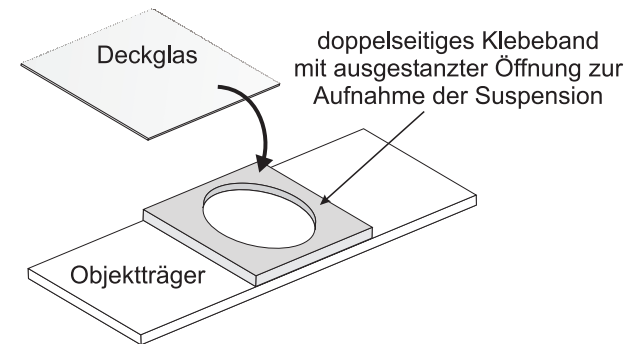


Abbildung 6: Skizze der Probenfassung. Die ausgestanzte Öffnung des doppelseitigen Klebebands wird mit der zu untersuchenden Suspension befüllt und anschließend mit dem Deckglas verschlossen.

Probenpräparation

In diesem Versuch wird die Brownsche Bewegung von in Wasser suspendierten Silicananopartikeln vermessen. Um diese mit dem Mikroskop beobachten zu können, benötigen wir eine Probenfassung, die einerseits dick genug ist, sodass sich die suspendierten Partikel darin frei bewegen können, andererseits muss diese auch dünn genug sein, damit eine Fokussierung mit dem Mikroskop möglich ist. Um dies zu gewährleisten, werden Sie zunächst eine Probenfassung gemäß Abbildung 6 anfertigen. Auf einen Objektträger wird ein doppelseitiges Klebeband aufgebracht, in dessen Mitte zuvor ein Loch ausgestanzt wurde. In diese Öffnung wird die Probenflüssigkeit eingefüllt und mit einem Deckglas verschlossen. Das doppelseitige Klebeband erfüllt dabei zwei Aufgaben: Zum einen

vergrößert dieses das Probenvolumen, so dass sich die suspendierten Partikel frei bewegen können, zum anderen dient es zur Abdichtung der Flüssigkeit, wodurch ungewollte Strömungen durch Verdunstungsprozesse unterdrückt werden.

Für die Anfertigung der Probe gehen Sie wie folgt vor: Schneiden Sie ein Stück doppelseitiges Klebeband passend auf die Größe des Objektträgers (24 mm × 32 mm) zurecht und stanzen Sie mit dem Lochisen zentrisch ein Loch in das Klebeband (Mit der Unterlage auf dem Boden stanzen!). Anschließend kleben Sie das Klebeband mittig auf den Objektträger und entfernen die Abdeckfolie. Schütteln Sie die Flasche mit der Probenflüssigkeit gut durch und pipettieren Sie ca. 150 μl der Probenflüssigkeit in die ausgestanzte Öffnung des Klebebands. Der Durchmesser der Partikel ist auf der Flasche angegeben. Notieren Sie diesen Wert. Legen Sie nun das Deckglas auf das doppelseitige Klebeband und drücken Sie es mit einem Papiertuch vorsichtig an. Dabei darf ruhig etwas von der Flüssigkeit herausfließen. Allerdings dürfen sich keine (größeren) Luftblasen in der Flüssigkeit bilden! Trocknen Sie die Probe mit einem Papiertuch ab und geben Sie auf die Mitte des Deckglases **einen Tropfen** Immersionsöl. Spannen Sie nun die Probe auf den Mikroskoptisch (Abbildung 7) ein. Am Objektivkranz des Mikroskops wählen Sie das Objektiv 100/1.25 oil (100-fache Vergrößerung, Numerische Apertur $NA=1,25$) aus.

Für die Beobachtung der Partikel, muss das Mikroskopobjektiv mithilfe des Fokusgrobiantriebes (siehe Abbildung 7) so nahe an den Objektträger gefahren werden, dass der Öltropfen auf dem Objektträger gerade berührt wird. Ab diesem Punkt darf nur noch mit dem Fokusfeintrieb gearbeitet werden, da sonst eine Berührung des Objektivs mit dem Objektträgerglas leicht möglich. Deshalb sollte der Fokus langsam verändert werden, bis suspendierte Partikel im Bildausschnitt zu sehen sind. Zur Verschiebung des Ausschnittes in x- und y-Richtung, kann der jeweilige x- oder y-Antrieb verwendet werden.

Zur Verbesserung des Kontrastes sollten die Irisblende am Kondensator auf die Position *MIN* gestellt werden.

Achtung: Bei der Versuchsdurchführung können folgende systematische Fehler auftreten, die unbedingt zu vermeiden sind:

- Überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich nur ein einziges Partikel beobachten. Manchmal kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere Partikel „zusammenkleben“. Dies lässt sich gut erkennen, indem man etwas den Fokus variiert. Meistens erscheint dieser „Klumpen“ auch deutlich größer als einzelne Partikel.

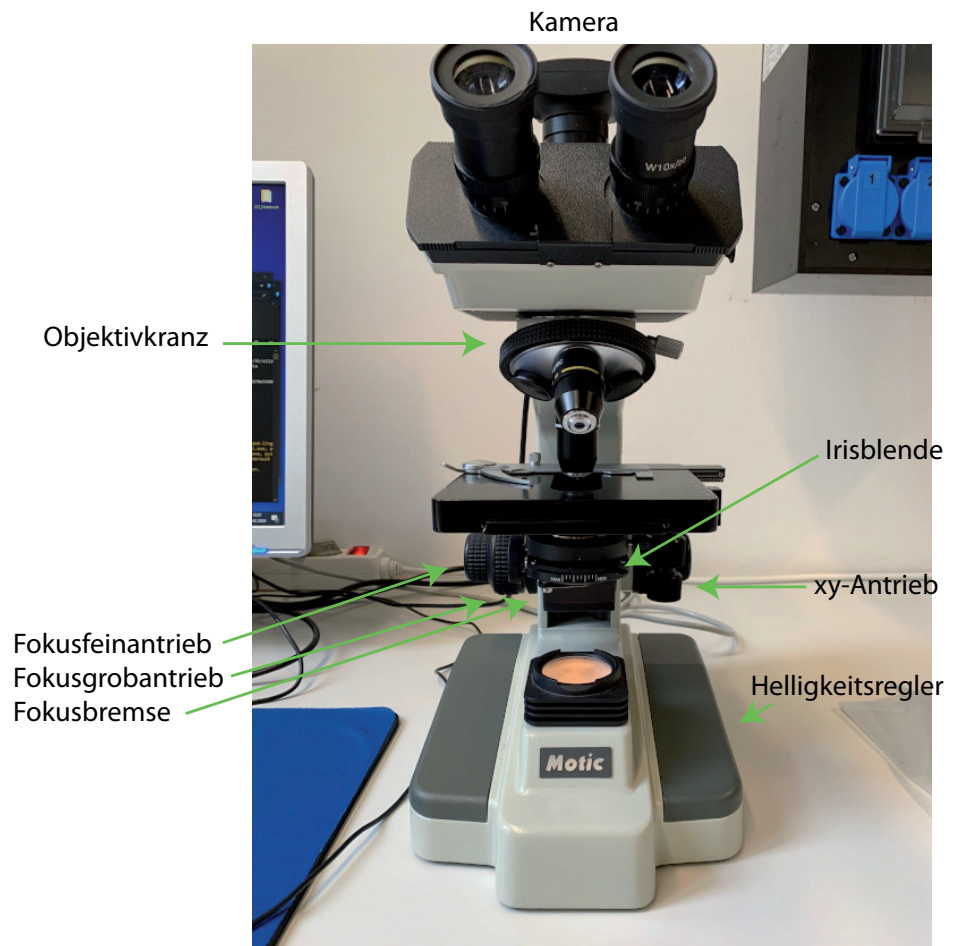


Abbildung 7: Bedienungselemente des Mikroskops.

- Auf keinen Fall dürfen Sie während der Messung die xy -Position des Objektisches verstellen. Auch Erschütterungen des Mikroskops müssen unbedingt vermieden werden.
- Beim Nachfokussieren dürfen Sie mit dem Objektiv auf keinen Fall das Deckglas ihrer Probe berühren. Der dadurch erzeugten Druck, würde die Partikel verdrängen und somit die eigentliche Brownsche Bewegung verfälschen. Sollten Sie beim Nachfokussieren eine abrupte Partikelbewegung beobachten, so müssen Sie sich ein anderes, „höher gelegenes“ Partikel suchen, dessen Position Sie ohne Berührung des Deckglases scharf stellen können.
- Die Probe muss sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Ist dies nicht der Fall, so treten Konvektionsströme auf, die wiederum die Brownsche Bewegung verfälschen. Zudem ist es möglich, dass die Probe schlecht präpariert wurde: Ist die Suspension nicht vollständig mit dem Klebeband abgedichtet, so können durch Verdunstungsprozesse ebenfalls ungewünschte Strömungen in der Probe auftreten. **Warten Sie daher zur Temperierung der Probe zwei Minuten ab, bevor Sie mit der Messung beginnen.** Sollte dann immer noch eine Strömungsbewegung erkennbar sein, so müssen Sie gegebenenfalls eine neue Probe vorbereiten. Wenden Sie sich in diesem Fall an Ihren Betreuer. Auch die Mikroskopbeleuchtung kann die Probe erwärmen. Stellen Sie deshalb die Helligkeit auf ein notwendiges Minimum, damit die Helligkeit des Kamerabildes hoch genug für eine zufriedenstellende Beobachtung eines Partikels ist.

Software

Das Messprogramm ist in python geschrieben. Am Anfang müssen Sie einen Gruppennamen eingeben. Das Programm erzeugt automatisch einen Ordner mit diesem Namen und speichert darin alle aufgenommenen Bilder und Messdaten. Sollte das Programm einmal neugestartet werden, müssen Sie denselben Gruppennamen nochmals eingeben, damit Sie dort weitermachen können, wo Sie vor dem Neustart aufgehört haben.

Das Programm hat drei Tabs, für jede Aufgabe einen eigenen. Im *Caputre*-Tab wird die Bildfolge aufgenommen, im *Calibration*-Tab wird mit Hilfe eines Mikrometermaßstabs eine Eichung der Kameraabbildung vorgenommen und im *Tracking*-Tab müssen Sie ein Partikel über alle Bilder der aufgenommenen Bildfolge verfolgen. Dabei wird automatisch die Verschiebung berechnet und in eine

.txt-Datei geschrieben. Auch diese finden Sie anschließend in Ihrem Ordner gespeichert.

Bei der Aufnahme der Bildfolge wird jede Sekunde ein Bild aufgenommen. Den Fehler bzgl. der Zeitmessung können Sie vernachlässigen. Das Programm speichert die Bilder in Ihrem Ordner ab, beginnend mit dem „Bild0.jpg“. Um die Anzahl der aufzunehmenden Bilder festzulegen, tragen Sie einfach die Zahl in das entsprechende Feld der Software ein und starten Sie die Aufnahmeroutine. Um später die Position des Partikels ausmessen zu können, müssen Sie

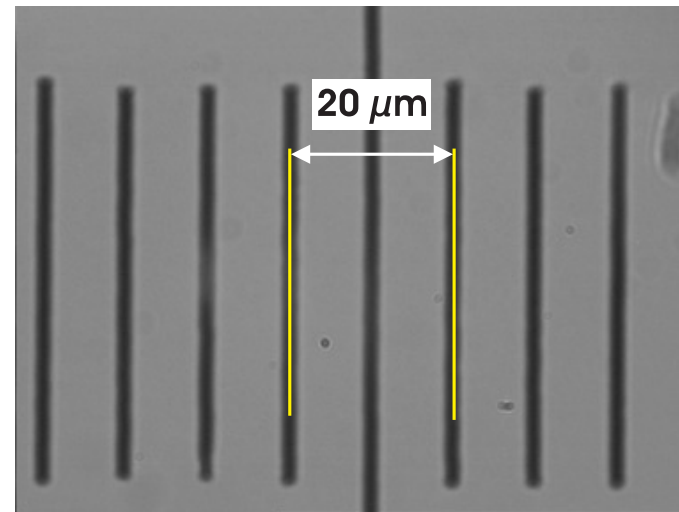


Abbildung 8: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer. Die Distanz zwischen zwei Teilstrichen beträgt $10 \mu\text{m}$.

den Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmen. Dazu liegen Objektmikrometer aus. Zwischen zwei Skalenteilen des Objektmikrometers liegen $10 \mu\text{m}$. Um das Objektmikrometer mit dem Immersionsobjektiv verwenden zu können, müssen Sie hier ebenfalls einen Tropfen Immersionsöl vor Gebrauch auftragen. Im *Calibration*-Tab müssen Sie wieder die Kamera starten und dann entsprechend den Bildausschnitt so wählen, dass die Teilstriche des Objektmikrometers möglichst scharf abgebildet werden (siehe Abbildung 8). Mit dem Button „Start Calibration“ wird ein Bild aufgenommen und gespeichert und ein Cursor erscheint. Diesen müssen Sie nun auf einen der Teilstriche verschieben. Mit dem

Drücken der „Enter“-Taste wird die Position gespeichert und ein zweiter Cursor erscheint. Diesen können Sie mit den Pfeiltasten jetzt verschieben. Erneutes Drücken der „Enter“-Taste speichert die Position erneut und der Abbildungsmaßstab wird in $nm/pixel$ in das Bild geschrieben und im Programm als Konstante gespeichert. Für das Ausmessen der Partikelpositionen müssen Sie in

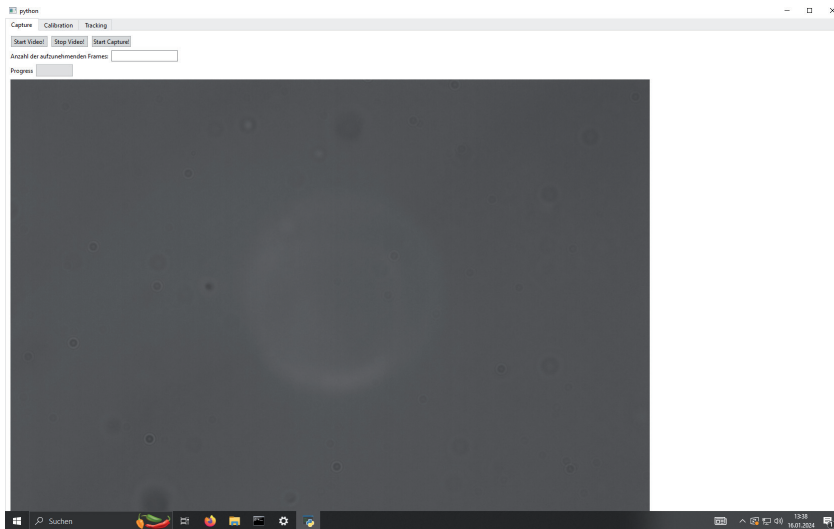


Abbildung 9: Bedienoberfläche des Programms

den *Tracking*-Tab wechseln. Hier können Sie einfach auf den „Start“-Button drücken und es wird automatisch ihr erstes aufgenommenes Bild geladen. Den Cursor können Sie entweder mit einem Mausklick auf die gewünschte Position verschieben oder durch das Drücken der „W,A,S,D“-Tasten. Mit dem Drücken der „Enter“-Taste wird die Position gespeichert und das nächste Bild wird geladen. Der Cursor verbleibt auf der letzten gespeicherten Position. Sollte das Programm im Laufe des Versuch neugestartet werden, werden Sie zu Beginn des Trackingsvorgangs über ein Dialogfenster nach der Anzahl der aufgenommenen Bilder und des Abbildungsmaßstabes gefragt. Diesen können Sie einfach hier eintragen (Bitte beachten Sie, dass python einen `.` statt einem `,` als Dezimaltrennzeichen erwartet). Danach wird automatisch das nächste, nicht bearbeitete Bild geladen mit dem Cursor auf der Position des letzten Bildes, sodass Sie das getrackte Partikel leicht finden sollten.

VII Durchführung

Aufgabe 1: Herstellen der Probe suspendierter Silicananopartikel

Stellen Sie die Probe nach der Anleitung her. **Schütteln Sie die Flasche kräftig, bevor Sie mit der Pinpette Flüssigkeit entnehmen, da sich die Latexpartikel mit der Zeit am Boden absetzen!** Achten Sie auch darauf, die Glasflächen im Bereich des ausgestanzten Lochs möglichst nicht zu berühren. Legen Sie anschließend die Probe in das Mikroskop und stellen Sie entsprechend den Fokus ein, sodass Sie die suspendierten Partikel beobachten können. Drehen Sie dazu **langsam** am Feintrieb des Fokusrades.

Aufgabe 2: Aufnahme einer Bildfolge

Nehmen Sie eine Bildfolge von mindestens 150 Bildern auf. Stellen Sie sicher, dass sich das von Ihnen gewählte Partikel die ganze Zeit sichtbar im Bild befindet. Sollte es zu stark in z-Richtung aus dem Fokus gewandert sein, stellen Sie diesen sehr langsam nach, sodass Sie das Partikel wieder gut sehen können. Achten Sie auch darauf, dass sich möglichst nicht zu viele Partikel im beobachteten Ausschnitt befinden, sodass diese nicht dauernd zusammenstoßen. Wenn Sie die Aufnahme der Bildfolge gestartet haben, müssen Sie warten bis der Progressanzeiger bei 100 % ist. Nachdem die Bildfolge aufgenommen worden ist, notieren Sie die Raumtemperatur.

Aufgabe 3: Eichen des abgebildeten Ausschnitts mit einem Mikrometermaßstab

Nehmen Sie eine Eichung des abgebildeten Ausschnitts mittels des *Calibration*-Tabs vor. Um den Maßstab im vergrößerten Bildausschnitt zu finden, können Sie das Objektiv mit 10facher Vergrößerung benutzen und dann auf das 100fach vergrößernde Objektiv wechseln. Vergessen Sie nicht den Tropfen Immersionsöl! **Werfen Sie das Objektmikrometer auf keinen Fall nach Beendigung der Messung in den Müll! Legen Sie es wieder zurück in die Aufbewahrungsschachtel!** Notieren Sie den Abbildungsmaßstab.

Aufgabe 4: Vermessen der Partikelpositionen für jedes Bild der aufgenommenen Folge

Messen Sie die Positionen für das beobachtete Partikel in jedem der aufgenommenen Bilder nacheinander aus. Über den *Tracking*-Tab ist das möglich. Achten Sie darauf, dass Sie immer das gleiche Partikel messen. Nachdem Sie die Position des Partikel in jedem der aufgenommenen Bilder bestimmt haben, können Sie

direkt mit der Auswertung, z.B. in Jupyter Notebook, beginnen. Die Datei mit den gemessenen Positionen wird automatisch nach Beenden in ihrem Ordner gespeichert.

VIII Auswertung

Aufgabe 1: Bestimmung der Boltzmannkonstante über das mittlere Verschiebungsquadrat

Bestimmen Sie aus den Messdaten das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ des Partikels und dessen Fehler $\Delta\langle r^2 \rangle$. Berechnen Sie die Diffusionskonstante D und die Boltzmannkonstante k . Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität η von Wasser ist in Abbildung 21 dargestellt. Für die Berechnung des Fehlers der Boltzmannkonstante reicht es aus, wenn Sie nur die Fehler von $\langle r^2 \rangle$ und von der Temperatur berücksichtigen. Die Fehler der Zeitmessung und des Partikelradius sind vernachlässigbar klein. Da die Viskosität von Wasser stark temperaturabhängig ist und sich die Probe durch die Mikroskopbeleuchtung unter Umständen etwas aufgeheizt hat, sollten Sie für die Temperatur und damit auch für $\eta(T)$ einen hinreichend großen Fehler annehmen.

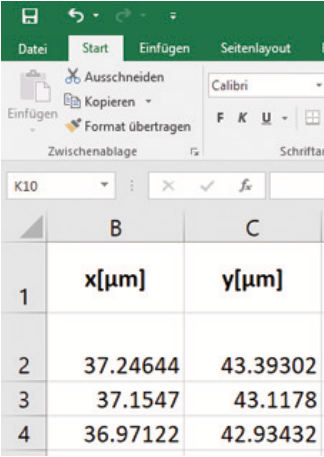
Aufgabe 2: Kontrollbestimmung der Boltzmannkonstante über das Histogramm

Nach Gleichung 9 ist die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit t innerhalb des Bereichs $[x, x + \Delta x]$ zu finden durch eine Gaußverteilung gegeben. Überprüfen Sie dies, indem Sie die gemessenen Partikelverschiebungen in ein Histogramm eintragen. Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, können Sie sowohl die Verschiebungen Δx als auch die Verschiebungen Δy gemeinsam in das gleiche Histogramm eintragen. Berechnen Sie den Mittelwert μ sowie die Standardabweichung σ der Verteilung und zeichnen Sie anhand dieser beiden Werte eine Gaußkurve in das Histogramm mit ein. Stimmt der berechnete Mittelwert mit dem theoretischen Wert überein? Berechnen Sie aus der Breite σ der Verteilung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante und vergleichen Sie diese mit dem zuvor bestimmten Werten. Drucken Sie das Histogramm mit der berechneten Gaußkurve aus.

IX Auswertung in Excel

IX.1 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

Ihre Messdaten sind in der Datei „poistion_data.txt“ gespeichert. Diese Datei können Sie in Excel öffnen. In den folgenden Dialogfenstern sollten Sie kurz überprüfen, ob die Daten bzgl. Dezimaltrennzeichen und Formatierung richtig erkannt wurden und bei Bedarf entsprechend die Einstellungen anpassen. Sie müssen für das Trennzeichen der Spalten das Feld bei „Komma“ anklicken. Und im dritten Schritt des Importdialoges müssen Sie für alle drei Spalten über den Button „Weitere...“ die Dezimaltrennzeichen auf einen Punkt statt einem Komma umstellen und das Tausendertrennzeichen zu entfernen. Wenn der Import der Messdaten geklappt hat, speichern Sie ihre Arbeitsmappe direkt als .xlsx-Datei im gleichen Ordner wieder ab.

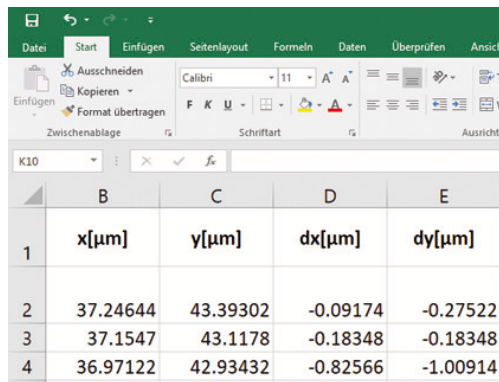


	B	C
1	x[µm]	y[µm]
2	37.24644	43.39302
3	37.1547	43.1178
4	36.97122	42.93432

Abbildung 10: Korrekt importierte Daten in der Excelarbeitsmappe

Fügen Sie eine Kopfzeile hinzu, um für die einzelnen Spalten jeweils eine Beschriftung einfügen zu können. Die erste Spalte beinhaltet sowohl die Bildnummer als auch den Aufnahmezeitpunkt, da beides gleichbedeutend ist. Die beiden nächsten Spalten sind jeweils die x- und y-Position des gemessenen Partikels in μm zum oberen linken Bildeck (siehe Abbildung 11).

Da es sich um Absolutpositionen auf dem Bild handelt, wir aber die relative Verschiebung von einem Bild zum nächsten benötigen, müssen die Differenzen der jeweiligen Elemente berechnet werden $[x_{i+1} - x_i] = x_{diff}$. Geben Sie dafür einfach die entsprechende Formel mit den referenzierten Zellen in die nächsten beiden Spalten ein und ziehen Sie die Formel bis zur vorletzten Zeile ihrer Messdaten nach unten. Das geht über das kleine Quadrat, das erscheint sobald die die zu kopierenden Zellen ausgewählt haben (siehe Abbildung 11).



	B	C	D	E
1	x[μm]	y[μm]	dx[μm]	dy[μm]
2	37.24644	43.39302	-0.09174	-0.27522
3	37.1547	43.1178	-0.18348	-0.18348
4	36.97122	42.93432	-0.82566	-1.00914

Abbildung 11: Berechnung der Verschiebung in x- und y-Richtung

Da die Verschiebungsquadrate dx^2 , dy^2 und $dx^2 + dy^2$ benötigt werden, müssen Sie diese in den nächsten drei Spalten berechnen. Als Formel können Sie in Excel einfach zweimal die gleiche Zelle miteinander multiplizieren oder über das Exponentenzeichen das Quadrat des Zelleninhaltes bilden. In der letzten Spalte müssen Sie einfach den Inhalt der jeweiligen dx^2 und dy^2 Zellen addieren (siehe Abbildung 12)

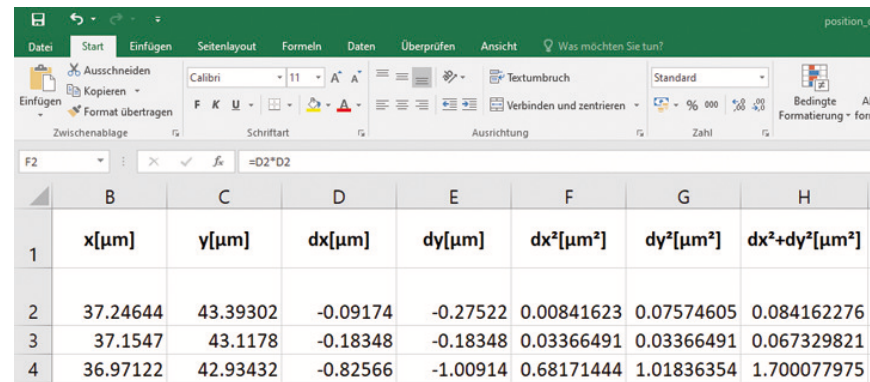
Nachdem Sie die Verschiebungsquadrate berechnet haben, werden auch noch die Mittelwerte der Verschiebungen benötigt. Lassen Sie zwei Spalten frei und tragen Sie die Bezeichnung der zu berechnenden Werte in die Spalte K ein. Es wird die Anzahl n der berechneten Differenzwerte (Anzahl der Bilder weniger eines) und die Mittelwerte der Verschiebungen $\langle dx \rangle$ und $\langle dy \rangle$, der Mittelwert der Summe der Verschiebungsquadrate $\langle dx^2 + dy^2 \rangle = \langle r^2 \rangle$ und der Fehler der mittleren Verschiebungsquadrate $\Delta \langle r^2 \rangle$ benötigt. Nutzen Sie für die Berechnung der Mittelwerte die entsprechende Funktion von Excel und wählen entweder durch Eingabe oder durch Auswahl den entsprechenden Zellenbereich aus (siehe

Abbildung 13).

Den Fehler der mittleren Verschiebungsquadrate wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \langle r^2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (r_i^2 - \langle r^2 \rangle)^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (22)$$

Die Standardabweichung lässt sich in Excel über „STABWA()“ berechnen, die Wurzel über „WURZEL()“ .



	B	C	D	E	F	G	H
1	x[μm]	y[μm]	dx[μm]	dy[μm]	dx²[μm²]	dy²[μm²]	dx²+dy²[μm²]
2	37.24644	43.39302	-0.09174	-0.27522	0.00841623	0.07574605	0.084162276
3	37.1547	43.1178	-0.18348	-0.18348	0.03366491	0.03366491	0.067329821
4	36.97122	42.93432	-0.82566	-1.00914	0.68171444	1.01836354	1.700077975

Abbildung 12: Berechnete Verschiebungsquadrate

	J	K	L
1			
2		Anzahl der Differenzen n:	149
3		$\bar{\Delta}x$ [μm]	-0.0221654
4		$\bar{\Delta}y$ [μm]	-0.0449464
5		$\bar{\Delta}x^2 + \bar{\Delta}y^2$ [μm^2]	1.71278704
6		$\overline{\Delta\Delta x^2 + \Delta\Delta y^2}$ [μm^2]	0.12197809

Abbildung 13: Berechnung der Mittelwerte

IX.2 Erstellen des Histogramms der gemessenen Verschiebungen

Um in Excel ein Histogramm zu erstellen, muss eine Tabelle mit allen notwendigen Unterteilungen der Abzisse erstellt werden. Suchen Sie dazu mit den Befehlen „MIN()“ und „MAX()“ den größten positiven und negativen Verschiebungswert. Als Bereich müssen Sie hier die Verschiebung in x- und y-Richtung gemeinsam auswählen. Unterhalb dieser beiden Werte erzeugen die Histogrammklassen ausgehend vom maximal negativen zum maximal positiven Verschiebungswert in Schritten von $0,2 \mu\text{m}$ (siehe Abbildung 14).

Die Erstellung des Histogramms kann in Excel über den Tab „Daten“ und dort den Button „Datenanalyse“ gestartet werden. Im ersten Dialogfenster müssen Sie den Menüpunkt Histogramm auswählen. Es öffnet sich ein Dialogfenster (siehe Abbildung 15), in dem Sie verschiedene Einstellungen vornehmen müssen. Der Eingabebereich umfasst alle berechneten Verschiebungen sowohl in x- als auch in y-Richtung. Als Klassenbereich müssen Sie die Abzissenwerte auswählen, die Sie vorher erstellt haben. Bei dem Menüpunkt „Diagrammerstellung“ müssen Sie einen Hacken setzen, sonst wird nur eine neue Tabelle erstellt aber kein Histogramm. Damit die Balken der Binbreite entsprechen, müssen Sie über einen Rechtsklick auf einen Balken im Diagrammenüpunkt „Datenreihen

	J	K	L
5		$\bar{\Delta}x^2 + \bar{\Delta}y^2$ [μm^2]	1.712787
6		$\overline{\Delta\Delta x^2 + \Delta\Delta y^2}$ [μm^2]	0.1219781
7			
8		max. positive Verschiebung	2.66046
9		max. negative Verschiebung	-2.47698
10			
11		Abzissenwerte für Histogramm	
12			-2.6
13			-2.4
14			-2.2
15			-2
16			-1.8
17			-1.6
18			-1.4

Abbildung 14: Erstellen der Klassenwerte des Histogramms

formatieren“ die Abstandsbreite auf 0% setzen.

Um eine Gaußkurve an die Messdaten anzufitten muss man in Excel einen kleinen Umweg gehen, da es keine direkte Funktion dafür gibt. Man muss die beiden Parameter einer Gaußkurve selbst bestimmen und die Werte der Kurve für alle Abzissenwerte einzeln berechnen lassen. Den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ können wieder über die entsprechenden Excelfunktionen berechnet werden. Berechnen Sie diese im neuen Tabellenblatt und wählen Sie dazu die Verschiebungswerte auf dem alten Tabellenblatt aus (siehe Abbildung 16).

Um im Histogramm die angepasste Gaußkurve ebenfalls darstellen zu können, müssen Sie in der Spalte C die einzelnen Werte der Gaußverteilung berechnen. Excel bietet dafür eine Funktion „NORM.VERT()“ an. Diese Funktion hat als Eingabewerte den Abzissenwert, den Mittelwert μ , die Standardabweichung σ und die Abfrage, ob eine kumulierte Verteilung ausgegeben wird. In unserem Fall wollen wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also wird für die letzte Abfrage „FALSCH“ eingetragen. Um beim automatischen Ausfüllen die Zellen für den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ fest referenziert zu haben, müssen Sie vor und nach den Buchstaben der Zelle ein Dollarzeichen setzen (siehe Abbildung 17).

Um eine graphische Darstellung der Gaußkurve in das Histogramm hinzuzufügen, müssen Sie das Histogramm mit einem Rechtsklick auswählen und anschließend im Menü den Punkt „Daten auswählen“ das Dialogfenster für die Auswahl der Datenreihen. Hier müssen Sie eine neue Reihe hinzufügen. Wählen

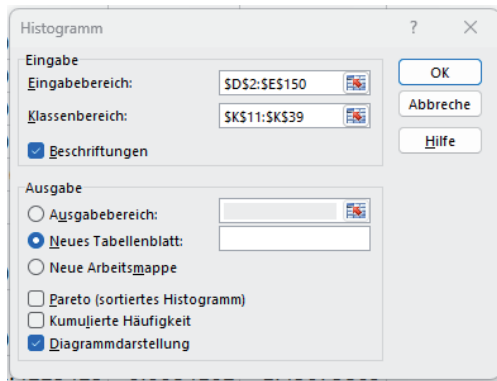


Abbildung 15: Dialogfenster Histogramm

E2 =MITTELWERT(position_data!D2:E150)						
	A	B	C	D	E	F
1	werte für His	Häufigkeit	Gaußkurve			
2	-2.6	0	0.5529431	μ:	-0.033556	
3	-2.4	1	0.982485	σ:	0.9263624	
4	-2.2	1	1.6662038			
5	-2	2	2.6970371			
6	-1.8	5	4.1667974			

Abbildung 16: Berechnen des Mittelwertes und der Standardabweichung

Sie dann für die x-Werte die berechneten Werte der Gaußkurve aus. Als Reihename können Sie Gaußkurve eingeben. Um die Darstellung der neuen Datenreihe zu ändern, müssen Sie durch einen Rechtsklick das Datenreihenmenü öffnen und dort den Menüpunkt „Datenreihen-Diagrammtyp ändern ...“ auswählen. Im folgenden Dialogfenster können Sie für die Gaußkurve beispielsweise den Punkt „Punkte mit interpolierter Linie“ auswählen. In Abbildung 18 sehen Sie ein beispielhaftes Diagramm, wie es mit Excel erstellt werden soll.

C2 =NORM.VERT(A2;SE\$2;SE\$3;FALSCH)*149*2*0.2						
	A	B	C	D	E	F
1	werte für His	Häufigkeit	Gaußkurve			
2	-2.6	0	0.5529431	μ:	-0.033556	
3	-2.4	1	0.982485	σ:	0.9263624	
4	-2.2	1	1.6662038			
5	-2	2	2.6970371			

Abbildung 17: Berechnen der Wahrscheinlichkeitswerte der angepassten Gaußkurve

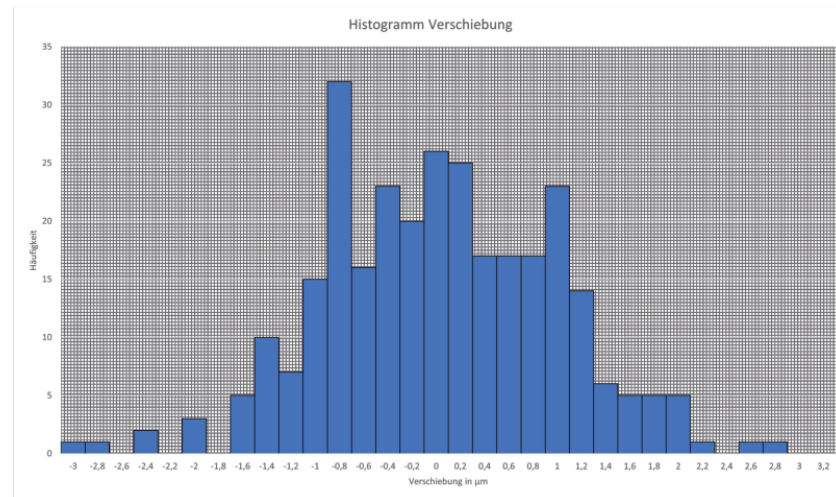


Abbildung 18: Histogramm

IX.3 Graphische Darstellung des „random walk“

Um den Weg des beobachteten Partikels darzustellen, wird ein xy-Plot aus den Verschiebungen erzeugt. In Excel gibt es eine eigene Diagrammkategorie dafür. Markieren Sie alle absoluten x- und y-Positionen und wählen Sie unter dem Tab „Einfügen“ das Punktdiagramm aus (siehe Abbildung 19). Anschließend müssen Sie noch die Achsenmaxima und -minima entsprechend einstellen, die Achsenbeschriftungen hinzufügen und die Darstellung der Kurve nach Bedarf anpassen. Eine mögliche Darstellung finden Sie in Abbildung 20. Speichern Sie

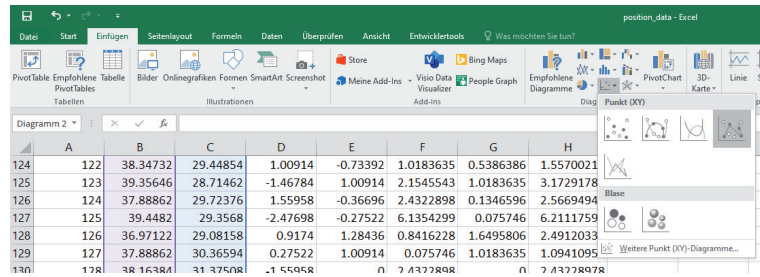


Abbildung 19: Auswahl des Diagrammtyps

abschließend die Excelarbeitsmappe ab. Die Diagramme können Sie als Bild in Ihre Auswertung kopieren.

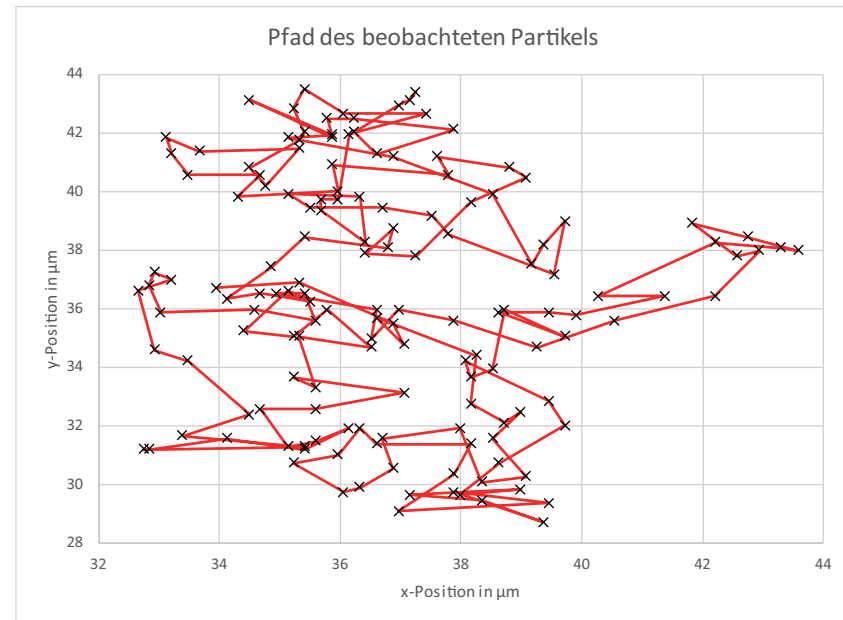


Abbildung 20: Pfad eines beobachteten Partikels

Viskosität von Wasser

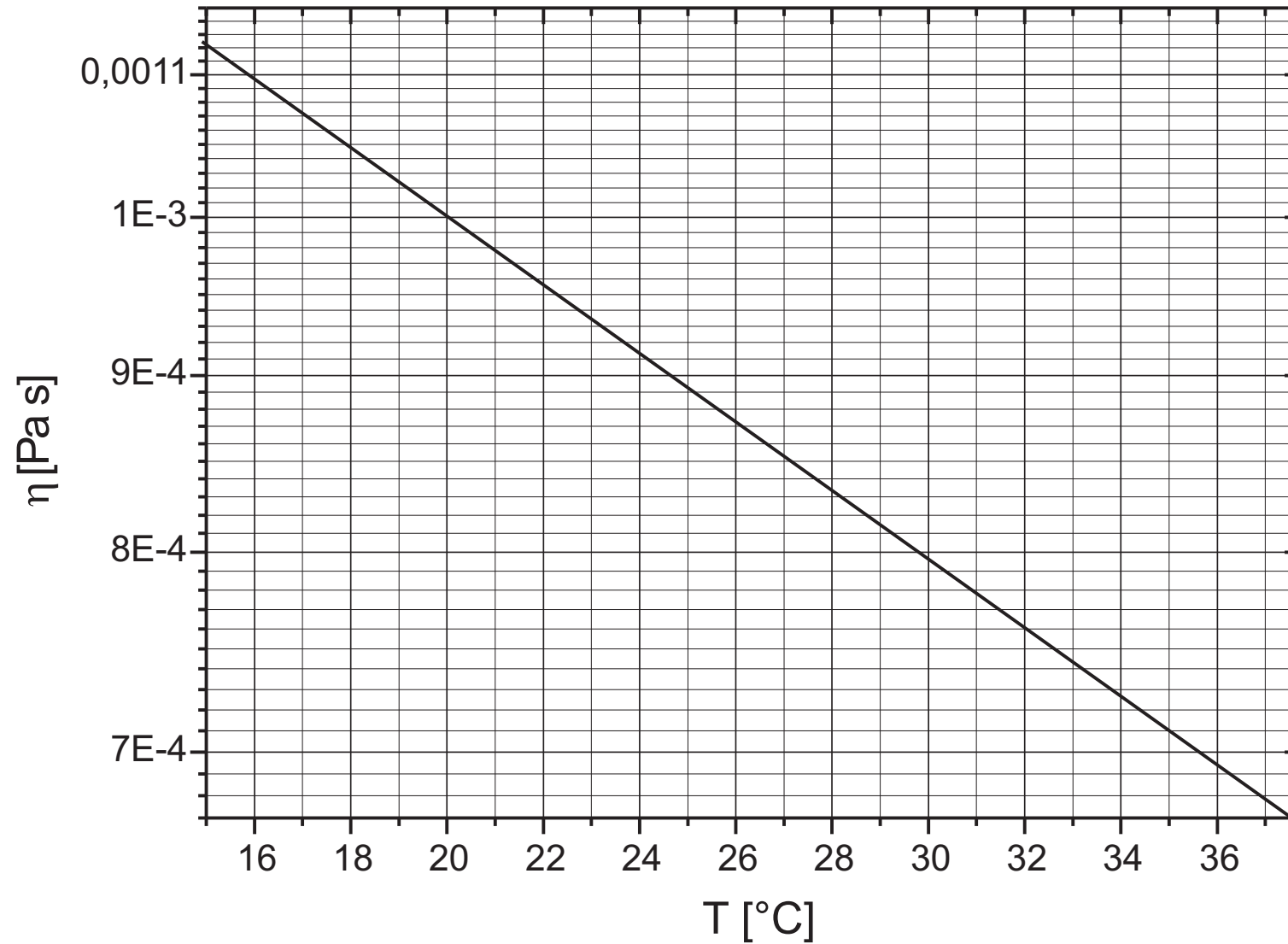


Abbildung 21: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

Grundlagen der Radioaktivität

I Das Geiger-Müller Zählrohr

Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Nachweisgerät für ionisierende Strahlung (α -, β -, γ und Röntgenstrahlen). Es besteht aus einem Metallzylinder und einem darin axial verlaufenden Anodendraht (Abbildung 1). Das Rohr ist an beiden Enden fest verschlossen und mit einem geeigneten Gasgemisch gefüllt, beispielsweise Argon und Alkoholdampf. Soll mit dem Zählrohr auch α -Strahlung detektiert werden, so benötigt man ein sogenanntes Fensterzählrohr. Bei diesem ist eine Stirnseite mit einem nur schwach absorbierenden Fenster (z.B. Glimmer) versehen, so dass auch α -Teilchen in das Zählrohr eindringen können. Zwischen dem Anodendraht und dem Metallzylinder liegt eine Spannung von einigen 100 bis 1000 Volt, die je nach Gasfüllung und Abmessungen des Zählrohrs eingestellt werden muss.

Das Grundprinzip eines Zählrohres beruht auf der Ionisation des Füllgases durch ionisierende Strahlung. Gelangt ein schnelles, elektrisch geladenes Teilchen, z.B. ein β -Teilchen, in das Zählrohr, so entstehen durch Ionisation des Zählgases längs der Bahn des Teilchens freie Elektronen und positiv geladene Ionen. Die Elektronen werden aufgrund des elektrischen Feldes in Richtung des Anodendrahtes beschleunigt und können durch Stöße weitere Gasmoleküle ionisieren. Diese freien Elektronen leiten eine Gasentladung ein, die jedoch bei geeigneter Wahl der Spannung und einem entsprechend dimensionierten Vorwiderstand, nach etwa 10^{-5} Sekunden selbst erlischt. Bei dieser Gasentladung fließt für kurze Zeit ein Strom im Zählrohr, der an dem Widerstand einen Spannungsimpuls verursacht. Dieser lässt sich elektronisch verstärken und mit einer Zählerschaltung registrieren.

I.1 Kennlinie eines Zählrohres

Die genauen Vorgänge im Zählrohr sind etwas komplizierter und hängen besonders von der Zählrohrspannung ab:

Dringt ionisierende Strahlung in das Zählrohr ein, so ist die Anzahl der primär erzeugten Ladungsträger stets proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. Bei kleinen Zählrohrspannungen erreicht aber nur ein Teil der Primärelektronen den Anodendraht, der Rest geht durch Rekombinationen verloren. Mit zunehmender Spannung sinkt die Rekombinationswahrschein-

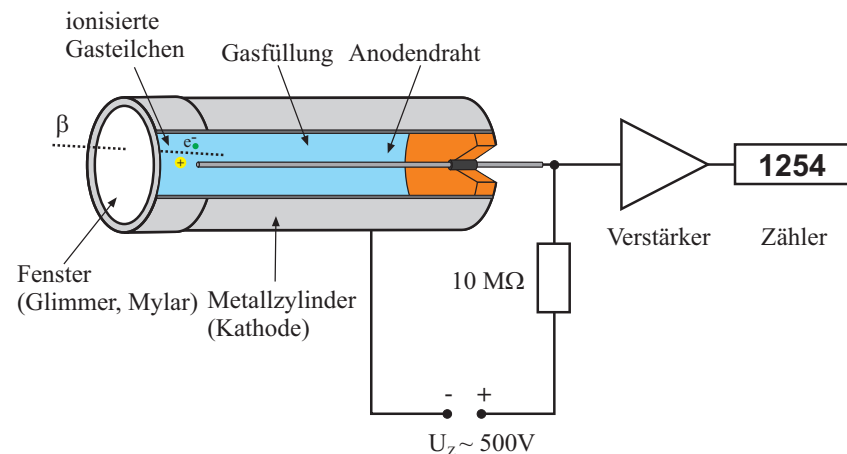


Abbildung 1: Aufbau eines Fensterzählrohrs.

lichkeit und nahezu alle Primärelektronen gelangen zur Anode. Der Strom durch das Zählrohr ist in diesem Spannungsbereich proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. In diesem Bereich arbeitet beispielsweise eine Ionisationskammer zur Messung der Primärdosisleistung. Im Versuch „Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen“ werden Sie sich mit diesem Gerät¹ noch genauer beschäftigen. Wird die Zählrohrspannung weiter erhöht, so werden die Primärelektronen irgendwann so stark beschleunigt, dass sie in der Lage sind durch Stöße weitere Gasmoleküle zu ionisieren. Es entstehen Sekundärelektronen dessen Anzahl allerdings immer noch proportional zur Zahl der Primärelektronen ist. Dieser Spannungsbereich wird als Proportionalbereich bezeichnet. Bei noch höheren Spannungen werden neben den primär erzeugten Elektronen, auch die Sekundärelektronen so stark beschleunigt, dass diese selbst das Füllgas ionisieren. Die Zahl der erzeugten Elektronen steigt derart an, dass jedes einfallende Teilchen eine Elektronenlawine längs des Anodendrahtes hervorruft. Damit die Gasentladung nach kurzer Zeit wieder abklingt, ist dem Zählrohr ein Löschgas (z.B. Alkoholdampf) beigemischt. Dadurch erlischt die Entladung nach einigen 10^{-5} s von selbst. **In diesem sogenannten Plateaubereich (bzw. Geiger-Müller-Bereich oder Auslösebereich) erzeugt je-**

¹Bei diesem Versuch wird allerdings kein Zählrohr eingesetzt, sondern ein Aufbau mit einer anderen Geometrie. Das Grundprinzip entspricht aber den Erläuterungen im Text.

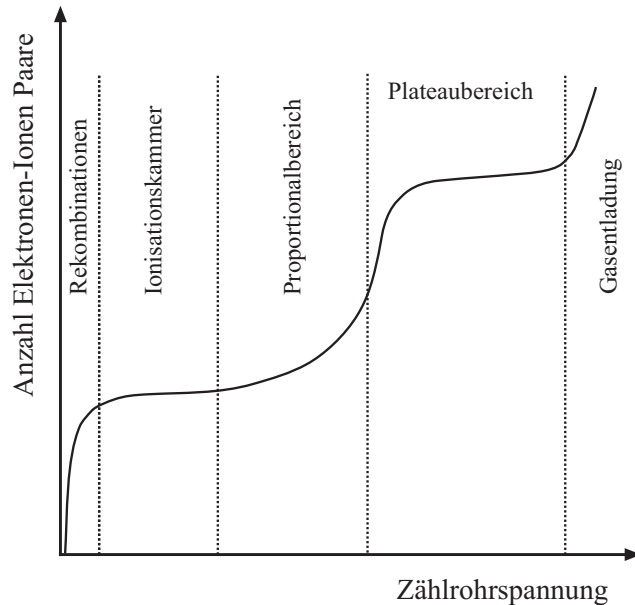


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Charakteristik eines Zählrohrs.

des einfallende Teilchen, unabhängig von seiner Energie, ein gleich großes Entladungssignal. Allerdings geht dabei auch jegliche Information der Energie der einfallenden Strahlung verloren. Ein im Auslösebereich betriebenes Zählrohr eignet sich daher nur zur Detektion von ionisierender Strahlung und wird speziell für Zählverfahren verwendet. Daher der Name Zählrohr. Eine weitere Erhöhung der Zählrohrspannung bewirkt zunächst keine Erhöhung der Zahl der erzeugten freien Elektronen. Jede einfallende ionisierende Strahlung bewirkt ja bereits, dass das Zählrohr von einer Elektronenlawine durchsetzt wird. Die Zählrohrkennlinie verläuft in diesem Bereich daher sehr flach, d.h. plateauartig. Wird die Zählrohrspannung weiter erhöht, so kommt man irgendwann in den Bereich, in dem eine Dauerentladung gezündet wird. Diese klingt nicht mehr selbstständig ab und führt in der Regel zur Zerstörung des Zählrohrs.

I.2 Der Plateaubereich

Bei vielen Experimenten zur Radioaktivität ist man nur daran interessiert, bestimmte Ereignisse nachzuweisen. Ein Beispiel ist der radioaktive Zerfall eines instabilen Elements, bei dem man die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenen Atome messen möchte. Ein anderes Beispiel sind Absorptionsmessungen von radioaktiver Strahlung. Hierbei möchte man untersuchen, welcher Bruchteil der einfallenden Strahlung einen Absorber durchdringen kann. All dies sind reine Zählaufgaben, die mit einem Zählrohr im Plateaubereich durchgeführt werden. In diesem Bereich ist der im Zählrohr erzeugte Stromimpuls unabhängig von der Energie der Strahlung. Jedes einfallende ionisierende Teilchen liefert das gleiche Ausgangssignal, welches der nachgeschalteten Elektronik als Triggersignal eines elektronischen Zählers dient und den Zählerstand um Eins erhöht. Trägt man

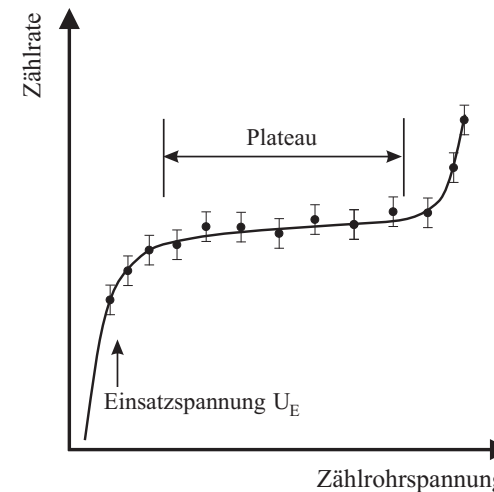


Abbildung 3: Gemessener Plateaubereich eines Geiger-Müller-Zählrohrs.

die gemessene Zählrate eines radioaktiven Präparates konstanter Aktivität als Funktion der Zählrohrspannung auf, so erhält man einen Verlauf, wie er in Abbildung 3 dargestellt ist. Im Idealfall würde man erwarten, dass die Zählrate mit zunehmender Spannung im Plateaubereich überhaupt nicht steigt. In der Praxis ist dennoch ein gewisser Anstieg zu beobachten. Die Ursachen hierfür sind zum einen auf Inhomogenitäten des elektrischen Feldes zurückzuführen, die zu einer

unregelmäßigen Ladungsverteilung längs des Anodendrahtes führen. Zum anderen tragen auch Nachentladungen zum Plateauanstieg bei. Bei guten Zählrohren sollte der Plateaubereich länger als 100 V sein und nur eine geringe Steigung von wenigen Prozent pro 100 V aufweisen.

Beim Betrieb eines Geiger-Müller-Zählrohres im Auslösebereich, muss die Zählrohrspannung so gewählt werden, dass bei zufälligen Spannungsschwankungen, die Einsatzspannung U_E nicht unterschritten wird. Dazu muss zunächst der Plateaubereich gemäß Abbildung 3 ausgemessen werden. Anschließend wird die Betriebsspannung so eingestellt, dass diese ca. 50 bis 100 V größer ist als die Einsatzspannung.

I.3 Totzeit eines Zählrohres

Nach jedem Entladungsimpuls ist das Zählrohr für eine gewisse Zeit lang unempfindlich gegen neu eintretende Strahlung. Erst nach Ablauf dieser Totzeit (typischerweise 10^{-4} s) ist das Zählrohr zum Nachweis eines Teilchens erneut bereit. Der Hauptgrund hierfür liegt bei den positiv geladenen Ionen des Zählgases, die das Feld der Anode abschirmen und aufgrund ihrer großen Masse nur langsam driften. Erst wenn die Ionen zur Kathode gedriftet sind und hier entladen werden, ist das Zählrohr wieder einsatzbereit.

Sollen bei einem bestimmten Experiment die Ereignisse nicht nur detektiert sondern auch quantitativ ausgewertet werden, so müssen bereits bei wenigen hundert Ereignissen pro Sekunde Totzeitkorrekturen vorgenommen werden. Dies ist auch der Grund dafür, dass bei dem Versuch „Statistik des radioaktiven Zerfalls“ die Messzeit nicht beliebig klein gewählt werden darf. Bei diesem Versuch messen Sie viele Male hintereinander die Anzahl der Zerfälle eines radioaktiven Präparates innerhalb eines bestimmten Zeitraums und werten diese mit Hilfe statistischer Methoden aus. Um eine gute Statistik zu bekommen, benötigt man in der Regel viele Messwerte, was eine lange Experimentierzeit mit sich bringt. Nun könnte man vermuten, dass die Anzahl der Messwerte in der Weise erhöht werden kann, indem die Messzeit einer Einzelmessung verkleinert und dafür die Ereignisrate erhöht (z.B. das Präparat näher an das Zählrohr bringen) wird. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Zählrate nicht zu groß wird. Bereits bei 200 Impulse/s hat die Totzeit bei diesem Versuch einen solch großen Einfluss, dass die experimentellen Werte erheblich von den theoretischen abweichen.

I.4 Statistische Schwankungen

Die Zahl der Teilchen, die aus einem Präparat in das Zählrohr eindringen, ist statistischen Schwankungen unterworfen. Daher streuen wiederholte Messungen derselben Zählrate um einen Mittelwert. **Der mittlere statistische Fehler einer Zählung von n Teilchen ist gegeben durch \sqrt{n} , der mittlere relative Fehler also $\sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n}$.** Werden beispielsweise 1000 Ereignisse gezählt, so beträgt der absolute Fehler 32 Ereignisse bzw. der relative Fehler 3%. Bei 10000 Ereignissen beträgt der relative Fehler nur noch 1%. Bei allen graphischen Darstellungen werden die Messpunkte mit Fehlerbalken entsprechend dem mittleren Fehler versehen. Eine detaillierte Einführung in die Statistik des radioaktiven Zerfalls, erhalten Sie in der Versuchsbeschreibung „Statistik des radioaktiven Zerfalls“ und in dem Aufsatz „Wir wollen richtige Fehler“ zu Beginn dieser Anleitung.

I.5 Nulleffekt

Auch ohne Präparat zählt das Zählrohr eine gewisse Zählrate (ca. 50 Ereignisse pro Minute). Dieser Nulleffekt wird durch die überall in geringer Konzentration vorhandene natürliche Radioaktivität und die Höhenstrahlung verursacht. Falls der Nulleffekt nicht klein gegen den statistischen Fehler des Messwertes ist, muss dieser bei Messungen an einem radioaktiven Präparat abgezogen werden.

II Betriebsanleitung des Zählgerätes BF-SG 11

Inbetriebnahme des Zählgerätes - Einstellung der Einsatzspannung

1. Kontrollieren Sie, ob die Hochspannung **ausgeschaltet** ist!
2. Falls das Zählrohr noch nicht angeschlossen ist, schließen Sie dieses an die Buchse GM (Geiger-Müller) an. Der Kippschalter daneben, muss in der Stellung GM sein. Im Bedienfeld daneben, lässt sich die Triggerschwelle einstellen. Da wir diese Funktion nicht benötigen, drehen Sie den Regler „Untere Schwelle“ ganz nach links und den Regler „Obere Schwelle“ ganz nach rechts. Anschließend können Sie das Gerät einschalten. Der Netzschalter befindet sich unten rechts.
3. Ziehen Sie den Regler für die Hochspannungseinstellung leicht heraus und stellen Sie diesen auf ca. 40 (entspricht 400 V) ein. Durch Drücken kann

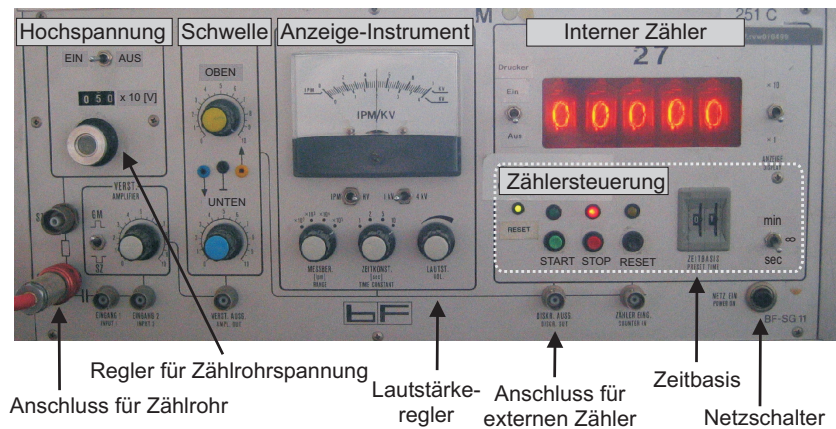


Abbildung 4: Frontplatte des Zählgerätes BF-SG 11

dieser Knopf später gegen Verdrehen gesichert werden.

- Schalten Sie nun die Hochspannung ein. Den genauen Wert können Sie auf dem Anzeige-Instrument ablesen. Dazu müssen die Schalter unter dem Instrument auf „HV“ (**H**igh **V**oltage) und „1 kV“ gestellt werden.
- Schrauben Sie das Präparat in die Halterung vor dem Zählrohr.
- Das Zählgerät besitzt einen integrierten Lautsprecher, mit dem Sie die registrierten Ereignisse akustisch verfolgen können. Drehen Sie dazu den Lautstärkereglers etwa eine halbe Umdrehung nach rechts.
- Erhöhen Sie nun **langsam** die Zählrohrspannung bis Sie ein sprunghaft einsetzendes akustisches Signal hören. Dieser Spannungswert entspricht der Einsatzspannung V_E .

Bedienung des Internen Zählers

- Um die Anzahl der registrierten Ereigniss quantitativ festzuhalten, besitzt das Zählgerät einen internen Zähler. Die Zählung wird automatisch nach einer vorgegebenen Zeit (Zeitbasis, Torzeit) gestoppt, die Sie an den beiden Digitalschaltern und dem Umschalter „sec/ ∞ /min“ einstellen können. Dabei steht „sec“ für Sekunden, „ ∞ “ für eine Dauermessung ohne Stoppfunktion und „min“ für Minuten.

- Die Ausgabe des Zählerstandes kann entweder nur an die Anzeige erfolgen oder zusätzlich an einen externen Drucker. Für den Druckerbetrieb muss der Schalter „Drucker“ auf „EIN“ gestellt werden.
- Drücken Sie die „Start“-Taste um den Zähler zu starten. Der Zählvorgang wird automatisch nach der eingestellten Torzeit gestoppt oder manuell durch Drücken der „Stop“-Taste. Um den Zählerstand auf Null zu setzen, müssen Sie die „Reset“-Taste drücken. Wenn die linke Reset-LED leuchtet (dauert ca. 2 Sekunden) können Sie den Zähler erneut starten.
- Den Schalter „ $\times 1$ “ bzw. „ $\times 10$ “ neben der Zähleranzeige, sollten Sie stets in der Position „ $\times 1$ “ stehen haben. In der Stellung „ $\times 10$ “ wird nur jeder zehnte Impuls gezählt!

Messung des Zählrohrplateaus

- Erhöhen Sie die Zählrohrspannung um 50 V über der Einsatzspannung V_E und bringen Sie das Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs) in einen solchen Abstand, dass ca. 50 bis 100 Ereignisse pro Sekunde gezählt werden.
- Ausgehend von V_E wird nun ein Teil des Plateaubereichs ausgemessen. Stellen Sie für die Messzeit 30 Sekunden ein und messen Sie bis zu einer Spannung von $V_E + 150 \text{ V}$ in Schritten von 25 V. Tragen Sie die Messwerte sofort in ein Diagramm gemäß Abbildung 3 ein.
- Stellen Sie nach der Messung die Zählrohrspannung auf die Mitte des gemessenen Plateaubereichs ein.

III Strahlenschutz im Physikalisches Anfängerpraktikum

Für die Durchführung der Versuche 251, 252, 253, 254, 255 und 256 müssen Sie mit verschiedenen Präparaten und Geräten arbeiten, die ionisierende Strahlung emittieren oder erzeugen. Sie werden dabei mit radioaktiven Präparaten arbeiten, die γ - und β -Strahlung emittieren. Grundsätzlich hat ionisierende Strahlung die Eigenschaft Ionisation in Materie und damit auch menschlichem Gewebe zu verursachen. Man unterscheidet hier zwischen dicht- und locker ionisierender Strahlung. Dicht ionisierende Strahlung ist beispielsweise α -Strahlung, locker ionisierende Strahlung ist beispielsweise β - und γ -Strahlung. Die genauen physikalischen Prozesse der Wechselwirkung mit Materie werden Sie in Versuch 253 genauer untersuchen.

III.1 Dosisbegriffe

Die Grundeinheit für die an Gewebe übertragene Energie ist die Energiedosis:

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m} \left[\frac{J}{kg} = 1 Gy \right], \quad (1)$$

wobei ΔW die an das Gewebe übertragene Energie ist und Δm die Masse des betroffenen Gewebes. Die Einheit der Gewebeenergiedosis D ist das Gray. Da die oben erwähnten, unterschiedlichen Arten der ionisierenden Strahlung Rechnung zu tragen, führt man die Äquivalentdosis ein. Diese berücksichtigt die unterschiedliche Wirkung von dicht und locker ionisierender Strahlung auf das Gewebe. Dafür wird jeder Strahlungsart ein Qualitätsfaktor zugeordnet, der multipliziert mit der Gewebeenergiedosis D die Äquivalentdosis H ergibt.

$$H = Q * D \quad (2)$$

Die Einheit der Äquivalentdosis ist das Sivert (Sv) und ein Maß für die Schädigung.

III.2 Biologische Wirkung ionisierender Strahlung

Die biologische Wirkung ionisierender Strahlung beginnt mit der Ionisation von Molekülen im Gewebe. Dadurch können freie Radikale gebildet werden und es kann zu Molekülveränderungen kommen, die beide chemische Reaktionen in der

Zelle auslösen. Werden DNA-Moleküle dabei geschädigt, kann es zum Zelltod, der korrekten Reparatur der entsprechenden Moleküle oder der fehlerhaften Reparatur führen. In letzterem Fall ist die Zelle weiter lebensfähig, kann aber Folgeschäden verursachen.

Die Auswirkungen dieser Schädigungen kann in die deterministischen und die stochastischen Schäden unterteilt werden. Deterministische Schäden treten dann auf, wenn durch eine Exposition eine Vielzahl von Zellen geschädigt oder zerstört wurde. Für diese Art von Schaden muss für ein Organ oder den ganzen Körper eine gewisse Mindestdosis überschritten werden. Der Schwellenwert für deterministische Strahlenschäden liegt bei 250 mSv. Ab einer Körperdosis von 5 Sv endet die verursachte Strahlenkrankheit oft tödlich, wobei dieser Wert von Mensch zu Mensch unterschiedlich ist.

Bei geringeren Dosen erhöht sich das Risiko für strahleninduzierte Schädigungen, wie beispielsweise die Bildung von Krebs oder Gendefekten. Gemäß der Internationalen Strahlenschutzkommission gestaltet sich das Krebsrisiko wie folgt: Erhalten eine Million Menschen eine Strahlendosis von 1 mSv, werden statistisch 50 Personen eine tödliche Krebserkrankung entwickeln. Zusätzlich können bei Schwangeren Schäden für das noch ungeborenen Kind entstehen.

III.3 Maßnahmen zum Schutz vor ionisierender Strahlung

Grundsätzlich muss bei jeder Tätigkeit abgewogen und begründet werden, ob der Einsatz ionisierender Strahlung notwendig ist. Ist dies gegeben, gelten die vier wichtigsten Grundsätze des Strahlenschutzes:

- Aufenthaltszeit so gering wie möglich halten: Je kürzer man sich im Strahlungsfeld aufhält, desto geringer ist die erhaltene Dosis.
- Abstand so groß wie möglich halten: Da sich die Dosisleistung mit umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der Quelle verhält, minimiert sich durch einen möglichst großen Abstand zur Quelle die erhaltene Dosis.
- Abschirmungen nutzen: Durch geeignete Abschirmmaterialien wird ein Teil der Strahlungsenergie absorbiert. Dadurch reduziert sich bei gleichem Abstand zur Quelle die erhaltene Dosis.
- Abschalten, wenn das Gerät nicht mehr benötigt wird: Dieser Grundsatz

gilt für alle Geräte, die ionisierende Strahlung erzeugen. Sobald der Anwendungszweck der ionisierenden Strahlung erfüllt ist, muss das Gerät abgeschaltet werden!

Wenn Sie diese Grundsätze verinnerlichen und anwenden, reduzieren Sie Ihre erhaltene Dosis .

III.4 Bestimmungen des Strahlenschutzes

Der Strahlenschutz wird in Deutschland vom Strahlenschutzgesetz (StrlSchG) und der Strahlenschutzverordnung (StrlSchV) geregelt. Diese gesetzlichen Bestimmungen liegen in jedem Versuchsraum aus und können dort eingesehen werden. Zusätzlich gilt die aktuelle Fassung der Strahlenschutzanweisung der Universität Heidelberg. Diese liegt ebenfalls in den Versuchsräumen aus.

Grundsätzlich wird zwischen beruflich strahlenexponierten Personen und der restlichen Bevölkerung unterschieden. Beruflich strahlenexponierte Person ist wer durch Ausübung seiner Tätigkeit über ein Jahr eine effektive Dosis von 1 mSv oder mehr erhalten kann. Während der Durchführung der Versuche im Praktikum ist es nicht möglich eine solche effektive Dosis zu erhalten. Folglich fallen Sie für die Durchführung der Versuche nicht in die Kategorie der beruflich strahlenexponierten Personen.

Die Organisation des Strahlenschutzes sieht für jede genehmigungsbedürftige Tätigkeit im Umgang mit ionisierender Strahlung Strahlenschutzbeauftragte vor. Strahlenschutzbeauftragte sind für die Einhaltung der Strahlenschutzanweisungen und des Strahlenschutzgesetzes und der Strahlenschutzverordnung zuständig. Sie sind bzgl. der genehmigungsbedürftigen Tätigkeiten weisungsbefugt.

Während der Versuche arbeiten Sie mit fest umschlossenen Quellen und Vollschutzröntengeräten. Die Quellen werden jährlich auf Dichtigkeit geprüft, sodass eine Kontamination und Inkorporation der radioaktiven Stoffe ausgeschlossen ist. Dies ist jedoch nur gewährleistet, wenn an den Quellen keine mechanischen Beschädigungen vorhanden sind. Sollte Ihnen eine Beschädigung auffallen oder Ihnen eine Quelle herunterfallen, melden Sie das sofort der Praktikumsleitung und Ihrem Tutor! Sie müssen keine Angst haben, dass Ihnen dadurch ein Nachteil entsteht. Es geht um den Schutz vor Kontamination und Inkorporation! Die Vollschutzröntengeräte sind typgeprüft und so geschirmt, dass in 10 cm Abstand eine maximale effektive Dosisleistung von $0,1 \mu\text{Sv/h}$ messbar sind.

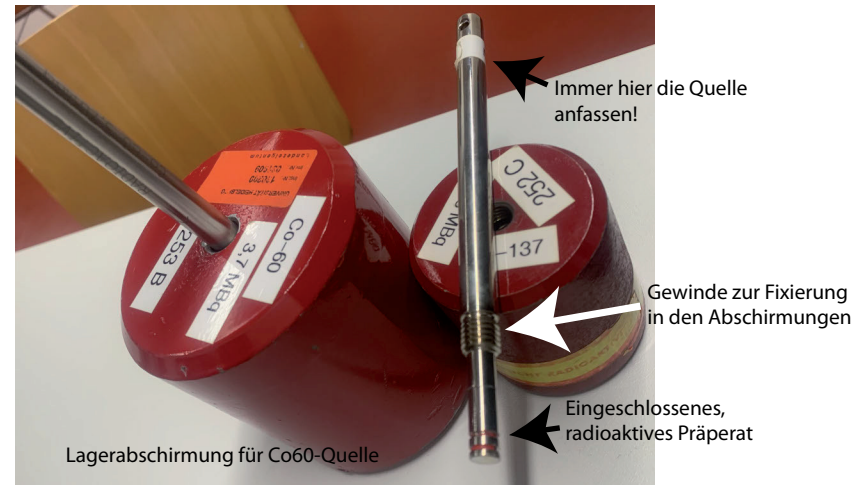


Abbildung 5: Die im Praktikum verwendeten Co-60- und Cs-137-Quellen

Die Röntgeneinrichtung kann erst gestartet werden, wenn die Tür verriegelt ist, sodass eine Exposition von Personen ausgeschlossen ist. Sollten am Verriegelungsmechanismus oder am Gehäuse mechanische Beschädigungen auffallen oder entstehen, schalten Sie das Gerät sofort aus und melden es der Praktikumsleitung und Ihrem Tutor!

Zusätzlich gelten besondere Regelungen für minderjährige, schwangere und stillende Personen. Diesen ist die Durchführung der Praktikumsversuche mit radioaktiven Quellen und Röntengeräten nicht gestattet. Sollte das auf Sie zutreffen, sind Sie gesetzlich verpflichtet, dass dem Strahlenschutzbeauftragten mitzuteilen.

III.5 Lokale Strahlenschutzanweisungen und Bestimmungen

Grundsätzlich können Sie mit einer effektiven Dosis von kleiner $2 \mu\text{Sv}$ durch die Durchführung der fünf Versuche rechnen. Um dieses Risiko einzuordnen: Während eines zweistündigen Fluges erhalten Sie je nach Sonnenaktivität eine ähnliche bis doppelte so hohe effektive Dosis.

Diese geringe Dosis wird dadurch erreicht, dass für die Versuchsdurchführung

passende Abschirmungen für alle Messungen mit den Co-60-, Sr-90- und Cs-137-Quellen vorhanden sind. Um die Grundsätze des Strahlenschutzes direkt auf die Versuchsdurchführung anzuwenden, bedeutet das für Sie Folgendes:

- Holen Sie die benötigten Quellen erst zu sich an den Arbeitsplatz, sobald Sie diese wirklich brauchen und bringen Sie die Quellen sofort nach der letzten Messung zurück in den Quellenschrank!
- Schrauben Sie die Stabquellen direkt aus der Aufbewahrungsabschirmung in die Abschirmung des Versuchsaufbaus und nach Ende der Messung direkt wieder zurück in die Aufbewahrungsabschirmung.

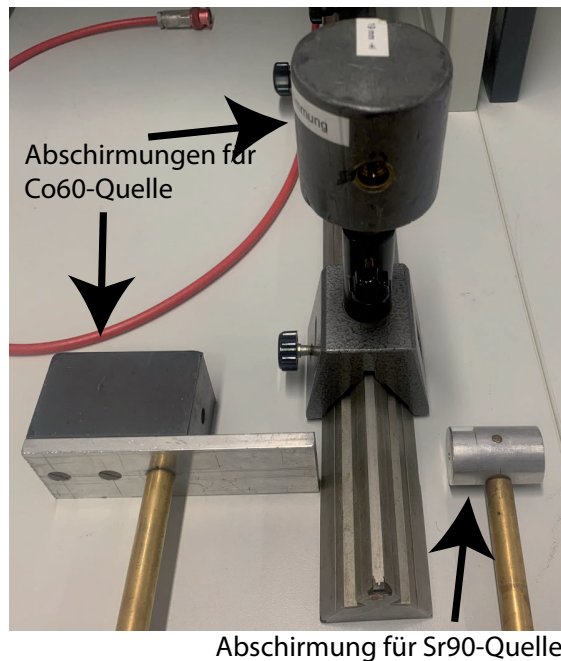


Abbildung 6: Verwendete Abschirmung für die Versuche 251 und 253

- Setzen Sie sich so an den Versuchsaufbau, dass Sie die Quelle nicht direkt neben Ihnen befindet.

- Fallen Ihnen mechanische Beschädigungen an den Quellen auf (zum Beispiel ein beschädigtes Austrittsfenster der Sr-90-Quelle), melden Sie das sofort der Praktikumsleitung und dem Tutor. Die Arbeiten im Raum sind sofort einzustellen und nichts (auch keine eigenen Gegenstände - Kontaminationsgefahr!) darf weggeräumt werden! Gleiches gilt, wenn Ihnen eine Quelle herunterfällt oder anderweitig durch einen Vorgang mechanische Beschädigungen entstanden sein könnten!



Abbildung 7: Das Betaaustrittsfenster der Sr₉₀-Quelle

- Entfernen Sie nur für die Entnahme der aktivierten Indium- und Silberproben den Deckel der Neutronenquelle und legen Sie diesen anschließend

direkt wieder auf die Quelle. In 10 cm Abstand beträgt die effektive Dosisleistung $2,2 \mu\text{Sv/h}$.

- Das Essen und Trinken ist in den Laborräumen mit Versuchen zur Radioaktivität nicht gestattet!

Deckel und Umhüllung der Neutronenquelle



Metalpräparate in der Neutronenquelle zur Aktivierung

Abbildung 8: Die im Praktikum verwendete Neutronenquellen

- Verschieben Sie den Wagen, auf dem sich die Neutronenquelle befindet, nicht!
- Sollte Ihnen an den Röntengeräten etwas Ungewöhnliches auffallen (zum Beispiel ein nicht funktionierender Schließmechanismus oder mechanische Beschädigungen am Gerät oder den Bleiglasscheiben), schalten Sie das Gerät sofort aus und informieren Sie sofort die Praktikumsleitung und Ihren Tutor.

Versuch 251 Statistik und Halbwertszeit des radioaktiven Zerfalls

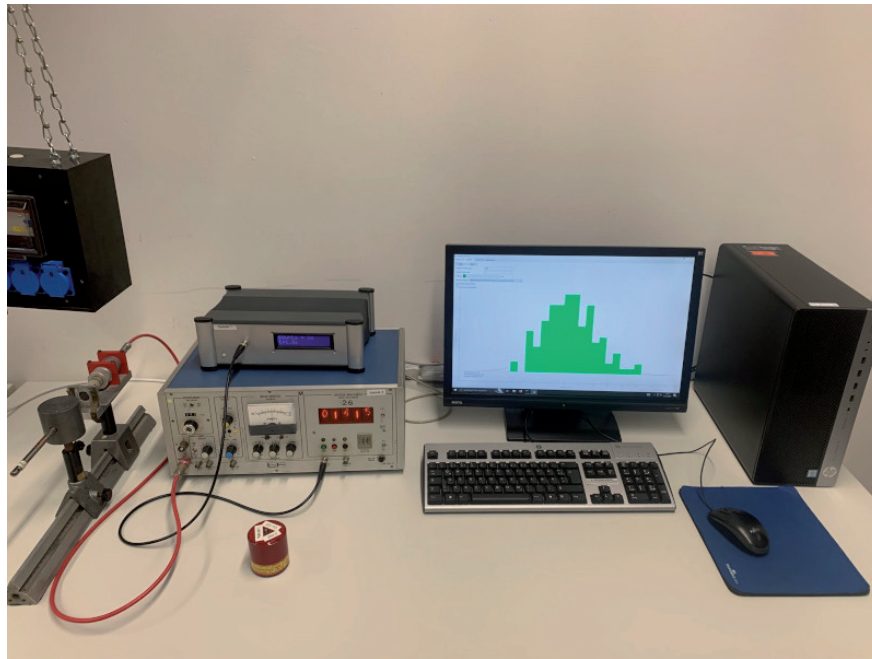


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
- Externer Impulszähler
- PC
- Neutronenquelle
- Präparatehalterung

- Radioaktives Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs , Indium)

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- J. Stiewe, *Wir wollen richtige Fehler*, der Praktikumsanleitung beigelegt.
- Homepage des Praktikums:
<https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Radioaktiver Zerfall, Geiger-Müller-Zählrohr.

Verständnisfragen:

1. Was ist Radioaktivität?
2. Wie lautet das Zerfallsgesetz?
3. Was ist ein Isotop?
4. In welcher Beziehung stehen die Binomial-, Poisson- und Gauß-Verteilung?
5. Wodurch wird die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate bestimmt?
6. An einer Probe eines langlebigen radioaktiven Materials werde als Mittel einer Reihe von 20 Messungen eine Rate von 23,5 Zerfällen pro 10 s gemessen.
 - a) Wie groß ist die Varianz dieser Verteilung?
 - b) Wie groß ist der Fehler des Mittelwertes?
7. Die Größe von 4402 Studenten sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 185 cm und einer Standardabweichung von 3 cm.
 - a) Wie viele dieser Studenten haben eine Größe zwischen 179 cm und 188 cm?
 - b) Wie viele sind größer als 191 cm?

IV Aufgaben

1. a) Anhand einer langen Messreihe sind die Schwankungen der Zählrate experimentell zu untersuchen und damit die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls zu bestätigen.
- b) Berechnen Sie anhand der Tabelle des Messprotokolls, wie viele Messungen um mehr als $\pm\sigma_{exp}$, $\pm 2\sigma_{exp}$ und $\pm 3\sigma_{exp}$ vom Mittelwert abweichen und vergleichen Sie dies mit den theoretischen Erwartungen.
2. Bestimmung der Halbwertszeit von ^{116}In

V Motivation

Radioaktive Atome tragen in sich eine geheimnisvolle innere Statistikk-Uhr Ein Atom ist zwar bekanntlich nicht unteilbar, doch alles in allem sehr stabil. Die allermeisten Atome in unserer Welt existieren bereits seit Milliarden von Jahren. Sie wurden irgendwann im Inneren eines Sterns erbrütet. Doch es gibt auch instabile Atome, die nicht für die Ewigkeit gemacht sind. Ohne jeden äußeren Einfluss können sie ganz spontan zerfallen. Solche Atome nennt man radioaktiv. Beim Zerfall senden sie Strahlung aus - Heliumatomkerne (Alpha-Strahlung), Elektronen (Beta-Strahlung) oder energiereiche elektromagnetische Wellen (Gamma-Strahlung). Betrachtet man ein einzelnes radioaktives Atom, so kann niemand vorhersagen, auch der beste Physiker nicht, wann dieses Atom zerfallen wird. Das kann in der nächsten Sekunde geschehen, in einem Monat oder in tausend Jahren. Die „innere Uhr“ eines radioaktiven Atoms kennen wir nicht. Und doch gehorcht der Zerfall radioaktiver Atome präzisen Gesetzen der Statistik. So lässt sich genau vorhersagen, wie sich Kollektive aus vielen Atomen verhalten werden, auch wenn das Schicksal jedes Einzelatoms nicht vorhersehbar ist. Nach einer ganz bestimmten Zeit, der so genannten Halbwertszeit, ist stets die Hälfte aller zunächst vorhandenen Atome zerfallen. Die Halbwertszeit ist dabei ein für jede Sorte radioaktiver Atome charakteristischer Wert. Das Isotop Jod-131 besitzt zum Beispiel immer eine Halbwertszeit von 8,02 Tagen. Manche Atome sind so instabil, dass ihre Halbwertszeit nur Bruchteile von Sekunden beträgt. Nach nur 1,05 Millionstel Sekunden sind beispielsweise 50 Prozent der Thorium-219-Atome zerfallen. Auch das andere Extrem gibt es. Uran-235, das zum Bau von Atombomben verwendet wird, hat eine Halbwertszeit von mehr

als 700 Millionen Jahren.“¹

VI Grundlagen

VI.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Misst man mit einem Zählrohr die von einem radioaktiven Präparat emittierten Teilchen unter unveränderten Versuchsbedingungen, so wird man in der Regel bei jeder Messung eine etwas andere Teilchenzahl erhalten. Der Grund hierfür ist, dass jeweils während der Messzeit nur ein kleiner Bruchteil der radioaktiven Atome zerfällt, und dass die einzelnen Zerfallsprozesse völlig **unabhängig** voneinander stattfinden. Die genaue Anzahl der innerhalb der Messzeit zerfallenden Atome bleibt daher dem Zufall überlassen.

Allerdings lässt sich mit dem Zufall hervorragend experimentieren und rechnen. Der Zufall zeigt Gesetzmäßigkeiten! Zwar ist es unmöglich den Zerfallszeitpunkt eines **einzelnen** Atomkernes vorherzusagen - über **eine große Anzahl** von Kernen lassen sich dagegen durchaus Vorhersagen treffen. Trägt man beispielsweise die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate in ein Histogramm ein und wiederholt dieses viele Male, so wird man unter bestimmten Voraussetzungen² stets dieselbe Verteilung erhalten (Vergleiche Abbildung 2). In den folgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, welche statistische Verteilungen geeignet sind den radioaktiven Zerfall zu beschreiben.

„Alle Dinge umfaßt eine bestimmte Ordnung und was den ihm angewiesenen Platz verläßt, das tritt damit zwar in den Bereich einer andern Ordnung ein, aber niemals fällt es völlig aus aller Ordnung heraus, denn Willkür und Zufall sind unbekannt im Reiche der Vorsehung!“³

VI.1.1 Die Binomial-Verteilung

Die Binomial-Verteilung ergibt sich aus folgender Fragestellung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A bei n voneinander unabhängigen Versuchen genau k-mal eintritt, wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A bei einem Versuch ist und (1-p) die Wahrscheinlichkeit

¹Norbert Lossau, Artikel vom 18. August 2004 in der Zeitung „Die Welt“

²Die Halbwertszeit des Isotops muss groß gegenüber der Beobachtungszeit sein.

³Boethius Anicius Manlius Severinus: Die Tröstungen der Philosophie

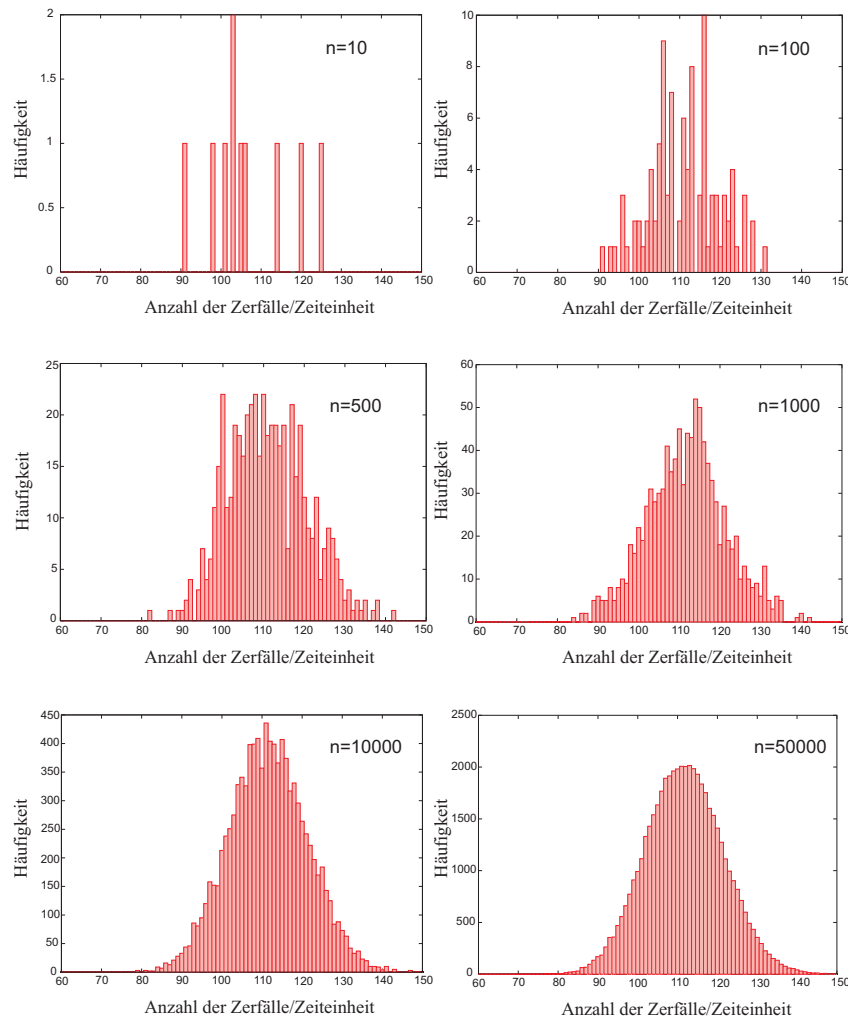


Abbildung 2: Trägt man die pro Zeiteinheit gemessenen radioaktive Zerfälle einer großen Anzahl von Atomen in ein Histogramm ein, so erhält man nach vielen Messungen stets dieselbe Verteilung. n bezeichnet die Anzahl der Messungen.

für das Nichteintreten dieses Ereignisses darstellt?

Nehmen wir zunächst an, dass das Ereignis A gerade bei den ersten k Versuchen eintritt, bei den folgenden $n - k$ dagegen nicht. Da die Versuche voneinander statistisch unabhängig sein sollen, müssen die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versuche multipliziert werden. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit W dieses konkreten Beispiels:

$$W = p^k (1 - p)^{n-k}. \tag{1}$$

Das Ereignis A muss aber nicht unbedingt bei den ersten k Versuchen auftreten. Es muss nur innerhalb von n Versuchen genau k -mal vorkommen. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k herauszugreifen. Unter Beachtung aller möglichen Permutationen $\binom{n}{k}$ erhalten wir schließlich die Binominal-Verteilung:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \tag{2}$$

Dazu folgendes Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zehnmaligem Würfeln genau dreimal die Zahl „4“ fällt?

aus $p = 1/6$, $n = 10$ und $k = 3$ folgt:

$$B(3; 10, 1/6) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} = 15,5\%$$

Die Binomial-Verteilung ist eine diskrete⁴, zweiparametrische Verteilung mit den Parametern n und p . Als Notation verwenden wir die Bezeichnung $B(k; n, p)$. Dabei kennzeichnet das Kürzel B , dass es sich um eine Binomial-Verteilung handelt. In der Klammer wird zunächst die Variable angegeben, anschließend - getrennt durch ein Semikolon - die Parameter.

⁴d.h. $n, k \in \mathbb{N}$

Eigenschaften der Binomial-Verteilung:

Normierung:
$$\sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad (3)$$

Mittelwert:
$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k B(k; n, p) = np \quad (4)$$

Varianz:
$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1 - p) \quad (5)$$

Standardabweichung:
$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} \quad (6)$$

Unsere bisherigen Überlegungen zur Binomial-Verteilung lassen sich nun einfach auf den radioaktiven Zerfall übertragen. Auch hier handelt es sich um ein Ereignis mit zwei möglichen Ausgängen: Entweder ein radioaktiver Atomkern zerfällt innerhalb eines gewissen Beobachtungszeitraums oder eben nicht. Stellt p die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Atomkerns dar, so beschreibt die Binomial-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass von n Atomkernen, genau k innerhalb eines bestimmten Zeitraums t zerfallen. Die Zerfallswahrscheinlichkeit p hängt natürlich vom Beobachtungszeitraum ab. Je länger Sie warten, desto mehr Zerfälle werden Sie beobachten. Es lässt sich leicht zeigen, dass für p gilt:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (7)$$

wobei die Zerfallskonstante λ eine für das Isotop charakteristische Größe darstellt. Sie werden diesen Sachverhalt in dem nächsten Praktikumsversuch, „Aktivierung von Indium und Silber mit langsamen Neutronen“, noch genauer untersuchen. Ist die Zerfallskonstante sehr klein, wie es bei den in diesem Versuch verwendeten radioaktiven Präparaten der Fall ist, so kann die Zerfallswahrscheinlichkeit p für einen festen Beobachtungszeitraum als konstant angenommen werden.

Obwohl die Binomial-Verteilung die Statistik des radioaktiven Zerfalls sehr gut beschreibt, ist sie in der Praxis nur schwer handhabbar. Stellen sie sich vor, sie müssten die Fakultät von $n \approx 10^{23}$ ausrechnen! In vielen Fällen ist aber die Zerfallswahrscheinlichkeit p sehr klein und die Anzahl der Atome n sehr groß. Sofern dies gilt, lassen sich einige mathematische Näherungen anwenden und wir erhalten schließlich aus der Binomial-Verteilung die Poisson-Verteilung.

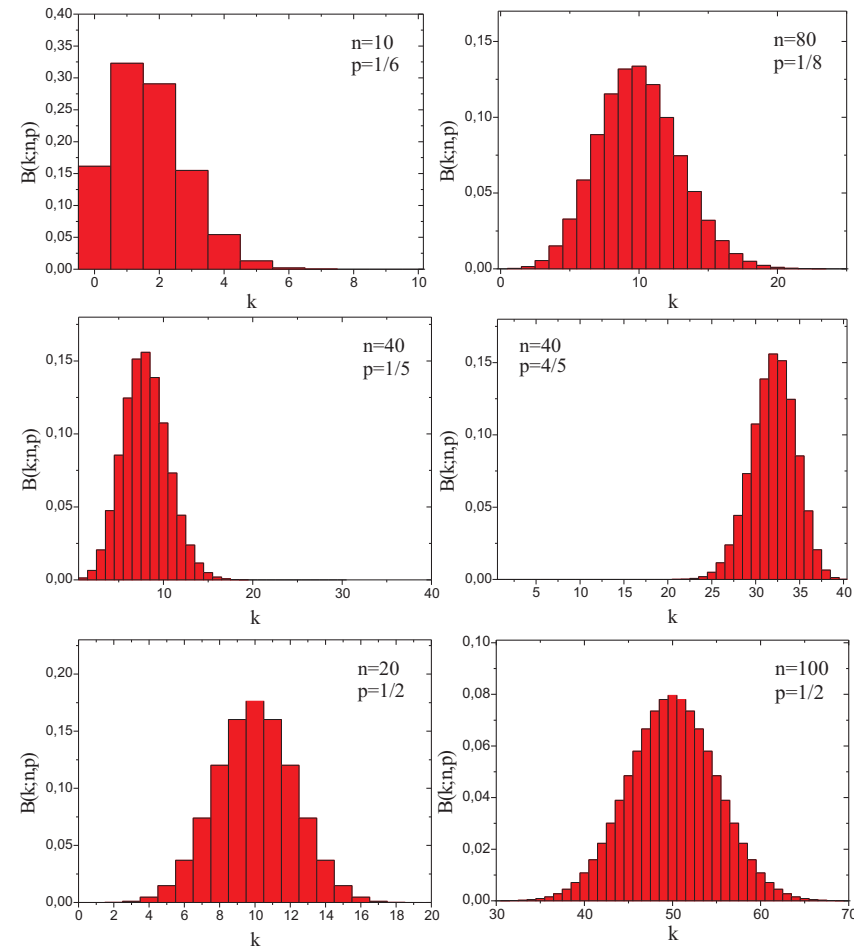


Abbildung 3: Binomial-Verteilung für unterschiedliche Werte von n und p .

VI.1.2 Die Poisson-Verteilung

Für kleine Zerfallswahrscheinlichkeiten ($p \rightarrow 0$) und eine große Anzahl von radioaktiven Atome ($n \rightarrow \infty$) kann die Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung angenähert werden. Allerdings müssen wir fordern, dass der Mittelwert $\mu \equiv \langle k \rangle = np$ endlich bleibt. Die Poisson-Verteilung ist also dann gültig, wenn die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse (d.h. der Mittelwert) das Ergebnis einer sehr großen Zahl von Ereignismöglichkeiten und einer sehr kleinen Ereigniswahrscheinlichkeit ist. Die mathematische Herleitung dieser Verteilung finden Sie im Anhang. Wir wollen an dieser Stelle nur das Ergebnis angeben:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}. \tag{8}$$

Die Poisson-Verteilung ist wie die Binomial-Verteilung eine diskrete Verteilung ($k \in \mathbb{N}$). Sie ist eine einparametrigte Verteilung, die durch den Mittelwert μ vollständig beschrieben wird.

Eigenschaften der Poisson-Verteilung:

Normierung:
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \tag{9}$$

Mittelwert:
$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \mu) = \mu \tag{10}$$

Varianz:
$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \tag{11}$$

Standardabweichung:
$$\sigma = \sqrt{\mu} \tag{12}$$

Beachten Sie, dass der Parameter μ zugleich den Mittelwert als auch die Varianz darstellt. Die Standardabweichung berechnet sich demnach aus der Wurzel des Mittelwertes. Hierauf beruht das \sqrt{N} -Gesetz bei der Fehlerbestimmung von gezählten Größen. Wir werden an späterer Stelle noch darauf zurückkommen.

In Abbildung 4 ist die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte von μ dargestellt. Für $\mu < 1$ ist der wahrscheinlichste Wert stets Null. Die Verteilung besitzt in diesem Fall kein Maximum und nimmt monoton mit zunehmendem k ab. Für $\mu > 1$ besitzt die Verteilung ein Maximum, dessen Breite allerdings bei

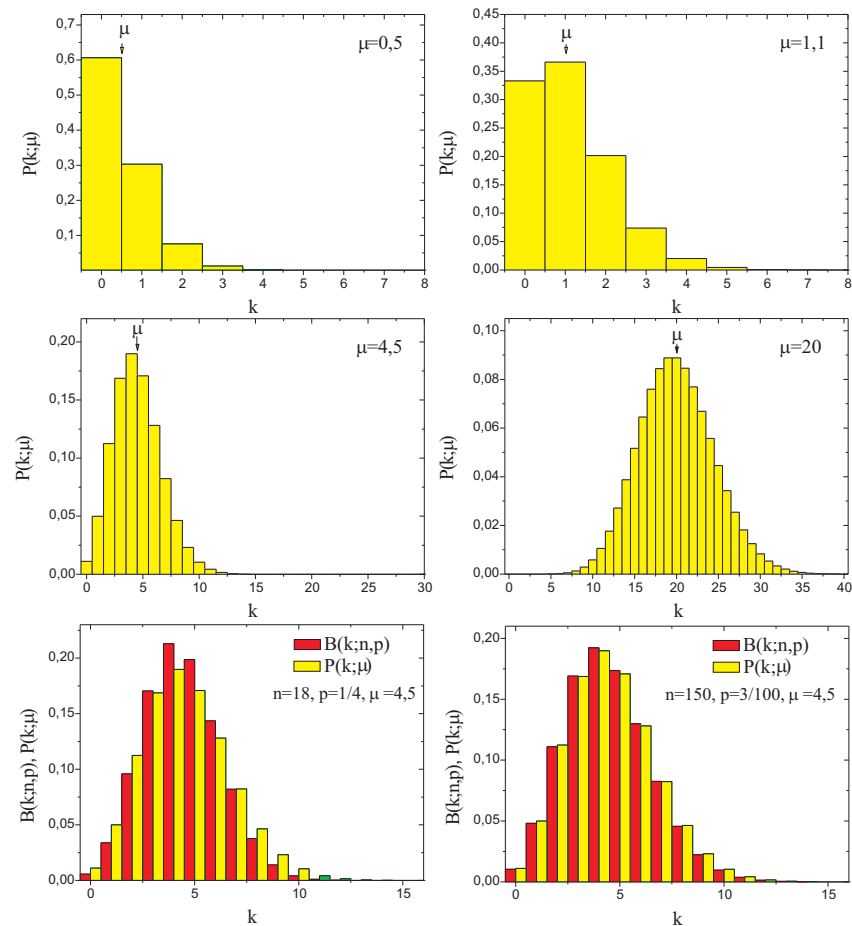


Abbildung 4: Poisson-Verteilung für unterschiedliche Werte von μ . Untere Reihe: Vergleich der Binomial-Verteilung mit der Poisson-Verteilung. Für große Werte von n und kleine Wahrscheinlichkeiten p nähert sich die Binomial-Verteilung der Poisson-Verteilung.

gleichem Mittelwert größer ist als die der Binomial-Verteilung (Die Varianz der Poisson-Verteilung entspricht dem Mittelwert $\sigma_P^2 = \mu \equiv np$, während sie bei der Binomial-Verteilung gegeben ist durch $\sigma_B^2 = np(1-p) < \sigma_P^2$). Weiterhin fällt auf, dass die Verteilungen für kleine Mittelwerte stark asymmetrisch sind und für größer werdende Mittelwerte immer symmetrischer werden. In der Tat geht die Poisson-Verteilung für große μ in die symmetrische Gauß-Verteilung über.

VI.1.3 Die Gauß-Verteilung

Für einen großen Mittelwert ($\mu > 30$) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gauß-Verteilung approximieren (Die Herleitung finden Sie wieder im Anhang):

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \tag{13}$$

Gleichung (13) stellt ein Spezialfall der Gauß-Verteilung dar, bei der die Varianz dem Mittelwert entspricht. Die allgemeine Form lautet:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}}. \tag{14}$$

Eigenschaften der Gauß-Verteilung:

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \tag{15}$$

$$\text{Mittelwert: } \int_{-\infty}^{\infty} k G(k; \mu, \sigma) dk = \mu \tag{16}$$

$$\text{Varianz: } \int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2 \tag{17}$$

Für den Spezialfall einer Zählstatistik (Gleichung (13)) ergibt sich, wie bei der Poissonverteilung, für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mu}. \tag{18}$$

Im Gegensatz zur Binomial- und Poissonverteilung, deren Variable k nur diskrete Werte annehmen kann, ist die Gauß-Verteilung kontinuierlich, d.h. $k \in \mathbb{R}$. Sie ist eine zweiparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ eindeutig bestimmt ist. In Abbildung 5a) sind einige Verteilungen mit unterschiedlichen Standardabweichungen dargestellt. Je größer die

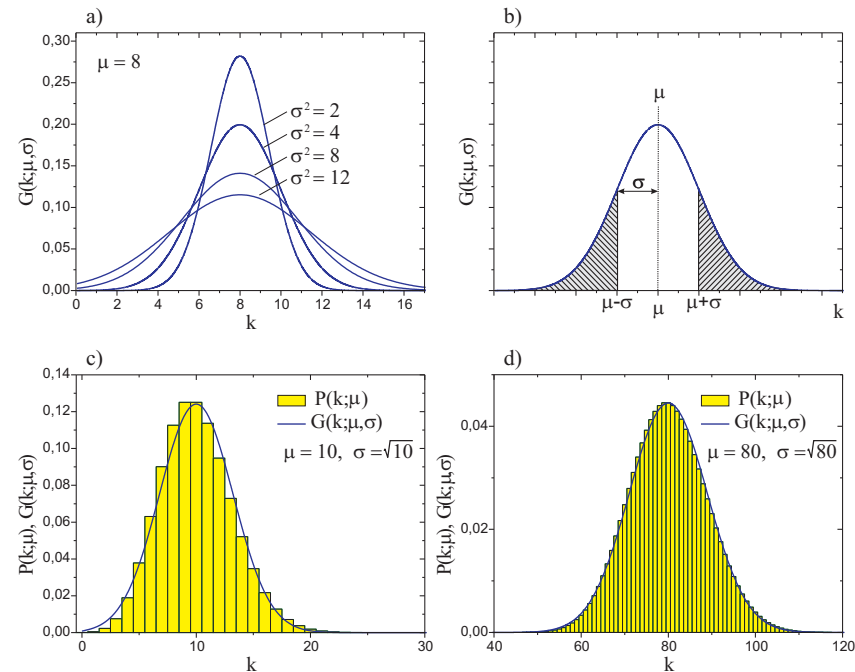


Abbildung 5: a) Gauß-Verteilung für $\mu = 8$ und verschiedene Werte von σ . b) Grafische Darstellung von σ . c) und d) Vergleich der Poisson-Verteilung mit der Gauß-Verteilung.

Standardabweichung σ , desto breiter ist die Verteilung. Die Bilder c) und d) vergleichen die Gauß-Verteilung mit der Poissonverteilung für zwei unterschiedliche Mittelwerte. In Abbildung 5b) ist eine Gauß-Verteilung abgebildet, bei der die Flächen unter der Kurve im Bereich $k > \mu + \sigma$ und $k < \mu - \sigma$ schraffiert dargestellt ist. Diese Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit P_σ an, dass k um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert μ abweicht. P_σ lässt sich gemäß

$$P_\sigma = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \tag{19}$$

berechnen und beträgt etwa 30 %. Analog erhält man die Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen von μ um mehr als $\pm 2\sigma$ und $\pm 3\sigma$ (Tabelle 5). Um auf einfache

Eine Abweichung von μ um mehr als	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
hat die Wahrscheinlichkeit	31,73%	4,55%	0,27%

 Tabelle 5: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .*

cher Weise die Standardabweichung aus einer Gaußkurve abzuschätzen, sollten Sie sich folgende Beziehung merken:

$$FWHM \approx 2,36\sigma, \quad (20)$$

wobei *FWHM* für *full width at half maximum* steht, d.h. für die volle Breite der Kurve auf halber Höhe.

VI.2 Statistik und Messfehler

In der Praxis ist der Mittelwert μ einer sehr langen Messreihe meist nicht gegeben, sondern nur das Resultat k einer einzigen Messung. In diesem Fall kann man das Ergebnis als Schätzung des Mittelwertes interpretieren:

$G(\mu; k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert μ ergeben würde, wobei das Resultat k einer einzigen Messung gegeben ist.

Da k und μ nicht stark voneinander abweichen, können wir aufgrund einer einzigen Messung auch einen Näherungswert für die Standardabweichung angeben:

$$\sigma = \sqrt{k}. \quad (21)$$

Es ist üblich, das Resultat einer solchen Zählung in der Form

$$k \pm \sqrt{k} \quad (22)$$

anzugeben. Dies ist eine Abkürzung für die Sätze: „Ich habe k Ereignisse gezählt. Daraus schließe ich, wegen Abbildung 5b) und Tabelle 5, dass der Mittelwert einer sehr langen Messung mit 68% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm \sqrt{k}$ liegt, mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm 2\sqrt{k}$ und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3% außerhalb des Bereichs $k \pm 3\sqrt{k}$ “.

Die Betrachtung der statistischen Fehler ist besonders wichtig, wenn man herausfinden will, ob die Differenz zweier Zählergebnisse k_1 und k_2 , allein durch

statistische Schwankungen erklärt werden kann oder auf eine Änderung der Versuchsbedingungen zurückzuführen ist. Viele Experimente laufen auf diese Fragestellung hinaus.

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz erhält man den mittleren statistischen Fehler einer Differenz durch quadratisches Addieren der Einzelfehler.

Es sei

$$\Delta = k_1 - k_2; \quad \sigma_1 = \sqrt{k_1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{k_2}.$$

Dann ist

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2}.$$

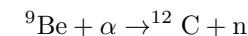
Man schreibt dies meist in der Form :

$$\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass Δ allein aufgrund von statistischen Schwankungen von Null um mehr als eine, zwei oder drei Standardabweichungen ($\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2}$) abweicht, gilt wieder Tabelle 5. In der Regel hält man den Einfluss einer Änderung der Versuchsbedingungen für erwiesen, wenn Δ um mehr als drei Standardabweichungen von Null abweicht. In diesem Fall bezeichnet man die Differenz Δ als **signifikant**.

VI.3 Aktivierung mit thermischen Neutronen

Bei diesem Teilversuch wird das Isotop ^{115}In mit Hilfe thermischer Neutronen aktiviert. Die Neutronenquelle besteht aus einem Präparat, das Berylliumspäne und einen α -Strahler (^{241}Am) enthält. Durch die Kernreaktion



entstehen Neutronen mit einer Energie von 1 - 10 MeV. Diese schnellen Neutronen werden in dem die Neutronenquelle umgebenden Paraffinblock durch elastische Stöße mit den Wasserstoffkernen abgebremst, bis sie nahezu thermische Energie erreicht haben. Stöße gegen die Kohlenstoffkerne bremsen die Neutronen nur wenig ab. Bei einem elastischen Stoß gegen eine gleich schwere Masse (nämlich gegen ein Proton) verliert dagegen das Neutron im Mittel die Hälfte der Energie. Viele Atomkerne haben einen großen Wirkungsquerschnitt für den Einfang langsamer Neutronen. Dabei entsteht ein Isotop des bestrahlten Elements mit einer um eins erhöhten Massenzahl. Wenn dieser Kern radioaktiv

ist, stellt die Aktivierung durch langsame Neutronen die bequemste Möglichkeit zur Erzeugung dieses radioaktiven Isotops dar, aber auch zum empfindlichen analytischen Nachweis des Grundisotops in einer Probe. Bei Bestrahlung von Indium wird aus dem stabilen Isotop ^{115}In der β -Strahler ^{116}In gebildet.

Bei der Aktivierung wird pro Sekunde eine bestimmte Zahl von radioaktiven Kernen erzeugt. Die Zahl der pro Sekunde zerfallenden Kerne ist aber der Anzahl der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne proportional (Zerfallsgesetz). Daher nimmt die Aktivität A (d.h. die Zahl der Zerfälle pro Sekunde) als Funktion der Bestrahlungsdauer t nach dem Gesetz

$$A(t) = A(\infty)(1 - \exp\{-\lambda t\}) \quad (23)$$

zu, bis ein Gleichgewicht eintritt, bei dem pro Sekunde gleichviel Kerne des radioaktiven Isotops neu gebildet werden wie pro Sekunde zerfallen. Nach Ende der Aktivierung tritt dann nur noch der Zerfall nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (24)$$

auf. Für die Halbwertszeit gilt

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (25)$$

VII Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Das Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs) erhalten Sie vom Tutor. Folgen Sie für die korrekte Einstellung des Zählgerätes den Anweisungen im Abschnitt „Inbetriebnahme des Zählgerätes - Einstellung der Einsatzspannung“ in der Beschreibung *Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität*. Stellen Sie die Zählrohrspannung so ein, dass Sie 50 V über der Einsatzspannung liegt.

In dieser Aufgabe werden Sie viele Male (mindestens 1500 Mal) die Zerfälle eines radioaktiven Präparats innerhalb eines festen Zeitraums (Torzeit) messen und in ein Histogramm darstellen. Falls sich der radioaktive Zerfall völlig statistisch verhält, sollte das gemessene Histogramm durch eine Poisson-Verteilung, bzw. bei einem großen Mittelwert, durch eine Gauß-Verteilung beschrieben werden können. Überprüfen Sie dies zunächst für einen großen Mittelwert:

Nähern Sie das Präparat durch Verschieben des Reiters dem Zählrohr an, bis etwa 100 Zerfälle/Sekunde gezählt werden. Schalten Sie den Computer und das externe Zählgerät ein und starten Sie das Messprogramm Versuch.251.252 auf dem Desktop. Wählen Sie im Programm den Tab für Versuch 251 aus und wählen bei Messung die passende Option aus. Stellen Sie im Programm die Torzeit auf 1 s. Starten Sie die Messung durch Drücken des Pfeilsymbols in der linken oberen Ecke. Die registrierten Zerfälle/Torzeit werden in einem Histogramm dargestellt. Wenn Sie die Option „Gaußkurve“ einschalten, wird aus dem gemessenen Mittelwert und der Standardabweichung die dazugehörige Gauß-Verteilung berechnet und im Histogramm unten angezeigt. Beachten Sie, dass die angezeigte Gaußkurve nicht angefüttet wird, sondern aus den Messdaten berechnet wird! Zusätzlich wird aus den Messdaten der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet und unterhalb der x-Achse angezeigt.

Den Abszissenbereich kann durch Zoomen mit dem Mausrad oder durch Ziehen verschoben werden. Durch den Klick auf das A im unteren linken Bildschirmck kehren Sie zur ursprünglichen Ansicht zurück.

Insgesamt sind mindestens 1500 Messungen durchzuführen. Tragen Sie einfach den gewünschten Wert der durchzuführenden Messungen im entsprechenden Feld des Programms ein. Die Messung wird automatisch als .txt Datei im Ordner mit Ihrem gewählten Gruppennamen gespeichert.

Aufgabe 2: Messen der Halbwertszeit von Indium

Messen Sie für zwei mal zwei Minuten (oder 4 Minuten) ohne Präparat den Nulleffekt. Überzeugen Sie sich durch eine Testmessung, dass die Kobalt-Quelle die Untergrundmessung nicht mehr beeinflusst. Wechseln Sie den Tab zu Versuch 252, wählen Sie bei der Art der Messung Indium aus und stellen Sie die Torzeit auf 120 Sekunden. Tragen Sie die gewünschte Anzahl an Messungen ein, sodass sich insgesamt ca. 50 Minuten Messzeit ergibt. Nehmen Sie nun das Indiumpräparat (grüne oder rote Markierungen) aus der Neutronenquelle. Das Indiumpräparat wird mit der Indiumseite zum Zählrohr hin in die vorgesehene Aussparung gesteckt und mit einem 1 mm Aluminiumblech dahinter fixiert. Starten Sie sofort das Messprogramm durch einen Mausklick auf den Pfeil im linken oberen Bereich des Programms. Die Messdaten werden wieder automatisch im Ordner mit dem entsprechenden Gruppennamen gespeichert.

VIII Auswertung

Aufgabe 1: Berechnen Sie anhand der Tabelle des Messprotokolls, wie viele Messungen um mehr als $\pm\sigma_{exp}$, $\pm 2\sigma_{exp}$, $\pm 3\sigma_{exp}$ und $\pm 4\sigma_{exp}$ vom Mittelwert abweichen und vergleichen Sie dies mit den theoretischen Erwartungen.

Aufgabe 2: Von den gemessenen Zerfällen wird der Nulleffekt abgezogen. Die korrigierten Messwerte werden mit den entsprechenden statistischen Fehlern in einfach logarithmisches Papier (1 Dekade) eingetragen. Durch die Messpunkte wird eine Ausgleichs- und Fehlergerade gelegt, an der die Halbwertszeit und dessen Fehler abgelesen wird. Berechnen Sie die Zerfallskonstante des ^{116}In .

IX Anhang**IX.1 Die Poisson-Verteilung als Grenzfall der Binomial-Verteilung**

Bezeichnen wir den Mittelwert von k mit $\mu \equiv np$, so lässt sich die Binomial-Verteilung

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (26)$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (27)$$

wie folgt umformen. Mit $p = \mu/n$ ergibt sich

$$B(k; n, p) = \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\mu^k}{n^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \quad (28)$$

$$= \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \right\} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \frac{\mu^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n. \quad (29)$$

Führen wir nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ durch, mit der Forderung das $\mu = np$ endlich bleibt, so konvergieren die ersten beiden Faktoren gegen Eins. Für den zweiten Faktor ist dies sofort einzusehen. Für den ersten Ausdruck in der geschweiften Klammer gilt für $n \gg k$:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \approx n^k \quad (30)$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \right\} = 1. \quad (31)$$

Der letzte Faktor in Gleichung (29) konvergiert gegen die Exponentialfunktion mit dem Argument $-\mu$. Somit erhalten wir schließlich die Poisson-Verteilung:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}. \quad (32)$$

IX.2 Die Gauß- Verteilung als Grenzfall der Poisson- Verteilung

Für große Mittelwerte ($\mu > 30$) geht die Poisson- Verteilung in eine Gauß- Verteilung über. Ersetzen wir die Fakultät in der Poisson- Verteilung durch die Stirling'sche Näherungsformel

$$k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}, \quad (33)$$

so ergibt sich

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \rightarrow \frac{\mu^k e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} = \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{\mu}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(1 + \frac{\mu-k}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mu-k}{k}\right)\right\} \quad (36)$$

Entwickeln wir den Logarithmus nach Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (37)$$

und brechen nach dem quadratischen Glied ab, so erhalten wir

$$P(k; \mu) \rightarrow \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\mu-k}{k} - \frac{1}{2} \frac{(\mu-k)^2}{k^2}\right)\right\}. \quad (38)$$

Bei hinreichend großem k können wir $k + 1/2$ durch k ersetzen und erhalten damit

$$P(k; \mu) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2k}}. \quad (39)$$

Da $(\mu - k)/k \ll 1$ können wir im Nenner des Exponenten k durch μ ersetzen und erhalten schließlich einen Spezialfall der Gauß- Verteilung mit $\sigma = \sqrt{\mu}$:

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \quad (40)$$

Versuch 253 Absorption von β - und γ -Strahlung

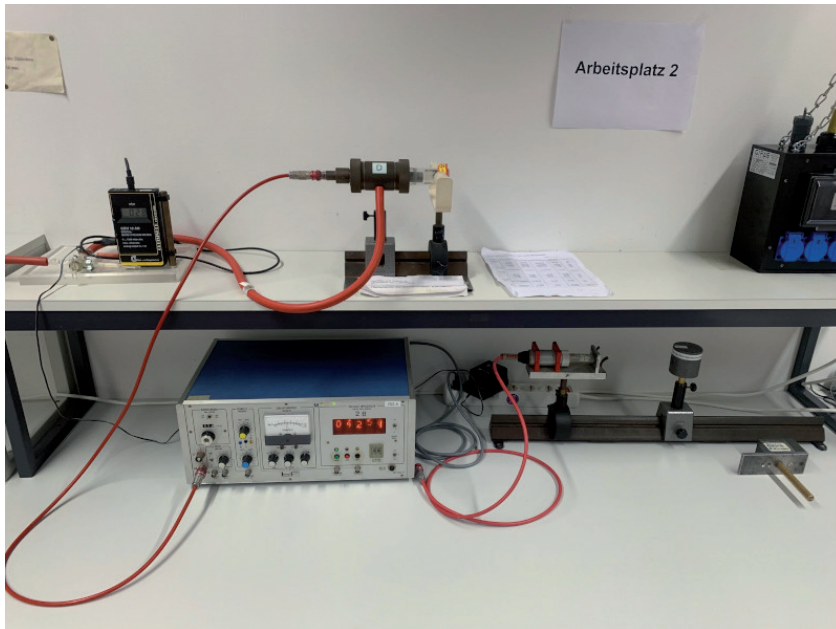


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Absorption von β - und γ -Strahlung

I Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr
- Zählgerät
- β -Präparat ($^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$)
- γ -Präparat (^{60}Co oder (^{137}Cs))
- diverse Präparatehalter und Kollimatoren

- Aluminium- und Bleiabsorber
- Vakuumpumpe

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder.

III Vorbereitung

1. Was ist Radioaktivität?
2. Was ist β - und γ -Strahlung? Wie sehen die Zerfallsprozesse aus?
3. Wie sieht das Energiespektrum für die verschiedenen Arten ionisierender Strahlung aus? Woher kommt der Unterschied?
4. Wie werden β - und γ -Strahlung detektiert? (Zählrohr, Szintillator, etc.)
5. Wie wird β -Strahlung in Materie absorbiert? Durch welche Prozesse verlieren die Teilchen ihre Energie? Welche typische Reichweite besitzen die Teilchen? Wie sieht die Absorptionskurve aus?
6. Wie wird γ -Strahlung in Materie absorbiert? Erläutern Sie das Beer'sche Gesetz. Durch welche Prozesse verlieren die Teilchen ihre Energie? Wie sieht die Absorptionskurve aus?
7. Was beschreibt die Aktivität? Wie ändert sich die Aktivität einer Quelle mit der Zeit?

IV Aufgaben

Es ist die Absorption von β -Strahlen ($^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$) und von γ -Strahlen (^{60}Co) zu messen. Aus den Absorptionskurven sind die Maximalenergie der β -Strahlung bzw. die Energie der γ -Strahlung zu bestimmen. Die Aktivität des γ -Strahlers ist abzuschätzen.

V Grundlagen

Radioaktivität ist die Eigenschaft instabiler Atomkerne spontan unter Energieabgabe in einen energetisch günstigeren Zustand überzugehen. Die freiwerdende Energie wird in Form von geladenen Teilchen (α -, β - Strahlung) oder elektromagnetischer Strahlung (γ -Quanten) abgegeben. Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes beschreibt dabei die pro Sekunde auftretenden Zerfälle. Dabei gilt das Zerfallsgesetz:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

wobei λ die Zerfallskonstante darstellt. Sie lässt sich aus der Halbwertszeit $T_{1/2}$ gemäß

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \tag{2}$$

bestimmen.

V.1 Bestimmung der Aktivität

Die Aktivität A eines radioaktiven Präparats beschreibt die Zerfälle pro Sekunde in alle Raumrichtungen, d.h. um die Aktivität eines Präparats zu bestimmen müssten Sie die Anzahl der pro Sekunde emittierten Teilchen der gesamten Kugeloberfläche ($= 4\pi$) messen. Tatsächlich wird die Strahlung jedoch nur in einem kleinen Teil der Kugeloberfläche, nämlich im sogenannten Raumwinkel Ω , detektiert.

Da der Abstand d zwischen Präparat und Detektor groß gegen den Detektorradius r ist, gilt in erster Näherung für den Raumwinkel

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{d^2}. \tag{3}$$

Für die auf die gesamte Kugeloberfläche hochgerechnete Aktivität gilt dann:

$$A = \frac{4\pi n}{\epsilon \Omega} = \frac{4n d^2}{\epsilon r^2}, \tag{4}$$

wobei n für die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde steht. Die Größe ϵ stellt die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors dar. Für β -Strahlung ist diese für im Praktikum verwendete Zählrohre praktisch 1, für γ -Quanten mit Energien von einigen 100 keV bis einigen MeV etwa 4%.

Raumwinkel-Korrektur

Die oben gemachte Näherung für Ω beinhaltet die Annahme, dass die Strahlung direkt am Zählroreingang detektiert wird. Da das Zählrohr jedoch auf seiner gesamten Länge $l = 4$ cm detektiert, folgt, dass ein Teil der in Ω emittierten Strahlung das Zählrohr undetektiert durchdringen kann und in der Zählrohrwand absorbiert wird oder das Zählrohr verlässt. Somit ergibt sich eine Überschätzung des Raumwinkels und damit eine Unterschätzung der bestimmten Aktivität. Alternativ könnte man den minimalen Raumwinkel als $\Omega = \frac{\pi r^2}{(d+l)^2}$ in diesem Fall wird der Raumwinkel jedoch unterschätzt und die Aktivität wird zu groß. Die beiden Extremfälle sind in Abbildung 2 dargestellt.

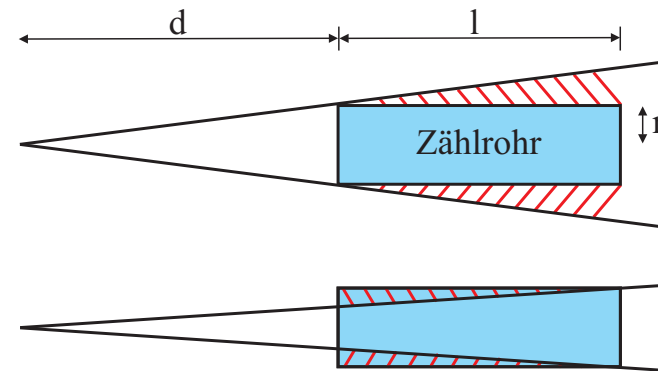


Abbildung 2: Extremfälle des Raumwinkels

Um den Fehler zu korrigieren muss der Raumwinkel so gewählt werden, dass sich der überschätzte und der unterschätzte Bereich aufheben. Eine einfache Abschätzung wäre z.B. die Berücksichtigung der halben Zählrohlänge:

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{(d + l/2)^2}. \tag{5}$$

Damit ergibt sich für die Aktivität:

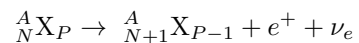
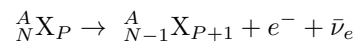
$$A_{\text{korrr}} = \frac{4n(d + l/2)^2}{\epsilon r^2} = A k_1 \tag{6}$$

V.2 Arten radioaktiver Strahlung

Je nach Art des entstehenden Zerfallsproduktes unterscheidet man drei verschiedene Zerfallsarten. Bei den folgenden Zerfallsarten bezeichnen A die Massenzahl (Anzahl der Nukleonen), N die Neutronenzahl und P die Anzahl der Protonen eines Nuklids X .

β -Strahlung

β -Teilchen sind entweder negativ geladene Elektronen (β^- -Zerfall) oder positiv geladene Positronen (β^+ -Zerfall).



Da neben dem Elektron (Positron) zusätzlich noch ein Antineutrino (Neutrino) emittiert wird und sich somit die beim Zerfall freiwerdende Energie auf drei verschiedene Teilchen verteilt, ist das Energiespektrum des β -Zerfalls nicht monoenergetisch sondern kontinuierlich. Das Elektron (Positron) kann jede Energie zwischen 0 und der maximal beim Zerfall freiwerdenden Energie E_{max}^β annehmen. E_{max}^β ist wieder charakteristisch für den emittierenden Stoff. Das zusätzlich emittierte Antineutrino (Neutrino) ist nahezu masselos, ungeladen und hat die Energie, die dem β -Teilchen fehlt. Der Restkern erfährt auch beim β -Zerfall einen Rückstoß.

γ -Strahlung

Bei der γ -Strahlung handelt es sich um elektromagnetische Strahlung. Sie entsteht als Nebenprodukt beim α - und β -Zerfall, wenn der Mutterkern in einen angeregten Zustand des Tochterkerns zerfällt. Beim Übergang in den Grundzustand (oder einen energetisch niedrigeren Zustand) wird ein Photon mit einer charakteristischen Energie emittiert. Somit besteht das Energiespektrum der γ -Strahlung aus diskreten Energiewerten, die für den emittierenden Stoff charakteristisch ist.

V.3 Absorptionsmechanismen radioaktiver Strahlung

Geladene Teilchen (α - und β -Strahlung) werden in Materie überwiegend durch Stöße und Wechselwirkung mit den Elektronen der Atomhüllen gebremst. Dabei geben sie ihr Energie nahezu kontinuierlich in kleinen Portionen ab. Der Energieverlust ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

D.h. schnelle Teilchen geben weniger Energie ab, als langsame. Die abgegebene Energie wird in Ionisierung angelegt. α -Strahlung hat in Materie eine bestimmte Reichweite die proportional zur Energie der Teilchen ist. Durch Variation der Absorberdicke kann die Reichweite der Strahlung bestimmt werden. Bei den monoenergetischen α -Teilchen bleibt die Zählrate hinter dem Absorber dabei nahezu konstant bis zum Erreichen einer kritischen Dicke, danach fällt sie rasch auf Null ab (siehe Abbildung 3).

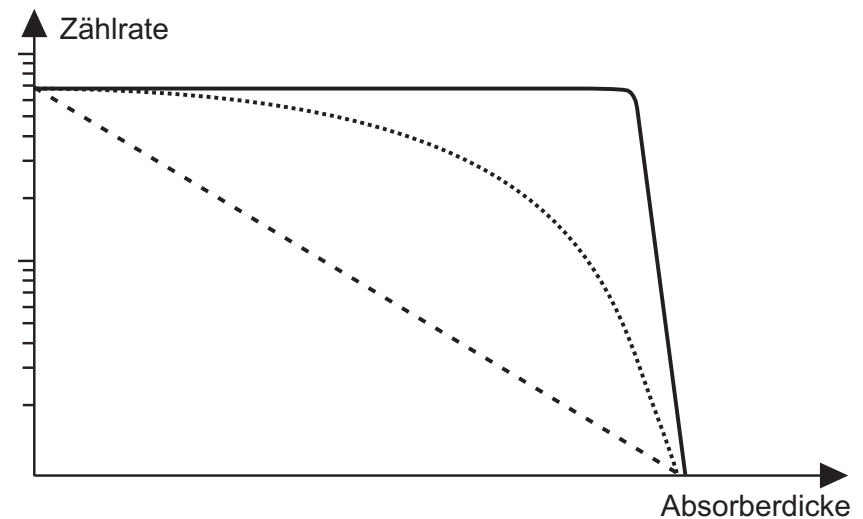


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Reichweite von α - (durchgezogene Linie), β - (gepunktete Linie) und γ -Strahlung (gestrichelte Linie) in Materie.

Elektronen sind sehr viel leichter und damit schneller als α -Teilchen gleicher Energie. Sie haben daher eine viel größere Reichweite. Elektronen werden wegen ihrer kleinen Masse und großen Reichweite durch Streuung im Absorber vielfach abgelenkt, und die wahre Bahnlänge im Absorber kann z.B. doppelt so groß wie die Absorberdicke sein. Dies führt selbst bei monoenergetischen Elektronen zu einer Verwaschung der gemessenen Absorptionskurve. Das kontinuierliche Energiespektrum der β -Strahlen erschwert weiterhin eine genaue Auswertung der Absorptionskurve bezüglich der Energie-Reichweite-Beziehung.

γ -Quanten werden in Materie nach dem Lambert-Beer-Gesetz absorbiert:

$$n = n_0 e^{-\mu x}, \quad (7)$$

wobei μ der Schwächungskoeffizient des jeweiligen Absorbermaterials ist. Bei der Absorption und Streuung tragen die Elektronen der Atomhülle mehr bei, als der Atomkern. Die wichtigsten Schwächungsmechanismen sind Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarbildung:

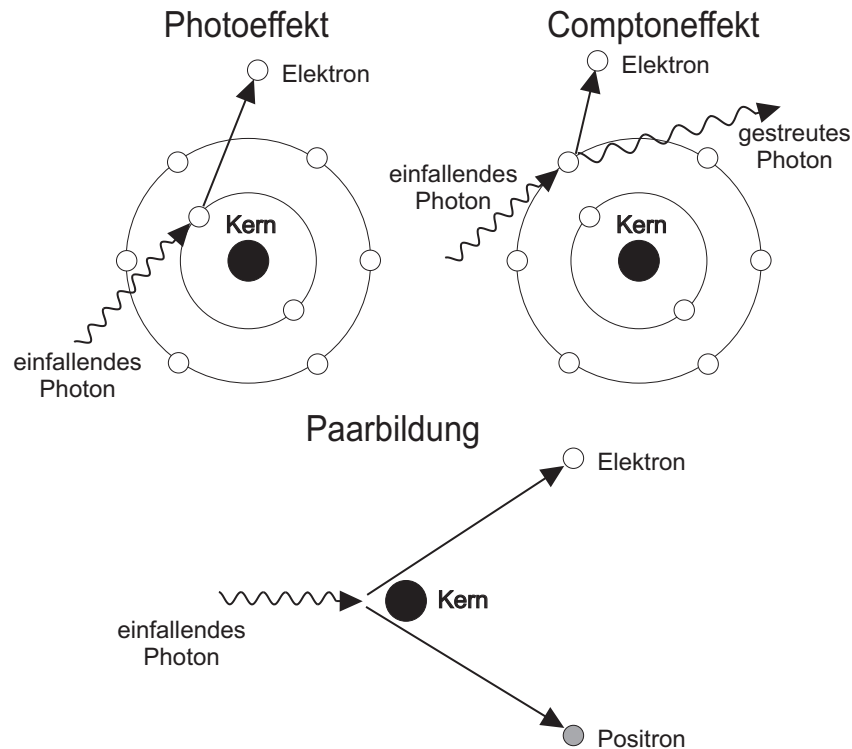


Abbildung 4: Absorption von γ -Strahlung durch Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung.

1. Photoeffekt: Ein γ -Quant gibt seine Energie an ein Elektron in der Atomhülle ab und schlägt dieses aus der Hülle. Durch Nachrücken äußerer Elektronen, kommt es zu charakteristischer Strahlung. Jedesmal wenn die Energie der γ -Quanten ausreicht, um eine tiefer gelegene Schale zu ionisieren, steigt die Absorption schlagartig an. Diese charakteristischen Linien sitzen auf einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum (Abbildung 5).

Durch die Abschirmung der Außenelektronen kann die Energiedifferenz zwischen den unbesetzten Außenelektronen und der Ionisierungsenergie vernachlässigt werden und die Elektronen können alle Energien oberhalb $13,6 eV \cdot (Z - 1)^2$ annehmen.

2. Comptonstreuung: Ein γ -Quant wird inelastisch an einem Hüllenelektron gestreut und verliert dadurch einen Teil seiner Energie.
3. Paarbildung: Sobald die Energie des γ -Quants größer ist als 1,022 MeV, kann das γ -Quant in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen. Die überschüssige Energie, die nicht bei der Erzeugung der Ruheenergie der beiden Teilchen verbraucht wird, wird als kinetische Energie auf die beiden Teilchen aufgeteilt. Zur Impulserhaltung muss noch ein weiteres Teilchen, bevorzugt ein Kern, beteiligt sein, das den verbleibenden Impuls aufnimmt.

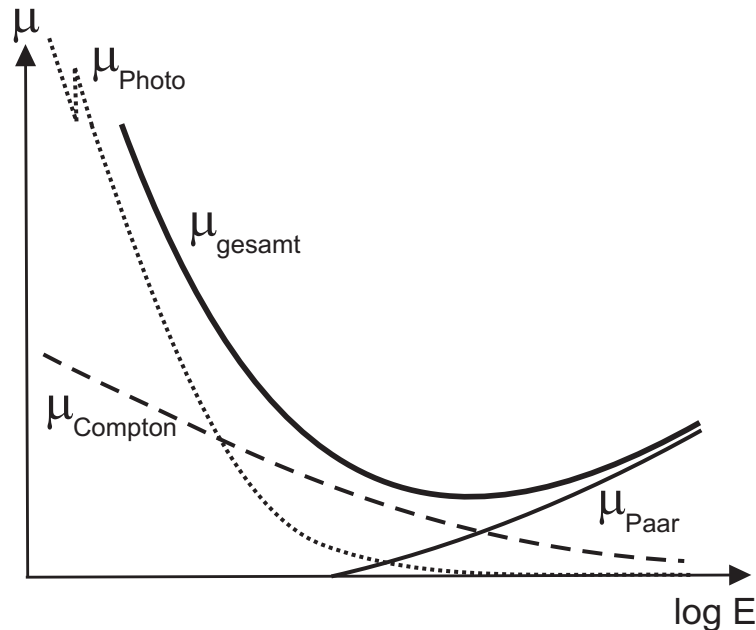


Abbildung 5: Beitrag des Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung zum Schwächungskoeffizient für γ -Strahlung.

Für kleine Energien dominiert der Photoeffekt den Schwächungskoeffizient, welcher mit steigender Energie rasch abnimmt bis die Comptonstreuung dominiert. Bei großen Energien überwiegt Paarbildung und der Schwächungskoeffizient steigt wieder an (Abbildung 5).

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Inbetriebnahme des Zählrohrs

Das Zählrohr wird wie unter *Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität, II Betriebsanleitung des Zählgerätes BF-SG 11* beschrieben, in Betrieb genommen. Die Betriebsspannung des Zählrohrs sollte im Bereich von 500 - 550 V liegen. Notieren sie die Betriebsspannung U und für später auch gleich den Radius r des Zählrohrs. Dieser Wert ist im Versuchsraum angegeben.

Aufgabe 2: Messung des Nulleffekts n_0

Zunächst wird 5 Minuten lang der Nulleffekt n_0 gemessen. Der gemessene Nulleffekt dient bei der folgenden Absorptionsmessung von β -Strahlung als Anhaltspunkt für die Absorberdicke, die für eine vollständige Abschirmung notwendig ist. Er ist außerdem bei der Absorptionsmessung für γ -Strahlung und der Bestimmung der Aktivität des γ -Strahlers zu berücksichtigen.

Bei den folgenden Messungen ist darauf zu achten, dass die jeweils richtigen Präparat-Halterungen verwendet werden und das Präparat in Höhe und Richtung genau auf die Mitte des Zählrohrs ausgerichtet ist!

Aufgabe 3: Absorption von β -Strahlung in Aluminium

Notieren Sie zunächst die Kennnummer ihres Präparats, dass auf diesem eingraviert ist. Der runde Aluminium-Kollimator (kleine Öffnung auf einer Seite) wird in einem Abstand $d \approx 6$ cm (Messung d : Rille am Präparathalter – **Anfang** Zählrohr) in den Strahlengang des Zählrohrs gebracht und das $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ -Präparat in die Öffnung gesteckt.

Zunächst wird eine Messung ohne Abschirmung durchgeführt, anschließend werden nacheinander 0,3 mm Aluminiumplatten direkt vor dem Zählrohr angebracht (damit auch im Absorber gestreute β -Teilchen noch detektiert werden) und jeweils die Zählrate n gemessen. Nach jeder Messung muss der Zähler durch Drücken der Taste **Reset** auf Null zurückgesetzt werden! Die Messdauer beträgt 30 s, bei Zählraten kleiner 100 wird diese auf 2 Minuten ausgedehnt. Nach Erreichen des Nulleffekts n_0 wird noch ein 1 mm Aluminiumblech zur erreichten Absorberdicke hinzugefügt und eine weitere Messung über 5 Minuten durchgeführt. Diese Messung liefert den Nulleffekt einschließlich der Zählrate, die durch die Bremsstrahlung der β -Teilchen im Aluminiumabsorber und durch etwaige Röntgenstrahlung verursacht wird. Bei der Auswertung der Absorption

von β -Strahlung ist dieser Wert als Nulleffekt n_0^β zu berücksichtigen.

Aufgabe 4: Absorption von γ -Strahlung in Blei

Notieren Sie ebenfalls zunächst die Kennnummer ihres ^{60}Co -Präparats.

Der rechteckigen Bleikollimator (mit Absorberhalter) wird sorgfältig im Strahlengang des Zählrohrs justiert und das ^{60}Co -Präparat in die Halterung eingeschraubt. Platzieren Sie den Kollimator so, dass der Abstand zwischen Zählrohr und Präparat $d \approx 15$ cm beträgt. Die Position des Präparates ist auf dem Kollimator eingezeichnet.

Führen Sie zunächst eine Messung ohne Abschirmung durch. Anschließend werden nacheinander 0,5 cm Bleiplatten auf die Halterung platziert. Stellen Sie die Bleiplatten direkt vor den Kollimator, damit die durch Comptoneffekt gestreuten Quanten möglichst nicht das Zählrohr treffen. Erhöhen Sie die Absorberdicke bis sie 5 cm beträgt. Messen Sie für jede Absorberdicke eine Minute lang.

Aufgabe 5: Bestimmung der Aktivität des γ -Strahlers

Zur Bestimmung der Aktivität des γ -Strahlers wird das ^{60}Co -Präparat in den dafür vorgesehene Bleizylinder mit kegelförmiger Öffnung eingeschraubt. Platzieren Sie diesen Bleizylinder in einem Abstand von $d \approx 5$ cm vor dem Zählrohr. Die Position des Präparates ist auf dem Bleizylinder ebenfalls eingezeichnet. Die Zählrate n wird einmal 1 Minute lang gemessen. Anschließend wird diese Messungen bei Abständen von 10 cm und 20 cm wiederholt.

VII Auswertung

Aufgabe 1: ($n - n_0^\beta$) wird über der Absorberdicke x im einfach logarithmischen Diagramm aufgetragen. Aus diesem Diagramm wird die maximale Reichweite von β -Strahlung in Aluminium bestimmt, indem man auf diejenige Absorberdicke extrapoliert, bei der die Absorptionskurve nahezu senkrecht verlaufen würde. Der Fehler der maximalen Reichweite wird durch eine Fehlerkurve abgeschätzt. Aus der Maximalreichweite lässt sich die Flächendichte R^β in g/cm^2 bestimmen. Dabei ist die Fensterdicke der Präparatkapsel aus 0,15 mm Edelstahl und Silber (entsprechend einer Flächendichte $R_{ES}^\beta = 0,130 \text{ g}/\text{cm}^2$) zusätzlich zu berücksichtigen (Vergleiche Präparatebeschreibung im Anhang). Mit Hilfe des Diagramms in Abbildung 9 kann nun die Maximalenergie der β -Teilchen bestimmt werden. Vergleichen Sie den bestimmten Energiewert mit dem Literaturwert.

Aufgabe 2: Auch hier wird ($n - n_0$) [s^{-1}] über der Absorberdicke x [mm] im einfach logarithmischen Diagramm aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden ergibt sich der Schwächungskoeffizienten μ für γ -Strahlung in Blei. Aus diesem Parameter kann der materialunabhängige Massenschwächungskoeffizient μ/ρ bestimmt werden. Über den Massenschwächungskoeffizient μ/ρ kann mit Hilfe von Diagramm 8 die Energie der emittierten γ -Quanten bestimmt werden. Vergleichen Sie den gemessenen Energiewert mit dem Literaturwert.

Aufgabe 3: Berechnen Sie aus den gemessenen Zählraten die Aktivität des γ -Strahlers. Vergleichen Sie Ihre Berechnung unter Berücksichtigung des Alters der Quelle und der Halbwertszeit $T_{1/2}$ mit der Aktivität gemäß den Herstellerangaben (siehe ausliegende Tabelle) Diskutieren Sie die Unterschiede der Aktivitäten des γ -Strahlers für die unterschiedlichen Abstände d . Wie verhalten sich die drei Aktivitäten im Vergleich zum Erwartungswert? **Achtung:** Die gemessenen Aktivitätswerte dürfen auf keinen Fall gemittelt werden! Erklären Sie warum.

Wie lässt sich das beobachtete Verhalten der gemessenen Aktivitätswerte mit wachsendem Abstand erklären unter der Berücksichtigung, dass die berechnete Aktivität eine Überschätzung des Raumwinkels $\Omega(d)$ beinhaltet? Machen Sie sich dies anhand einer Skizze klar.

Wie sieht der Korrekturfaktor unter Einbeziehung der Raumwinkelkorrektur aus? Diskutieren Sie wie sich der Korrekturfaktor mit wachsendem Abstand d verhält. Diskutieren Sie die korrigierten Aktivitäten untereinander und im Vergleich zum Erwartungswert.

Aufgabe 4: Um die Absorption in der Präparatkapsel (Dicke: 1,4 mm, Dichte: $7,9 \text{ g}/\text{cm}^3$) zu berücksichtigen, muss für den γ -Strahler eine zusätzliche Korrektur durchgeführt werden. Es gilt:

$$A_{\text{abgeschirmt}} = A_{\text{offen}} e^{-\mu x} = A_{\text{offen}} k_2 \quad (8)$$

μ ist der Schwächungskoeffizient für γ -Strahlung im Absorbermaterial. Er kann gemäß $\frac{\mu}{\rho_{\text{Pb}}} \rho_{\text{Absorber}}$ bestimmt werden. Für μ/ρ_{Pb} kann dabei entweder der vorher bestimmte Wert genutzt werden oder der Wert kann aus dem Diagramm in Abbildung 8 abgelesen werden ($E^\gamma = 1,174 \text{ MeV}$ oder $1,333 \text{ MeV}$). Berechnen sie die Aktivitäten unter Berücksichtigung beider Korrekturen neu und diskutieren sie die erhaltenen Werte. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Erwartungswert.

VIII Anhang

VIII.1 Strontium 90, Kobalt 60

Das Strontium 90 ist in eine Silberfolie eingewalzt und dadurch mit ca. $50 \mu\text{m}$ Silber abgedeckt. Diese Folie ist zusätzlich in dem Strahlerhalter (Abbildung 6 oben) mit einer Edelstahlfolie geschützt. Dadurch muss die austretende Strahlung einen Absorber der Dicke $d = 0,15 \text{ mm}$ mit der Flächendichte von etwa 130 mg/cm^2 passieren. Die energiearmen β -Teilchen des Strontium 90 werden in den beiden Abdeckschichten total absorbiert, so dass nur die energiereichen β -Teilchen des Tochternuklids Yttrium 90 austreten (Abbildung 6 unten).

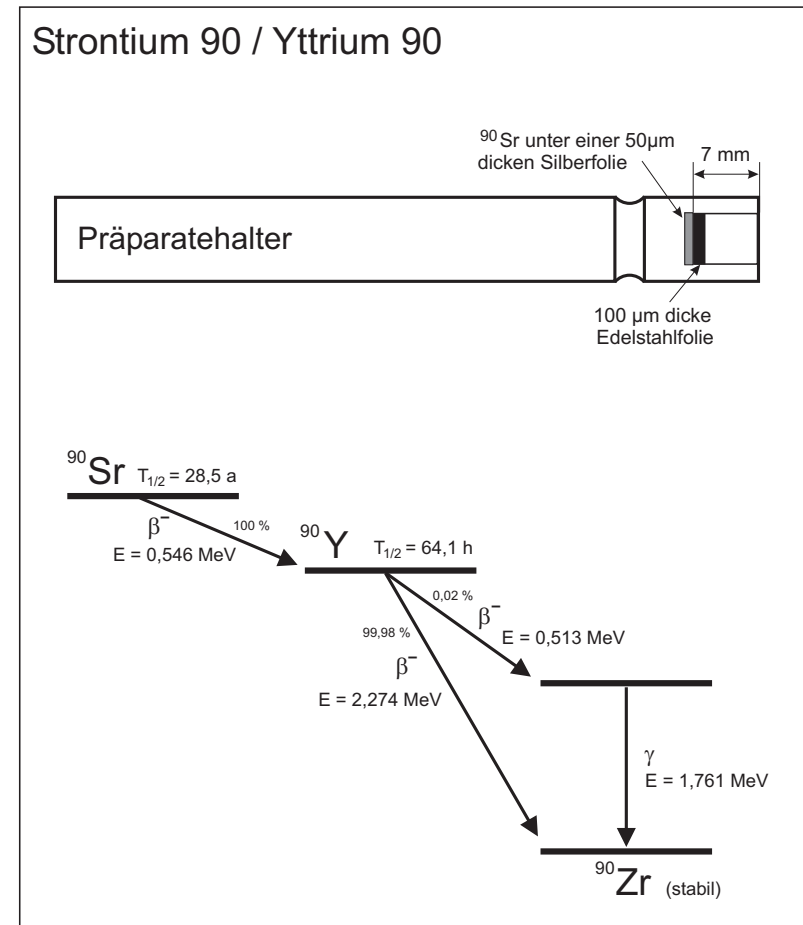


Abbildung 6: Oben: Aufbau des Strontium 90 Präparats. Unten: Zerfallschema von Strontium 90 / Yttrium 90. Angegeben sind die Halbwertszeiten $T_{1/2}$, die Zerfallsart (β, γ), die Energie der emittierten Strahlung sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten in Prozent.

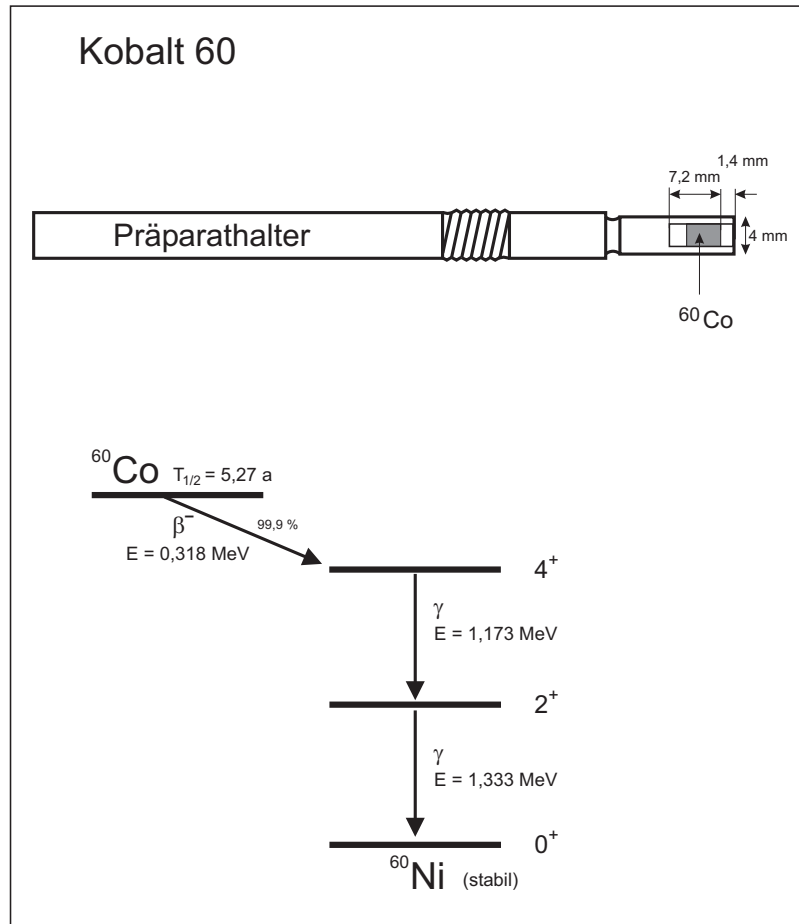


Abbildung 7: Oben: Aufbau des Kobalt 60 Präparats. Unten: Zerfallsschema von Kobalt 60.

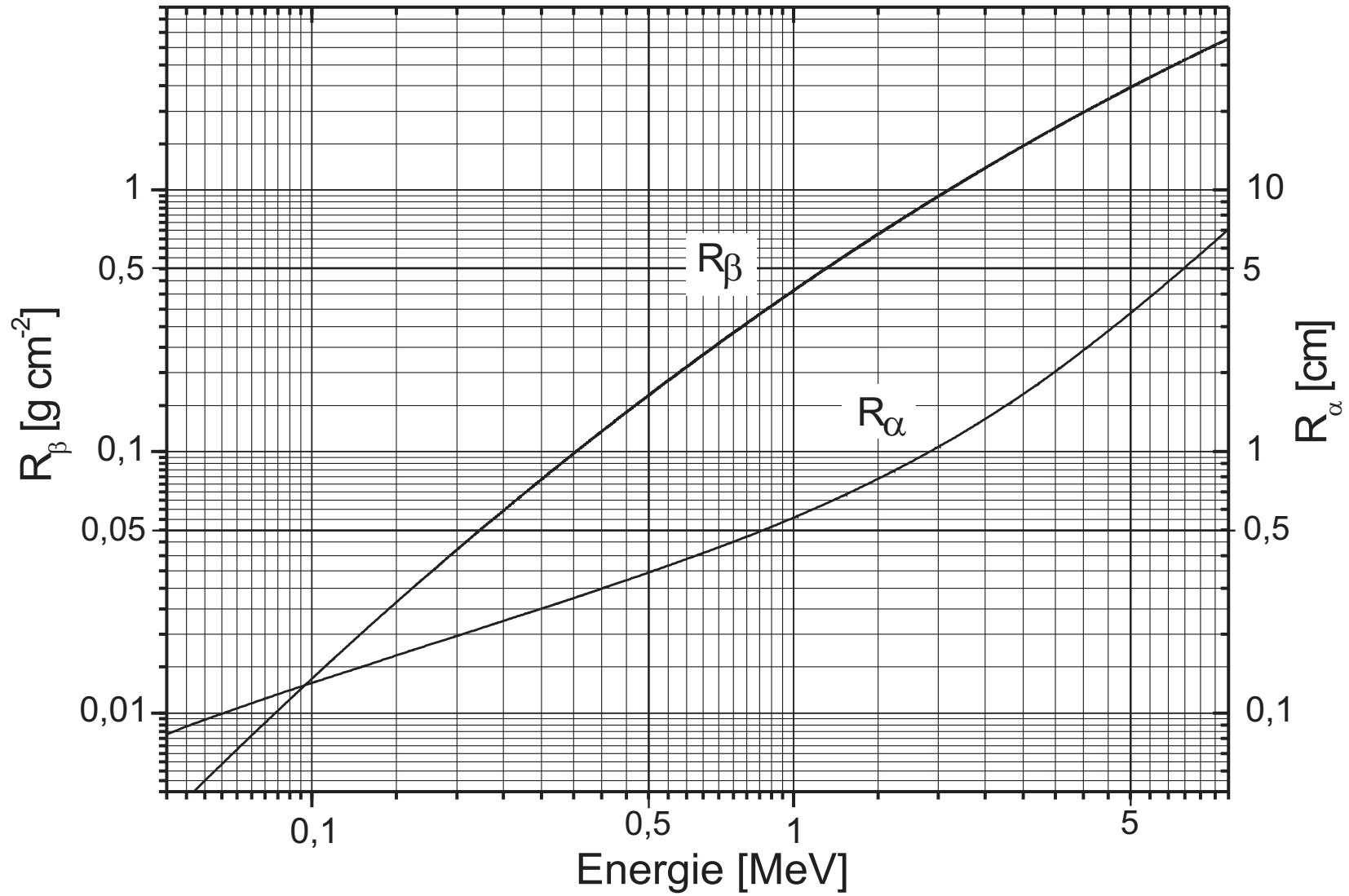


Abbildung 8: Reichweite von β -Strahlung in Aluminium und von α -Strahlung in Luft.

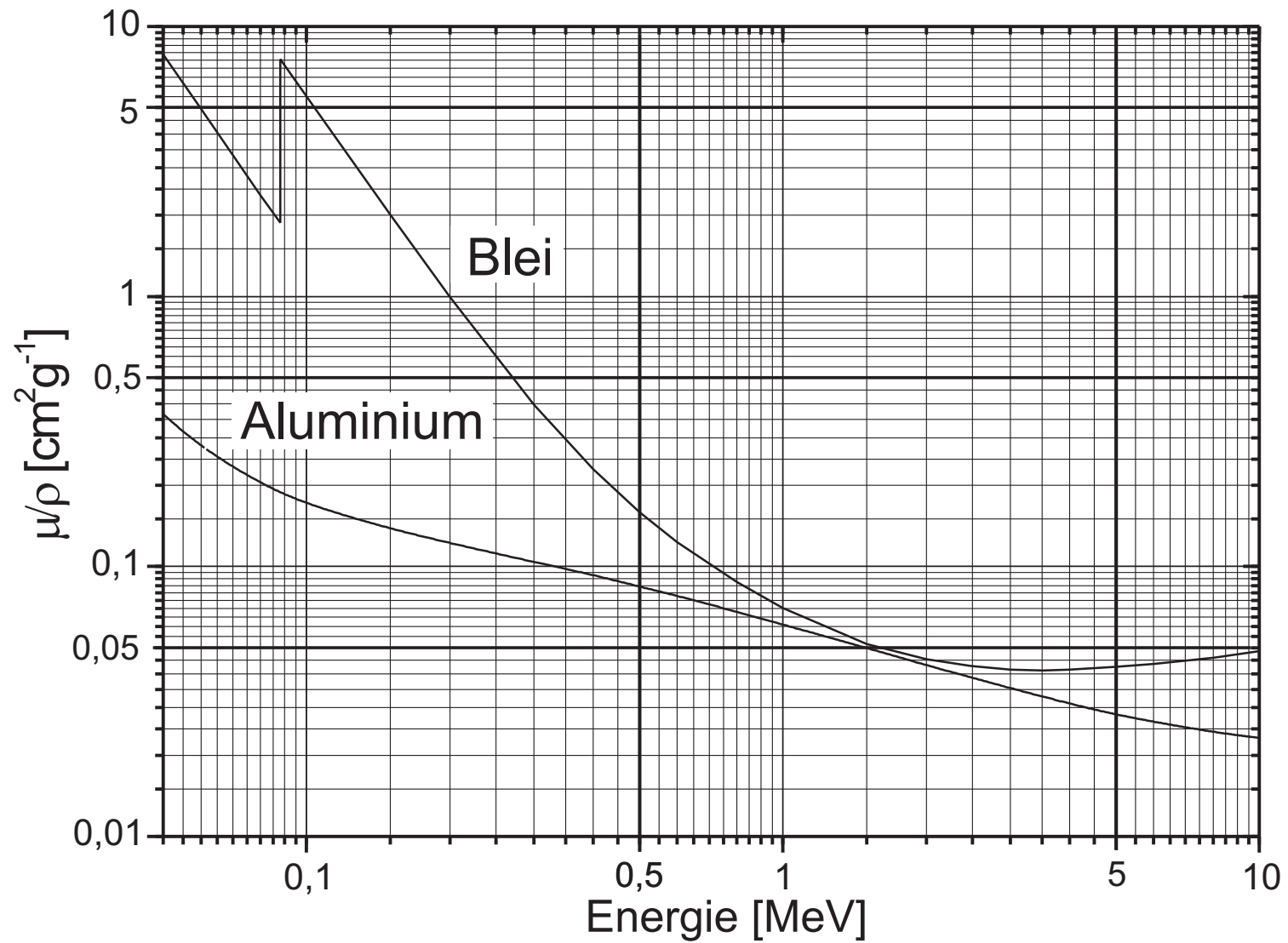


Abbildung 9: E. Storm, H.I. Israel, Photon Cross Section from 1 keV to 100 MeV for elements Z=1 to 100, NUCLEAR DATA TABLES **A7**, 565-681 (1970).

Versuch 255 Röntgenspektrometer



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Röntgenerät mit Röntgenröhre (Molybdän-Anode)
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF- und NaCl-Kristall
- Computer
- Leuchtschirm mit CCD-Kamera (nur ein Aufbau vorhanden)

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Röntgenröhre, Bragg-Reflexion, Röntgenspektren (Bremsstrahlung, charakteristische Röntgenstrahlung), Moseley'sches Gesetz, Balmer Formel.

Verständnisfragen:

1. Erklären Sie den Aufbau und das Funktionsprinzip einer Röntgenröhre. In welchem Bereich liegt die Beschleunigungsspannung? Welche Größe bestimmt die Intensität der Röntgenstrahlung?
2. Das Spektrum einer Röntgenröhre ist eine Überlagerung aus einem Bremspektrum und einem charakteristischen Spektrum. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser beiden Spektren. Wovon hängt das charakteristische Spektrum ab?
3. Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 30 kV durchlaufen hat?
4. Wie kann man die Planck-Konstante aus dem Bremsstrahlungsspektrum abschätzen?
5. Was besagt das Moseley'sche Gesetz? Wie hoch muss die Beschleunigungsspannung einer Röntgenröhre mit Molybdänanode mindestens sein, damit die K_{α} -Strahlung angeregt wird?
6. Wie lautet das Braggsche Gesetz? Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Röntgenbeugung das Spektrum einer Röntgenquelle messen kann.
7. Wie kann man mittels der Bragg-Reflexion die Gitterkonstante eines Festkörpers bestimmen?

IV Aufgaben

1. Messungen mit dem LiF-Kristall

- Nehmen Sie bei einer Röhrenspannung von 35 kV das Röntgenspektrum einer Molybdän- Anode auf. Aus dem kurzwelligen Ende ist die Planck'sche Konstante h abzuschätzen.
- Messen Sie die Reflexionswinkel der K_{α} - und K_{β} - Linien für die erste und zweite Ordnung und bestimmen Sie daraus die Wellenlängen dieser Linien.
- Messen Sie bei einem festem Braggwinkel von ca. $7,5^{\circ}$ die Intensität der Röntgenstrahlung als Funktion der Hochspannung. Aus der Einsatzspannung können Sie wieder die Planck'sche Konstante h bestimmen.

2. Messung mit dem NaCl-Kristall: Aus den Reflexionswinkeln K_{α} - und K_{β} - Linien (erste und zweite Ordnung) ist die Gitterkonstante von NaCl zu bestimmen und aus dieser, sowie der Dichte und dem Molekulargewicht von NaCl, die Avogadro-Zahl N_A .

3. Ein Versuchsaufbau ist zusätzlich mit einem Leuchtschirm und einer CCD-Kamera ausgestattet. Wenn Sie noch Lust und Zeit haben, können Sie mit diesem Aufbau Röntgenaufnahmen von verschiedenen Objekten anfertigen.

V Grundlagen

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden. An der Kathode werden durch Glühemission freie Elektronen erzeugt. Zwischen Kathode und Anode liegt eine Beschleunigungsspannung von typischerweise 10 kV bis 100 kV an. Dadurch werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt und beim „Aufprall“ durch das Coulombfeld der Atome des Anodenmaterials abgebremst. Die dabei verlorene Energie wird teilweise in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Da der Energieverlust der Elektronen beim Abbremsen unterschiedlich groß ist, entsteht ein kontinuierliches Spektrum, welches als Bremsspektrum bezeichnet wird (Abbildung 3). Auf der kurzwelligen Seite setzt das Bremsspektrum erst oberhalb einer Grenzwellenlänge λ_{gr} ein. Dies folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung: Haben die Elektronen die Spannung U durchlaufen, so besitzen sie eine Energie $E = eU$.

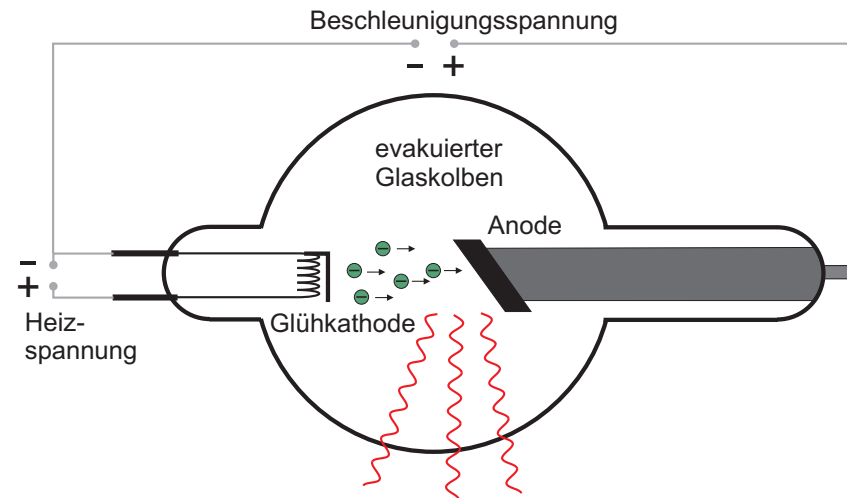


Abbildung 2: Aufbau einer Röntgenröhre

Wird nun ein Elektron in einem einzigen Prozess abgebremst, so wird diese Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie $h\nu$ umgewandelt. Für die Grenzwellenlänge λ_{gr} ergibt sich dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h\frac{c}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU}, \quad (1)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen.

Bei entsprechend hohen Beschleunigungsspannungen ist dem kontinuierlichen Bremsspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert. Da dieses vom Anodenmaterial der Röntgenröhre abhängt wird es auch als charakteristisches Spektrum bezeichnet. Die in der Röntgenröhre beschleunigten Elektronen können ihre Energie auch durch Ionisation des Anodenmaterials verlieren. Wird ein Elektron aus den innersten Elektronenschalen herausgeschlagen, so kann die entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer höher liegenden Schale gefüllt werden. Dabei wird die freiwerdende Bindungsenergie in Form eines Röntgenquants abgestrahlt.

Je nachdem von welcher und auf welche Schale der Elektronenübergang stattfindet, gibt es mehrere mögliche Übergänge die sich zu Serien zusammenfassen

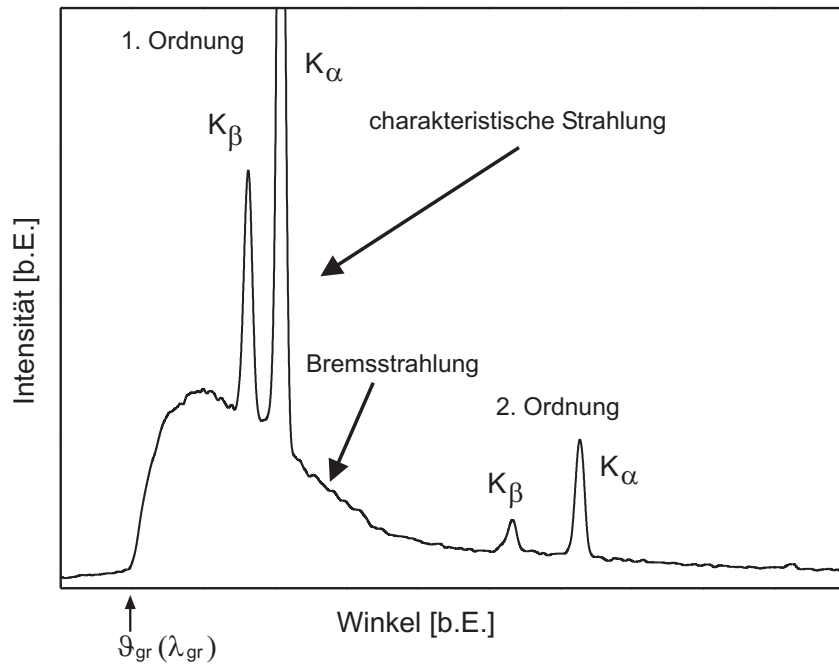


Abbildung 3: Röntgenspektrum

lassen können. Erfolgt der Übergang stets auf die innerste Schale, die K-Schale, so spricht man von Übergängen der K-Serie: Beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale wird K_{α} -Strahlung emittiert, beim Übergang von der M-Schale auf K-Schale handelt es sich um K_{β} -Strahlung. In Abbildung 4 links, sind mögliche Übergänge anhand des Termschemas von Molybdän dargestellt.

Die Energie der charakteristischen Linien, lässt sich mit Hilfe des Moseley'schen Gesetz abschätzen. Für den Übergang von der n -ten auf die m -te Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = h c R_{\infty} (Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, R_{∞} die Rydbergkonstante ($R_{\infty} = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$), Z die Kernladungszahl und n bzw. m

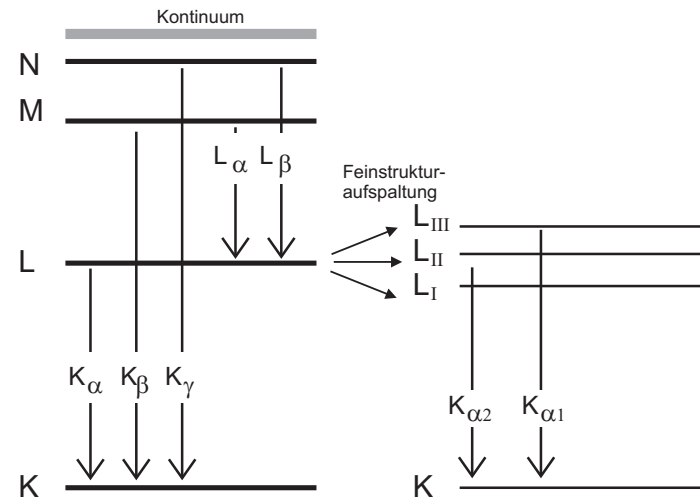


Abbildung 4: Energieniveaus von Molybdän

die jeweiligen Hauptquantenzahlen darstellen. Bei der Größe A handelt es sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung der Kernladung durch Elektronen berücksichtigt. Bei der K_{α} -Strahlung wird der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt. Hierfür gilt in guter Näherung $A \approx 1$:

$$K_{\alpha}\text{-Strahlung: } E_{2 \rightarrow 1} = h c R_{\infty} (Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} h c R_{\infty} (Z - 1)^2. \quad (3)$$

Für die Energie der K_{α} -Strahlung von Molybdän erhält man aus dem Moseley'schen Gesetz $E = 17,2 \text{ keV}$. Dies ist eine gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert von $E = 17,4 \text{ keV}$.

Das Moseley'schen Gesetz liefert nur eine Abschätzung der Energie der charakteristischen Strahlung. Tatsächlich besitzen alle Energieniveaus bis auf das K-Niveau noch eine Feinstruktur dessen Energie neben der Hauptquantenzahl auch von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt (Abbildung 4 rechts). So ist beispielsweise das L-Niveau dreifach entartet. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene K_{α} -Übergänge. Der Übergang $L_{III} \rightarrow K$ wird als $K_{\alpha 1}$ und $L_{II} \rightarrow K$ als $K_{\alpha 2}$ bezeichnet. Der Übergang $L_I \rightarrow K$ ist unter

Berücksichtigung von Erhaltungssätzen nicht möglich. Diese zusätzlichen Niveaus führen dazu, dass die K_{α} -Linie eine Doppellinie darstellt. Allerdings sind diese so dicht zusammen, dass das Spektrometer mit dem Sie im Praktikum arbeiten werden, diese nicht auflösen kann.

V.1 Bragg-Reflexion

Zur Untersuchung des Spektrums einer Strahlungsquelle greift man in der Regel auf zwei verschiedene physikalische Prinzipien zurück: Die Dispersion und die Beugung, die im sichtbaren Bereich Anwendung im Prismenspektrometer bzw. im Gitterspektrometer finden. Für Röntgenstrahlung kann die Dispersion nicht ausgenutzt werden, da der Brechungsindex von Materie in diesem Wellenlängenbereich kaum von Eins abweicht. Auch die Ausnutzung von Beugungseffekten ist für Röntgenstrahlung komplizierter. Da Beugungserscheinung nur dann auftreten, wenn die Größe des beugenden Objekts etwa der Größenordnung der Wellenlänge ($\lambda \approx 0,1 \text{ pm bis } 10 \text{ nm}$) entspricht, benötigt man ein Gitter mit äußerst kleinen Strukturen. Solche Dimensionen sind technisch kaum realisierbar.

1912 hat Max von Laue einen Kristall mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Dabei beobachtete er ein gleichförmiges Beugungsmuster, woraus er schloss, dass die Atome im Kristall regelmäßig angeordnet sind. Da die Atomabstände im Kristall von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, eignen sich solche Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen. 1913 gelang es schließlich William Henry Bragg und seinem Sohn William Lawrence Bragg den Zusammenhang zwischen der Kristallstruktur und den entstehenden Beugungsmustern zu erklären. Die Röntgenbeugung an Kristallen wird daher auch als Bragg-Reflexion bezeichnet.

Trifft Röntgenstrahlung unter dem Winkel ϑ (Abbildung 5a) auf die Oberfläche eines Kristalls, so wird dieser gemäß des Reflexionsgesetzes reflektiert. Da die Strahlung tief in den Kristall eindringen kann, finden zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt. Die Intensität der reflektierten Gesamtstrahlung hängt vom Gangunterschied Δs der teilreflektierten Strahlung ab. Beträgt dieser für zwei benachbarte Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so interferieren diese konstruktiv. Ist dies nicht der Fall, so löschen die teilreflektierten Strahlen aus (Vielstrahlinterferenz). Ist d der Netzebenenabstand, so folgt aus Abbildung 5a) für den Gangunterschied Δs :

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \tag{4}$$

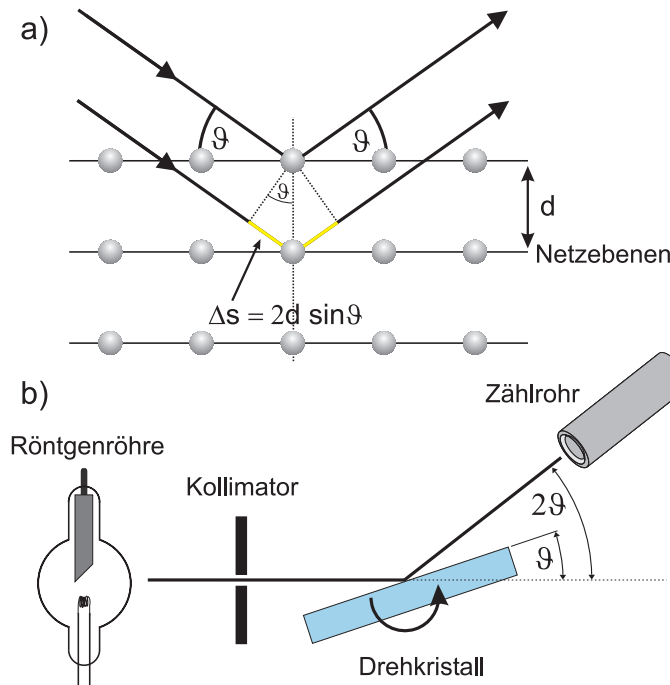


Abbildung 5: a) Bragg- Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Drehkristallmethode zur Messung des Spektrums einer Röntgenröhre.

und damit das Bragg'sche Gesetz:

$$2d \sin \vartheta = n \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz.} \tag{5}$$

Die unter dem Winkel ϑ reflektierte Strahlung hängt demnach von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie von der Kristallstruktur (Netzebenenabstand) ab. Somit eignet sich die Bragg- Reflexion zur Monochromatisierung von Röntgenstrahlung und damit zur Messung des Spektrums einer Röntgenquelle. Bei der Drehkristallmethode (Abbildung 5b) wird der Einfallswinkel ϑ variiert, in dem der Kristall um eine Achse senkrecht zur einfallenden Strahlung gedreht

wird. Bei jeder Winkelstellung besitzt die reflektierte Röntgenstrahlung eine bestimmte Wellenlänge dessen Intensität z.B. mit einem Zählrohr gemessen werden kann. Das Spektrum in Abbildung 3 wurde nach diesem Verfahren gemessen.

Weiterhin kann bei bekannter Wellenlänge (z.B. K_{α} -Linie) die Kristallstruktur von Kristallen bestimmt werden (Röntgenstrukturanalyse).

Kristalle haben die Eigenschaft, dass sie streng periodisch aufgebaut sind. Die kleinste, sich periodisch wiederholende Struktureinheit, wird als Elementarzelle bezeichnet. Sie wird durch einen Satz von drei Basisvektoren aufgespannt dessen Beträge die Gitterkonstanten darstellen. Sowohl NaCl als auch LiF besitzen eine kubische Elementarzelle (Abbildung 6a). Bei diesem Kristalltyp sind die drei Gitterkonstanten a gleich groß. Bei der Bragg- Reflexion an einem Kristall ist es wichtig den Kristallschnitt, d.h. die Orientierung der Netzebenen zum einfallenden Röntgenstrahl, zu kennen. Bei den im Praktikum verwendeten Kristallen ist die Kristalloberfläche parallel zur Seitenfläche der Elementarzelle ausgerichtet, d.h. der Netzebenenabstand entspricht der halben Gitterkonstante (Abbildung 6b).

Mit Hilfe der Röntgenbeugung an Kristallen ist es möglich, die Avogadrokonstante mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Dazu muss man lediglich das Volumen der Elementarzelle kennen und sich überlegen, wie viele Atome einer Elementarzelle angehören. Das Volumen lässt sich bei bekanntem Kristallschnitt aus der Gitterkonstante bestimmen. Um die Anzahl der Atome die einer Elementarzelle angehören zu bestimmen, muss man beachten, dass die einzelnen Atome auch in benachbarten Elementarzellen liegen. Aus Abbildung 6c) ist ersichtlich, dass nur das zentrale Natrium (Lithium)- Atom einer einzelnen Zelle angehört. Alle Atome die an den Ecken einer Elementarzelle liegen, sind zusätzlich die Eckatome von sieben weiteren Zellen. Rechnerisch sind diese daher nur zu $1/8$ Bestandteil einer einzigen Elementarzelle. Atome die an der Kante liegen, befinden sich insgesamt in vier Elementarzellen und Atome die im Zentrum der Stirnfläche liegen, sind in einer weiteren Elementarzelle vertreten.

In einer Elementarzelle befinden sich somit:

- 8 Chlor (Fluor) Atome an den Ecken die jeweils zu $1/8$ einer Zelle angehören.
- 6 Chlor (Fluor) Atome im Zentrum der Seitenflächen die jeweils zu $1/2$ einer Zelle angehören.
- 12 Natrium (Lithium) Atome an den Kanten die jeweils zu $1/4$ einer Zelle

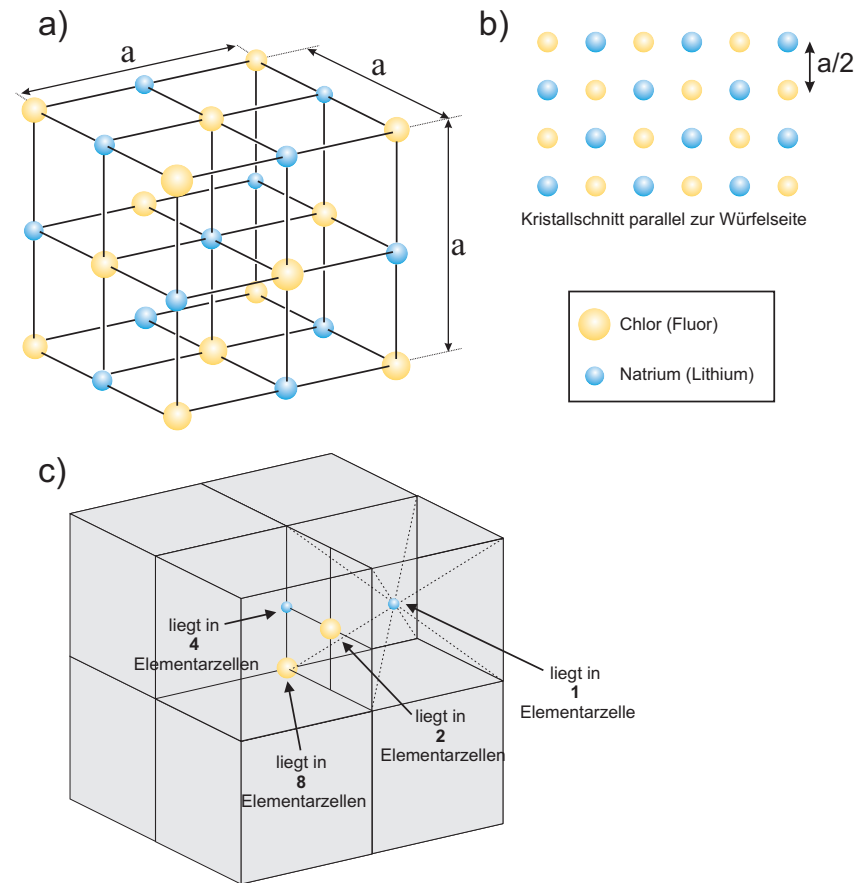


Abbildung 6: a) Elementarzelle von NaCl (LiF) b) Netzebenen bei unterschiedlichen Kristallschnitten c) Aufbau eines Kristalls durch Aneinandereihe von Elementarzellen

angehören.

- 1 Natrium (Lithium) Atom in der Mitte einer Zelle welches dieser allein angehört.

Für die Gesamtanzahl der Atome einer Elementarzelle folgt dann:

Chlor (Fluor): $8 \times 1/8 + 6 \times 1/2 = 4$

Natrium (Lithium): $12 \times 1/4 + 1 = 4$,

d.h. 4 NaCl (LiF) pro Elementarzelle.

Die Avogadrokonstante berechnet sich wie folgt:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{V}, \quad (6)$$

wobei V_{Mol} das Molvolumen und V das Volumen einer Elementarzelle ist. Der Faktor Vier berücksichtigt, dass in einer Elementarzelle vier NaCl-Moleküle (LiF-Moleküle) vorhanden sind. Das Volumen lässt aus dem Netzebenenabstand d berechnen. Bei dem im Praktikum verwendeten Kristall entspricht dieser der halben Gitterkonstante $d = a/2$:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{(2d)^3} = 4 \frac{M_{Mol}}{\rho (2d)^3} = \frac{1}{2} \frac{M_{Mol}}{\rho d^3}, \quad (7)$$

mit dem Molgewicht M_{Mol} und der Dichte ρ . Die Zahlenwerte dieser Größen finden Sie im Anhang.

V.2 Gerätebeschreibung

Das im Praktikum eingesetzte Röntgengerät ist als Zählrohr-Goniometer (Abbildung 7) ausgeführt, mit schwenkbarem Messarm und einem Probenträger in der Drehachse. Die Drehwinkel von Messarm und Probenträger können im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden, so dass beim Nachweis der Bragg-Reflexe und bei der Aufnahme von Röntgenspektren das auf dem Messarm befestigte Zählrohr immer die richtige Position zum Auffangen der Reflexe hat, d.h. die Probennormale halbiert stets den Winkel zwischen Primär-Strahlrichtung und der Richtung der reflektierten Strahlung. Die Röntgenröhre (Molybdänanode, maximal 35 kV, 1 mA) ist in einem separaten Röhrenraum untergebracht, der

zur Abschirmung - wie auch der Experimentierraum mit dem Goniometer - mit einer Bleiglas-Schiebetür verschlossen wird. Am Übergang zum Experimentierraum ist ein Kollimator eingesetzt.

Die Kristalle sind fest auf zwei Probenträgern verklebt. Diese müssen so auf dem Kristallhalter montiert werden, dass der Kristall bündig mit dem Anschlag positioniert ist. Wenn dies der Fall ist, kann der Kristall mit der Klemmschraube fixiert werden. Die Abstände im Goniometer (also die Längen des Probenarms und des Messarms) sind variabel, sollen aber für diesen Versuch nicht verstellt werden. Beide Goniometerarme sind unabhängig voneinander durch Schrittmotoren zu schwenken, die kleinste mögliche Schrittweite beträgt $0,1^\circ$. Weiterhin ist es möglich, dass Goniometer im gekoppelten Modus (coupled) zu betreiben, so dass der Winkel des Messarms immer das Doppelte des Winkels des Targetarms beträgt. Dieser Modus ist für die Messungen der Bragg-Reflexion zu wählen. Die reflektierte Strahlung wird mit einem am Messarm befestigten Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen. Die Spannungsversorgung des Zählrohrs und der Impulszähler sind, genau wie die Steuerung des Goniometers, in das Röntgengerät integriert und über das Bedienfeld links von der Röntgenröhre zu steuern. Über das dort platzierte Display lassen sich auch die Messwerte anzeigen.

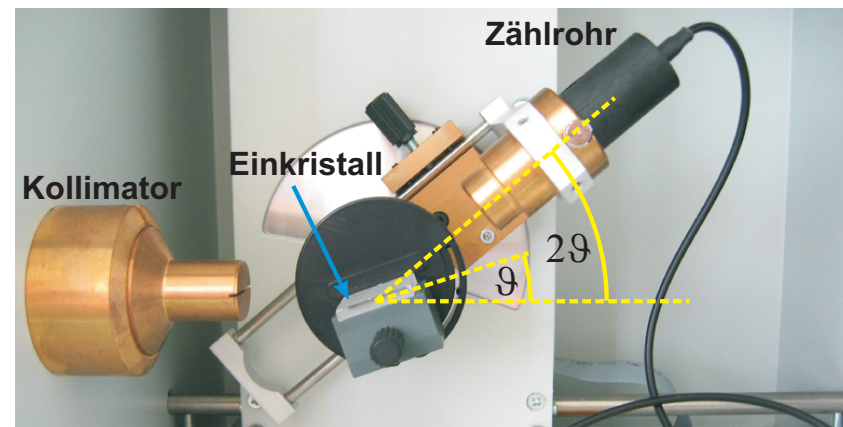


Abbildung 7: Aufbau des Goniometers

Alle einstellbaren Parameter werden mit dem Drehschalter ADJUST geregelt. Zuvor muss mit den Tastern rechts davon der gewünschte Parameter gewählt werden. Der aktuell angewählte Parameter wird im Display angezeigt.

- U: Hochspannung der Röntgenröhre. Möglich sind Werte zwischen 0 und 35 kV (Schrittweite 0,1 kV)
- I: Emissionsstrom der Röntgenröhre. Möglich sind Werte zwischen 0 und 1 mA (Schrittweite 0,01 mA)
- t: Messzeit. Möglich sind Werte zwischen 0 und 9999 s (Schrittweite 1 s)
- β : Winkelschrittweite für den Modus „automatischer Scan“. Möglich sind Werte zwischen 0° und 20° (Schrittweite $0,1^\circ$).

Mit dem Taster LIMITS wird der Winkelbereich für den Modus „automatischer Scan“ festgelegt. Nach dem ersten Drücken erscheint im Display das Symbol \downarrow und die untere Grenze kann eingegeben werden. Nach dem zweiten Drücken erscheint \uparrow für die Eingabe der oberen Grenze. Die Anzeige blinkt, wenn ungültige Werte eingestellt sind, d.h. wenn die untere Grenze über der oberen liegt. Wird das Symbol \updownarrow angezeigt, ist $\Delta\beta = 0$ eingestellt und der Modus „automatischer Scan“ deaktiviert. Unter dem ADJUST-Regler befinden sich die Taster zur Auswahl des Scanverfahrens. Hier ist immer der COUPLED-Modus zu wählen, bei dem Target- und Sensorarm im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden. Der ZERO-Taster fährt das Goniometer in die Nullposition.

Im unteren Teil des Bedienfeldes befinden sich die Befehlstaster:

- RESET: Löscht den Datenspeicher, fährt das Goniometer in die Nullstellung und stellt alle Parameter auf die Werkseinstellung zurück
- REPLAY: Aktiviert das Auslesen des Messwertespeichers. Die einzelnen Werte können über den ADJUST-Regler abgerufen werden. Im Display erscheint jeweils der Winkel und die über die Zeit t gemittelte Zählrate.
- SCAN: Startet einen Scan. Hierzu muss ein Scanverfahren (COUPLED) gewählt sein. Die Messwerte werden gespeichert und können anschließend mit REPLAY abgefragt werden. Achtung: Der Start eines neuen Scans löscht die Daten des vorherigen.
- Lautsprecher: Schaltet den Lautsprecher für die akustische Impulsanzeige ein oder aus.
- HV ON/OFF: Schaltet die Röhrenhochspannung ein oder aus.

Für die Befehle SCAN und HV ON müssen die Bleiglasscheiben geschlossen sein. Alle Messungen können entweder manuell oder mit Hilfe eines Computers automatisiert durchgeführt werden. Das Messprogramm `Roentgenspektrum.exe` stellt die Messwerte in einem Diagramm dar und generiert nach Beendigung der Messung eine HTML-Datei mit den Messdaten. Die Datei `data.htm` befindet sich im Ordner Report auf dem Desktop.

VI Durchführung

Achtung: Die Kristalle sind auf die einzelnen Geräte eingemessen und mit entsprechenden Buchstaben gekennzeichnet. Immer die zum Gerät gehörenden Kristalle nutzen, da sonst die Messwerte nicht stimmen!

Testen Sie zunächst die korrekte Funktion der Sicherheitskreise: Schalten Sie das Gerät am Netzschalter ein, wählen Sie $I = 1$ mA und $U = 5$ kV aus und schließen sie die Bleiglasfenster von Röhren- und Experimentierraum. Schalten Sie die Hochspannung (Taster HV ON/OFF) ein und überprüfen Sie, ob die Kontrollleuchte über dem Taster blinkt und die Kathode der Röntgenröhre aufleuchtet. Drücken Sie jetzt den Verriegelungstaster einer Bleiglasscheibe nach unten. Die Kathodenheizung muss dabei abschalten. Öffnen sie ein Bleiglasfenster und testen Sie, ob die HV-Kontrollleuchte dabei erlicht.

Aufgabe 1: Messung des Röntgenspektrums mit einem LiF-Kristall

Messen Sie das Röntgenspektrum der Molybdän-Anode. Montieren Sie hierzu den LiF-Kristall auf dem Targethalter. Wählen Sie $U = 35$ kV, $I = 1$ mA, $t = 5$ s, $\Delta\beta = 0,2^\circ$, und scannen sie im Bereich zwischen 3° und 22° . Führen Sie diese Messung mit dem Computer durch. Dazu müssen Sie erst die eben aufgeführten Parameter am Röntgengerät eingeben, anschließend das Programm `Roentgenspektrum.exe` vom Desktop aus starten und den Pfeil in der linken oberen Ecke anklicken. Den Scanvorgang starten Sie dann durch Drücken der Taste SCAN ON/OFF. Drücken Sie nach Beendigung der Messung den Stopp-Taster im Messprogramm. Das Messprotokoll wird automatisch im Internet-Explorer angezeigt. Sollte dort noch eine alte Messung erscheinen, so drücken Sie zum aktualisieren die F5-Taste. Die Messdaten werden in einer Textdatei im Ordner Data auf dem Desktop gespeichert. Der Dateiname entspricht dem Datum und der Uhrzeit der Messung.

Aufgabe 2: Vermessen der K_α und K_β -Linien des Anodenmaterials

Bestimmen Sie aus der vorhergehenden Messung grob die Lage der Linien K_α und K_β der ersten und zweiten Ordnung. Wiederholen sie die Messung aus a) in diesen Bereichen mit $\Delta\beta = 0,1^\circ$ und $t = 20$ s.

Aufgabe 3: Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung

Messen Sie die Zählrate bei einem festen Winkel β von $7,5^\circ$ für unterschiedliche Spannungen im Bereich von 20 bis 35 kV (1 kV-Schritte, Messzeit 20 s). Den Computer benötigen Sie in dieser Teilaufgabe nicht. Da das Röntgengerät nur bei einem Scan größere Messzeiten als 1 s berücksichtigt, müssen Sie auch bei dieser Messung einen Winkelbereich eingeben. Stellen Sie am Röntgengerät einen Scanbereich von $7,5^\circ$ bis $7,6^\circ$ ein. Nachdem die Messung für die $7,5^\circ$ -Stellung beendet ist können Sie die Messung abbrechen und die Zählrate mit Hilfe der REPLAY-Taste auslesen.

Aufgabe 4: Messung des Röntgenspektrums mit einem NaCl-Kristall

Wiederholen Sie die Messung von Aufgabe 1 mit dem NaCl-Kristall. Verwenden Sie einen Winkelbereich von 3° bis 18° .

Freiwillige Zusatzaufgabe: Röntgenaufnahmen

Für das Anfertigen von Röntgenaufnahmen am entsprechenden Aufbau mit Kamera muss der Kollimator und der Kristallhalter ausgebaut werden. Das Zählrohr muss entweder so platziert werden, dass es nicht vor dem Leuchtschirm steht oder ebenfalls ausgebaut werden. Führen Sie diesen Umbau gemeinsam mit Ihrem Betreuer durch.

Platzieren Sie das zu untersuchende Objekt (z.B. Taschenrechner, Armbanduhr aus Kunststoff) im Experimentierraum des Röntgengeräts möglichst dicht vor dem Leuchtschirm. Stellen Sie eine Röhrenspannung von 35 kV und einen Röhrenstrom von 1 mA ein. Der Leuchtschirm wird von außen mit einer CCD-Kamera abgefilmt, welche sich in einem lichtdichten Kasten an der rechten Seite des Röntgengeräts befindet. Achten Sie darauf, dass dieser Kasten plan an der Seitenwand des Röntgengeräts anliegt und somit kein Fremdlicht in das Gehäuse gelangt. Schalten Sie die Röhrenspannung mit der Taste HV ON/OFF ein und starten Sie das Programm „Röntgenkamera.xspf“ vom Desktop aus (Abbildung 8). Wenn Sie einen Gegenstand haben, den Sie gerne röntgen möchten, können Sie diesen gerne mitbringen. Die maximale Größe beträgt ca. 10x10x5 cm.

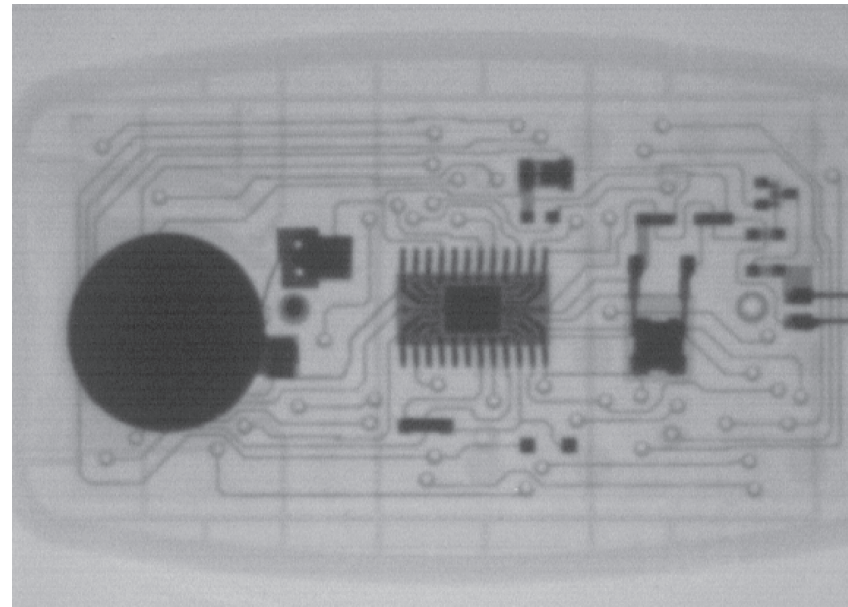


Abbildung 8: Röntgenaufnahme einer Fernbedienung

VII Auswertung

Zu Aufgabe 1: Extrapolieren sie den einigermaßen geraden Anstieg am kurzwelligen Ende bis zum Untergrund. Versehen Sie die betreffenden Punkte mit statistischen Fehlern. Bestimmen Sie so die Grenzwellenlänge des Bremsspektrums von 35 kV und daraus die Plank'sche Konstante h . Berechnen Sie aus der Stelle des Beginns des Spektrums, ab welchem Winkel das Spektrum zweiter Ordnung einsetzt.

Zu Aufgabe 2: Tragen Sie die Zählrate als Funktion des Winkels β für die vier Linien auf und bestimmen sie die Wellenlänge von K_α und K_β aus den Messungen in beiden Ordnungen. Bestimmen Sie für K_α in erster Ordnung die Halbwertsbreite (Breite der Linie in halber Höhe).

Zu Aufgabe 3: Bestimmen Sie durch Extrapolation die Einsatzspannung, d.h. die Spannung, oberhalb der es Quanten gibt, deren Wellenlänge zu $\beta = 7,5^\circ$

gehört. Berechnen Sie aus diesem Wert wieder h . Theoretisch ist diese sog. Isochromatenmethode, die hier zur h Bestimmung benutzt wird, der Extrapolation des kurzwelligen Endes des Spektrums in Aufgabe 2a) äquivalent. Die Spektrumsextrapolation ist aber in der Praxis ungenauer, da dort Messpunkte unterschiedlicher Wellenlänge benutzt werden, die individuell z.B. auf Eigenabsorption in der Anode, dem Röhrenfenster usw. sowie auf das unterschiedliche Reflexionsvermögen des Kristalls korrigiert werden müssten.

Zu Aufgabe 4: Ermitteln Sie aus dem Spektrum die Lage der K_α und K_β -Linien und berechnen Sie mit den in 1b) gewonnenen Wellenlängen für K_α und K_β die Gitterkonstante von NaCl sowie die Avogadro Zahl.

VIII Anhang

- Allgemeine Konstanten¹:

Avogadrozahl	$N_A = 6,0221 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Elementarladung	$e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$
Planck-Konstante	$h = 6,6261 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Rydberg-Konstante	$R_\infty = 3,2898 \times 10^{15} \text{ Hz}$

(8)

Der jeweilige Fehler ist kleiner als die halbe Einheit der letzten Ziffer.

- Daten von LiF:

Dichte	$\rho = 2,635 \text{ g/cm}^3$
Molekulargewicht	$M = 25,94 \text{ g}$
Netzebenenabstand	$a/2 = 201,4 \text{ pm}$

(9)

- Daten von NaCl:

Dichte	$\rho = 2,164 \text{ g/cm}^3$
Molekulargewicht	$M = 58,44 \text{ g}$

(10)

- K-Linien² von Molybdän:

$$K_\alpha : \lambda = 71,1 \text{ pm}, E = 17,4 \text{ keV}$$

$$K_\beta : \lambda = 63,1 \text{ pm}, E = 19,6 \text{ keV}$$

¹nach „Fundamentalkonstanten 1999“, Physikalische Blätter, März 2000

²die K-Linien besitzen eine Feinstrukturaufspaltung. Die Angaben sind daher Mittelwerte.