

Universität Heidelberg
Physikalisches Praktikum PAP2.1 für
Studierende der Physik B.Sc.
Ausgabe 21. August 2025



Inhaltsverzeichnis

Versuch 211 Gekoppelte Pendel	2
Versuch 212 Zähigkeit von Flüssigkeiten	11
Versuch 213 Kreisel	19
Versuch 221 Adiabatenkoeffizient	30
Versuch 222 Heißluftmotor	35
Versuch 223 Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung	52
Versuch 232 Michelsoninterferometer	64
Versuch 233 Fourieroptik	81
Versuch 234 Lichtquellen und Gitterspektroskopie	117

Versuch 211 Gekoppelte Pendel

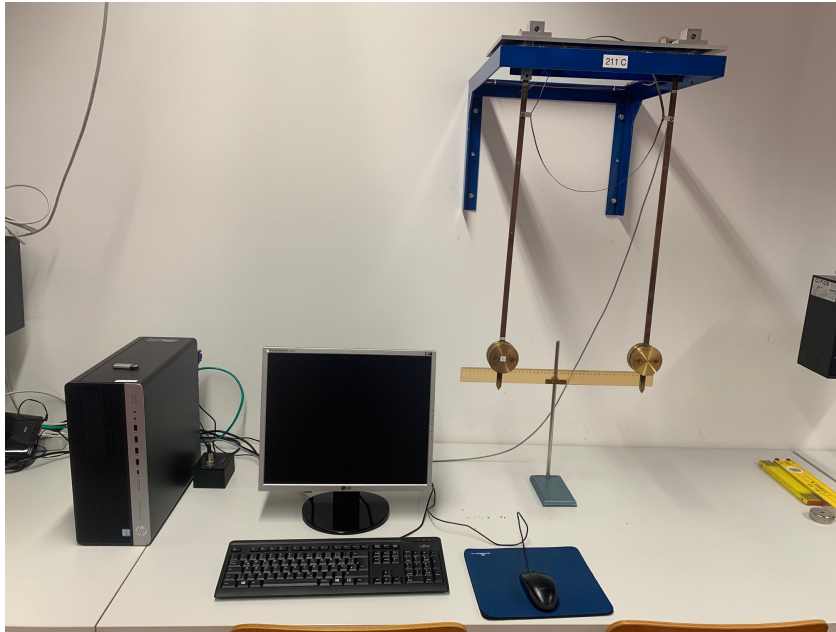


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- zwei Pendel aus Messing (Dichte: $\rho = 7,5 \text{ g/cm}^3$)
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- fest montierter magnetischer Winkelsensor
- Analog-Digital Wandler
- PC

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart
- Sommerfeld-Vorlesungen Band 1
- Demtröder, *Experimentalphysik* Band 1
- Homepage des Praktikums <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: harmonischer Oszillator, gekoppelte Oszillatoren, Dreh- und Trägheitsmoment, physikalisches Pendel, gekoppelte Differentialgleichungen, Schwebung, Normal-schwingungen. Informieren Sie sich auch über die Grundlagen des Hall-Effekts, da die Messung des Auslenkwinkels der Pendel diesen Effekt ausnutzt.

Verständnisfragen:

1. Überlegen Sie welche Drehmomente auf zwei gekoppelte Pendel wirken. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und skizzieren Sie den Lösungsweg.
2. Beschreiben Sie in Worten die Anfangsbedingungen für die symmetrische-, asymmetrische- und Schwebungsschwingung und diskutieren Sie die jeweiligen Schwingungszustände.
3. Welche Frequenz ist größer, die der symmetrischen oder der antisymmetrischen Schwingung? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Wie lautet die Definition der Begriffe Eigenfrequenz und Eigenschwingung bei einem schwingungsfähigen System von N Massepunkten? Wie viele Eigenfrequenzen besitzt ein solches System?

IV Aufgaben

1. Bei drei verschiedenen starken Kopplungen sind die Frequenzen der symmetrischen und der antisymmetrischen Eigenschwingungen von zwei gekoppelten, gleichartigen Messingpendeln zu bestimmen.
2. Für die gleichen Kopplungen wie bei Aufgabe 1 ist die Schwebung beider Eigenschwingungen zu erzeugen und die Frequenzen der Schwebung zu bestimmen.
3. Die Kopplungsgrade sind quantitativ zu bestimmen und deren Verhältnisse untereinander mit einer theoretischen Approximation zu vergleichen.
4. Qualitativ ist das Phänomen der elektrisch-induktiven Schwebung anhand von zwei elektrischen Schwingkreisen zu beobachten.

V Motivation

„Der niederländische Physiker Christian Huygens beobachtete 1665 ein außerordentlich spannendes Phänomen: Als er wegen einer leichten Erkrankung sein Haus nicht verlassen konnte, betrachtete er gedankenverloren zwei von ihm eigenhändig angefertigte Pendeluhrn, die nebeneinander an der Wand hingen. Schon bald fiel ihm auf, daß sich die beiden Pendel völlig synchron bewegten. Diese Kuriosität beschäftigte Huygens so sehr, daß er über mehrere Stunden die Pendelbewegung verfolgte. Während dieser langen Zeit schwangen sie stets im Gleichtakt. Selbst als der Wissenschaftler eines der beiden Pendel von Hand in einen anderen Schwingungsrhythmus versetzte, musste er zu seinem großen Erstaunen feststellen, daß sich nach kaum einer halben Stunde der Gleichtakt wieder einstellte. Huygens nahm daraufhin an, daß sich die Uhren gegenseitig beeinflussen müssen, sei es durch Luftbewegung oder schwache, durch die Wand übertragene Vibrationen. Um diese Vermutung zu überprüfen, brachte er die Uhren an gegenüberliegenden Wänden an. Tatsächlich kamen sie zunehmend aus dem Takt und im Laufe eines Tages verlor die eine fünf Sekunden gegenüber der anderen.“¹

¹Matthias Ducci, „Periodische und chaotische Oszillationserscheinungen an Metallelektroden und elektrochemische Modellexperimente zur Erregungsleitung am Nerven“, Dissertation an der Universität Oldenburg, 2000

Gekoppelte, schwingungsfähige Systeme spielen in der Physik eine fundamentale Rolle. Ein einfaches Beispiel solch eines Systems sind Moleküle, bei denen einzelne Atome in erster Näherung untereinander elastisch gekoppelt sind (CO_2 , NH_3 etc.). Je nach der räumlichen Struktur und den Bindungspartnern können Moleküle verschiedene Schwingungs- und Rotationszustände besitzen. Es können zum Beispiel Drehschwingungen von Atomgruppen um eine Bindungsachse auftreten oder die Bindungspartner schwingen gegeneinander. Finden Änderungen des Rotations- und Schwingungszustands statt, so ist dies, genauso wie bei elektronischen Übergängen in der Atomhülle, mit der Emission elektromagnetischer Strahlung verbunden. Durch Messung der Molekülspektren mit Hilfe der Infrarotspektroskopie können wichtige Moleküldaten wie die Art der Bindung, die Bindungsabstände und Bindungswinkel sowie die „Federkonstante“ bestimmt werden.

Gekoppelte Oszillatoren finden sich auch in jedem Festkörper. Bei einem Kristall sind im Prinzip alle Atome über elektrische Wechselwirkungen miteinander gekoppelt, so daß der Kristall zu Schwingungen angeregt werden kann. Zur mathematischen Beschreibung stellt man sich den Kristall aus regelmäßig angeordneten Massenpunkten vor, die mit ihren nächsten Nachbarn durch Federn gekoppelt sind. Die Auswertung dieses Systems führt zu quantisierten Gitterschwingungen, sogenannte Phononen.

Nicht nur in der Physik, sondern auch in nahezu allen anderen naturwissenschaftlichen Gebieten, stößt man auf gekoppelte Oszillatoren. Beispiele aus der Biologie sind die Schrittmacherzellen des Herzens oder die neuronalen Netzwerke des Gehirns und des Rückenmarks, die rhythmisch-periodische Vorgänge wie Laufen oder Atmen steuern.

Beim vorliegenden Versuch sollen Sie anhand zwei mechanisch gekoppelter Pendel die elementaren Eigenschaften gekoppelter Oszillatoren kennenlernen. Sie werden sehen, daß bei entsprechend gewählten Anfangsbedingungen die Gesamtenergie zwischen den beiden Pendeln hin und her wechselt. Andere Anfangsbedingungen führen zu synchronen oder antisymmetrischen Schwingungen. Desweiteren werden Sie den Einfluss der Kopplungsstärke auf die Eigenfrequenzen untersuchen und ein System mit unterschiedlich schweren Pendel analysieren.

Um die Analogie zu anderen schwingungsfähigen Systemen zu erkennen, sollen Sie qualitativ das Verhalten von elektrisch gekoppelten Schwingkreisen beobachten.

VI Grundlagen

Um den Schwingungszustand eines gekoppelten Pendels zu beschreiben, müssen zunächst die Differentialgleichungen für die einzelnen Pendel aufgestellt werden. Betrachten wir zunächst ein einzelnes, ungekoppeltes Pendel mit dem Trägheitsmoment J und dem Direktionsmoment $D = mgL$, wobei L die Pendellänge, m die Masse und g die Erdbeschleunigung darstellen. Für das Pendel gilt für kleine Winkel φ die Differentialgleichung:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi. \quad (1)$$

Die Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

Werden nun zwei solcher Pendel durch eine Feder mit dem Direktionsmoment

$$D' = D_F l^2 \quad (3)$$

(D_F beschreibt die Federkonstante und l die Länge von der Federaufhängung zur Pendelachse) gekoppelt, so wirken zusätzliche Drehmomente M_i , die von den jeweiligen Auslenkungswinkeln φ_1, φ_2 abhängen:

$$\text{Pendel 1: } M_1 = D'(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

$$\text{Pendel 2: } M_2 = D'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Diese zusätzlichen Drehmomente, müssen bei der Differentialgleichung des freien Pendels (1) hinzuaddiert werden. Wir erhalten somit ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen,

$$J\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2),$$

die sich leicht entkoppelt lassen, wenn man $u = \varphi_1 + \varphi_2$ und $v = \varphi_1 - \varphi_2$ substituiert (Hinweis: Addieren und Subtrahieren Sie jeweils die Gleichungen (5) und führen Sie dann die Substitution durch). Damit erhalten wir ein einfaches System von zwei unabhängigen Differentialgleichungen:

$$J\ddot{u} + Du = 0 \quad (6)$$

$$J\ddot{v} + (D + 2D')v = 0.$$

Die Lösungen sind harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1, ω_2 :

$$u = u(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t, \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (7)$$

$$v = v(t) = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t, \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}$$

Durch erneute Substitution mit $\varphi_1 = \frac{1}{2}(u + v)$ und $\varphi_2 = \frac{1}{2}(u - v)$ erhalten wir schließlich die Gleichungen für die Auslenkungswinkel der Pendel:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \quad (8)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \sin \omega_2 t).$$

Diese allgemeinen Lösungen beschreiben auf den ersten Blick eine recht komplexe Bewegung der Pendel. Für bestimmte Anfangsbedingungen ergeben sich allerdings sehr anschauliche Schwingungsgleichungen. Dazu müssen die im folgenden besprochenen Anfangsbedingungen $\varphi_i(t=0)$ und $\dot{\varphi}_i(t=0)$ in die Gleichungen (8) eingesetzt werden und die Koeffizienten A_i und B_i bestimmt werden. Wir wollen drei Spezialfälle, wie sie in Abbildung 2 skizziert sind, genauer betrachten.

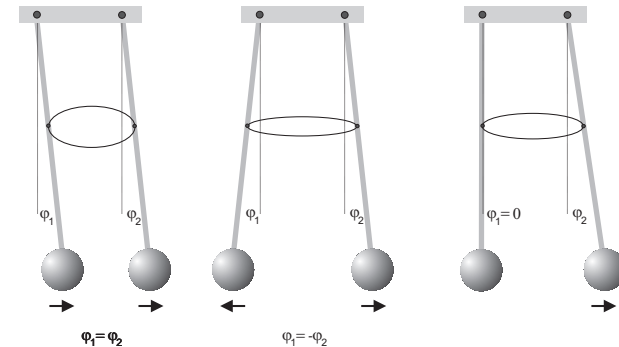


Abbildung 2: Schwingungsformen des gekoppelten Pendel für unterschiedliche Randbedingungen. Von links nach rechts: symmetrische Schwingung, antisymmetrische Schwingung, Schwebung.

Symmetrische Schwingung Beide Pendel werden um den gleichen Winkel ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichzeitig losgelassen.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) &= \varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Für die Koeffizienten erhalten wir:

$$A_1 = 2\varphi_0, A_2 = B_1 = B_2 = 0 \quad (10)$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \quad (11)$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch und phasengleich mit der Frequenz ω_1 . Nach Gleichung (7) hängt ω_1 nicht vom Direktionsmoment der Kopplung ab (ω_1 hängt nur vom Direktionsmoment D des freien, ungekoppelten Pendels ab). Die Pendel schwingen also so, als seien sie gar nicht gekoppelt. Dies ist ja auch sofort einzusehen, da beide Pendel stets den gleichen Abstand voneinander aufweisen und so die Kopplungsfeder während der Schwingung niemals gestaucht oder gedehnt wird. Die Kopplungsfeder verharrt also stets im gleichen Zustand wie zu Beginn der Schwingung. Es findet also keine Kopplung von einem Pendel auf das andere statt.

Asymmetrische Schwingung Beide Pendel werden gegenphasig um den gleichen Winkelbetrag ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichzeitig losgelassen.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) &= -\varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Für die Koeffizienten ergeben sich in diesem Fall:

$$A_2 = 2\varphi_0, A_1 = B_1 = B_2 = 0 \quad (13)$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (14)$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch aber diesmal gegenphasig mit der Frequenz ω_2 . Die Frequenz ω_2 hängt sowohl vom Direktionsmoment des Pendels als auch vom Direktionsmoment der Kopplung ab!

Schwebungsschwingung Das eine Pendel verharrt in der Ruhelage, während das andere um den Winkel φ_0 ausgelenkt wird.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) &= 0, \varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) &= \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Für die Koeffizienten erhalten wir

$$A_1 = -A_2 = \varphi_0, B_1 = B_2 = 0 \quad (16)$$

und die Schwingungsgleichungen lauten nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Diese Gleichungen beschreiben eine Schwebung. Das zu Beginn ausgelenkte Pendel überträgt allmählich seine Schwingungsenergie auf das anfangs ruhende Pendel, bis es schließlich selbst stillsteht. Danach kehrt sich der Vorgang um und das nun schwingende Pendel regt das ruhende Pendel an. Die Schwingung der gekoppelten Pendel wird in diesem Fall durch zwei Frequenzen beschrieben (siehe Argumente in Gleichung (17)).

$$\omega_I = \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 + \omega_1) \quad \omega_{II} = \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 - \omega_1) \quad (18)$$

Die erste Frequenz ist diejenige, mit denen jedes einzelne Pendel schwingt. Die zweite hingegen ist die Schwebungsfrequenz², mit der die Energie eines einzelnen Pendels oszilliert. Visuell sind diese Frequenzen in Abbildung 3 eingezeichnet.

Die zu den Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 gehörenden Schwingungen werden als Normalschwingungen bezeichnet. Allgemein gilt, dass ein System aus N gekoppelten Oszillatoren N Normalschwingungen besitzt. Jede mögliche Schwingung eines einzelnen Oszillators kann immer durch eine Linearkombination dieser Normalschwingungen dargestellt werden. So ist die Schwebungsschwingung eine Linearkombination der beiden Normalschwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 .

²In der Literatur wird manchmal auch die Schwebungsfrequenz ohne den Faktor $1/2$ durch $\omega_{II} = \omega_2 - \omega_1$ definiert

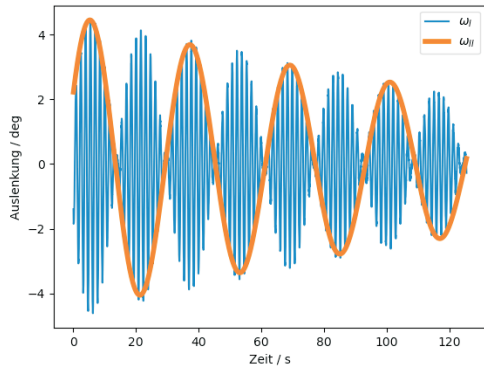


Abbildung 3: Visualisierung der Frequenzen ω_I und ω_{II} in der Aufnahme der Auslenkung der Pendel gegen die Zeit

Kopplungsgrad

Um die Stärke der Kopplung zu quantifizieren, definiert man den Kopplungsgrad κ durch

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'}. \quad (19)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (7) für ω_1 und ω_2 erhält man für κ :

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}. \quad (20)$$

Alternativ kann man mit Hilfe von (18) die Gleichung folgendermaßen umschreiben:

$$\kappa = \frac{(\omega_I + \omega_{II})^2 - (\omega_I - \omega_{II})^2}{(\omega_I + \omega_{II})^2 + (\omega_I - \omega_{II})^2} = \frac{(\frac{1}{T_I} + \frac{1}{T_{II}})^2 - (\frac{1}{T_{II}} - \frac{1}{T_I})^2}{(\frac{1}{T_{II}} - \frac{1}{T_I})^2 + (\frac{1}{T_I} + \frac{1}{T_{II}})^2} \quad (21)$$

Hierbei wurde natürlich ausgenutzt, dass

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}. \quad (22)$$

Bei *schwachen* Kopplungen (also wenn $D' \ll D$) kann (19) genähert werden durch

$$\kappa = \frac{D'}{D}. \quad (23)$$

VI.1 Bedienung des Versuchsaufbau

Die Winkelauslenkung beider Pendel wird magnetisch mit Hilfe des Hall-Effekts gemessen. Dazu befindet sich auf der Stirnseite der Pendelachse ein Hall-Sensor, der im homogenen Feld zweier Stabmagnete positioniert ist. Schwingt das Pendel und damit auch der Sensor (relativ zum raumfesten Magnetfeld), so wird eine Hallspannung erzeugt, die proportional zum Sinus des Auslenkungswinkel ist (Abbildung 4).

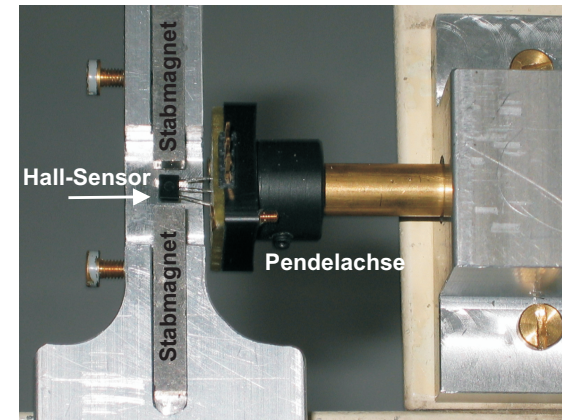


Abbildung 4: Hall-Sensor als Winkelmesser

Die Hall-Spannungen werden über einen Verstärker an den Analog-Digital-Wandler eines STM32 Mikrocontrollers angelegt. Dieser sampelt alle 2 ms sequentiell die zwei Spannungswerte der Pendel. Die Daten werden direkt zum PC gesendet.

Die Messsoftware basiert auf Python. Mit dem Start der Software muss zuerst der COM-Port, über den der AD-Wandler angeschlossen ist, ausgewählt werden. Der auszuwählende COM-Port trägt den Namen „COMX - USB-SERIAL

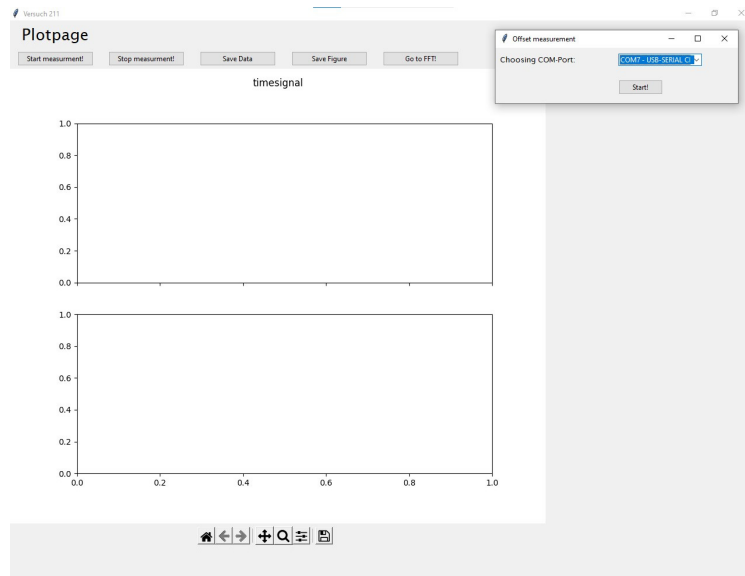


Abbildung 5: Bedienoberfläche der Software

CH340“.

Nach Starten des Programms führt das Messprogramm immer automatisch als erste mögliche Messung eine Offsetmessung durch, das dauert ca. 20s. Dafür sollte die Kopplungsfeder demontiert werden. Die Pendel sollten erst nach Abschluss der Offsetmessung angestoßen werden. Der Offset wird automatisch von den Messdaten subtrahiert. Das Programm erzeugt nach Eingabe des Gruppennamens einen entsprechenden Ordner im Masterordner "Messdaten Versuch 211", der auf dem Desktop verlinkt ist. Sollten Sie das Programm neu starten müssen, so können Sie denselben Gruppennamen nochmals eingeben, er wird dann wieder als Speicherpfad festgelegt. Vor jeder Messung muss die Kopplungsart ausgewählt werden und eine Messdauer eingegeben werden.

Um die Messwerte und den Plot als Bilddatei oder die Messwerte als Textdatei zu speichern, können die zugehörigen „Save“ Buttons genutzt werden. Um die Periodendauer der Schwingungen zu ermitteln, können mit dem Cursor beispielsweise die Nulldurchgänge angewählt werden. Die Koordinaten des Cursors lassen sich in der unteren Zeile des Plots ablesen. Mit Hilfe der „Lupe“ (siehe

Abbildung 5 unten) lassen sich bestimmte Bereiche vergrößert darstellen.

Das Messprogramm verfügt zusätzlich über die Möglichkeit die Messdaten einer Fast Fourier Analyse zu unterziehen. Dazu kann nach einer Messung über den Button „Go to FFT!“ zum entsprechenden Fenster gewechselt werden. Hier besteht die Möglichkeit die gerade aufgenommenen Messdaten oder als Textdatei gespeicherte Messwerte zu analysieren. Die Plots können als Textfile oder als Bilddatei gespeichert werden. Als Speicherort dient ebenfalls der Ordner mit dem Gruppennamen.

Sie können versuchen, die automatische Fitfunktion des Programms zu verwenden. Falls die Software keinen Fit auf Anhieb erstellen kann, müssen Sie über den jeweiligen „Enter Parameter“ Button die (ungefähre) Position der Peaks, die Amplituden und die Halbwertsbreiten analog eingeben.

Die restlichen Funktionen des Messprogramms sind selbsterklärend. Bei Fragen kann die betreuende Person gerne weiterhelfen.

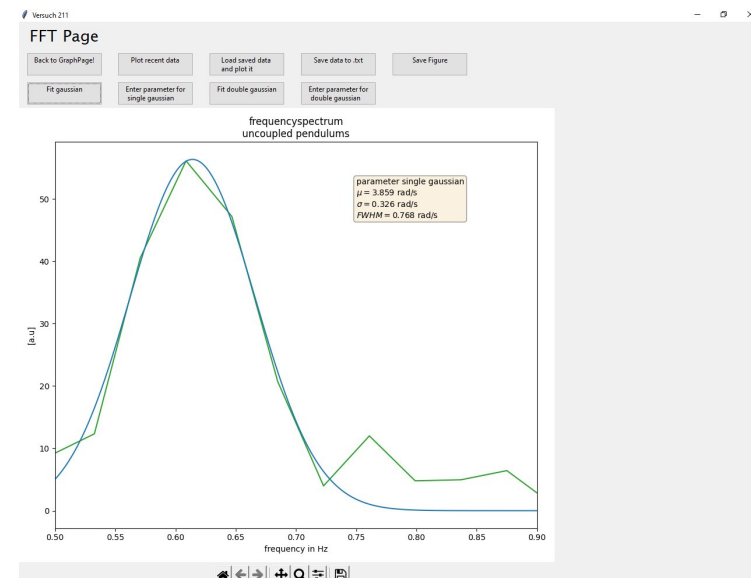


Abbildung 6: Fenster zur FFT-Analyse

Vergessen Sie nicht nach einer durchgeführten Messung den entsprechenden Button zum Speichern ihrer Daten und Bilder zu drücken!

VII Durchführung des Versuchs

Hinweis: Lenken Sie die Pendel nie mehr als drei Zentimeter aus der Ruhelage aus! Sonst könnte das linke Pendel aus der Halterung springen!

Offsetmessung

Starten Sie das Messprogramm „Versuch 211“. Eine Verknüpfung des Programms befindet sich auf dem Desktop. Führen Sie die Offsetmessung durch das Klicken des „Start measurement“ Buttons durch.

Aufgabe 1: Messen der Eigenschwingungsfrequenz des ungekoppelten Pendels

Messen Sie zunächst ohne Koppelfeder für jedes einzelne Messingpendel die Schwingungsfrequenz. Regen Sie hierfür beide Pendel an und starten Sie daraufhin das Messprogramm. Geben Sie eine geeignete Messdauer ein, sodass Sie mehrere Schwingungsperioden messen. Bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz mit Hilfe einer Fouriertransformation. Verwenden Sie dazu das FFT-Fenster des Messprogramms (Abbildung 6). Zur Dokumentation Ihrer Messung sollten Sie diese am besten gleich speichern.

Aufgabe 2: Messen der symmetrischen und antisymmetrischen Eigenschwingungen bei verschiedenen Kopplungsgraden

Regen Sie für die drei verschiedenen Kopplungsgrade einmal die symmetrische und danach die antisymmetrische Eigenschwingung der beiden Messingpendel an. Die Befestigungslöcher für die Ringfeder sind an der rechten Pendelstange markiert. Notieren Sie, wo die Feder eingehängt wurde und messen Sie die Länge bis zur Pendelachse. Ob eine Eigenschwingung rein angeregt ist, erkennt man daran, dass die Amplituden beider Pendel gleichzeitig monoton abnehmen, während bei gemischter Anregung die Amplituden mehr oder weniger schwanken. Allerdings ist es schwierig die symmetrische Schwingung sauber anzuregen, da die Aufhängung der Feder immer eine leichte Kopplung erzeugt. Die Feder überträgt nicht nur Zug-, sondern auch Druckkräfte. Für kleine Auslenkungen ist die Kraft ausreichend linear von der Auslenkung abhängig (gemäß Hooke'schem Gesetz). Für große Auslenkungen ist ein solcher Ring aber bei Zug viel steifer als bei Druck. Die differentiellen Federkonstanten in den beiden Lagen unterscheiden sich dann teilweise um einen Faktor von zehn! Messen Sie die Frequenzen der Eigenschwingungen per FFT und speichern Sie die Messdaten ab.

Aufgabe 3: Messen der gemischten Anregung

Regen Sie beide Eigenschwingungen gleichzeitig an, indem Sie das eine Pendel in der Ruhelage festhalten und erst freigeben, nachdem Sie das andere Pendel bei der Maximalauslenkung losgelassen haben. Bei dieser Anregungsform („gemischte Anregung“) sind zusätzlich zu den Eigenschwingungsfrequenzen ω_1 und ω_2 per FFT auch noch die Schwingungs- und Schwebungsfrequenzen über eine Cursormessung zu bestimmen. Messen Sie hierfür im $\varphi(t)$ -Fenster mittels des Cursors die Periodendauern T_I und T_{II} aus (siehe Abbildung 3). Auch hier sollten Sie alle Messungen gleich speichern. Bei der Schwebung kommt immer nur das eine Pendel wieder voll zur Ruhe, welches am Anfang in Ruhe war. Sie sehen, auch zwei Pendel mit gleicher Schwingungsdauer können bei einer Kopplung ein überraschendes Verhalten zeigen!

Aufgabe 4: Gekoppelte elektrische Schwingkreise

Zusätzlich zu den gekoppelten Pendeln ist noch ein Aufbau vorhanden, an dem Sie die Kopplung zweier elektrischer Schwingkreise mit Hilfe eines Oszilloskops beobachten können. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Die Kopplungsstärke variieren Sie durch den Abstand zwischen den Spulen.

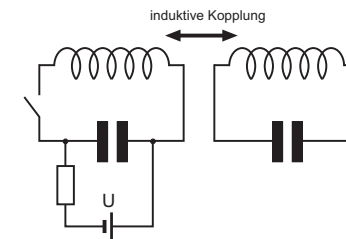


Abbildung 7: Gekoppelte elektrische Schwingkreise. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Der Kondensator im linken Schaltkreis wird über den Widerstand geladen. Wird der Schalter geschlossen, so wird im linken Kreis eine Schwingung angeregt. Durch die Kopplung überträgt sich allmählich, ganz analog zu den gekoppelten Pendeln, die Energie in den rechten Schwingkreis und wieder zurück. Die Oszillation kann durch Abgriff über den Spulen mit einem Oszilloskop dargestellt werden.

Beobachten Sie für verschiedene Kopplungen (Spulenabstände) die Schwingungen beider Schwingkreise. Hinweise zur Bedienung des Oszilloskops liegen aus.

VIII Auswertung

Erstellen Sie eine Tabelle für jede der drei Kopplungsarten und tragen Sie dort die jeweils gemessenen Frequenzen (FFT-Ergebnisse) der drei Anregungsarten mit den entsprechenden Fehlern ein.

Vergleichen Sie die gemessenen Frequenzen ω_1 und ω_2 der symmetrischen und asymmetrischen Schwingung mit denen der gemischten Anregung.

Vergleichen Sie die Frequenzen ω_I und ω_{II} der Cursormessung (berechnet aus T_I und T_{II}) mit den Ergebnissen der FFT bei gemischter Anregung (umgerechnet in ω_I und ω_{II}) und überlegen Sie, warum die Fehler unterschiedlich groß sind (*Hinweis*: Der Fehler der Frequenzen im FFT ist abhängig von der Messdauer. Für mehr Infos siehe Anhang).

Berechnen Sie anschließend aus den gemessenen Schwingungsdauern (hierfür die Cursormessung der gemischten Anregung verwenden!) die Kopplungsgrade. Die Berechnung der Kopplungsgrade erfolgt also gemäß (21). Um die Fehlerfortpflanzung zu berechnen, bietet es sich an, das fertige Pythonnotebook für Fehlerrechnung und -fortpflanzung zu nutzen. Es ist unter <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/Fehlerrechnung.html> zu finden.

Gemäß (3) ist das Direktionsmoment der Ringfeder proportional zu l^2 , wobei l die Länge vom Aufhängungspunkt der Feder bis zur Pendelachse ist. Für genügend schwache Kopplungen gilt dann unter Verwendung von (23), dass das Verhältnis zweier Kopplungsgrade dem Verhältnis der zugehörigen Kopplängenquadraten entspricht. In Formeln also:

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_j} = \frac{l_i^2}{l_j^2} \quad (24)$$

Berechnen Sie zum Schluss also auch noch die Verhältnisse der Kopplungsgrade, die Sie aus den Schwingungsdauern T_I und T_{II} bestimmt haben und vergleichen Sie diese mit den Verhältnissen der Kopplungsgraden, die Sie aus der Längenmessung erhalten.

IX Anhang

Da die FFT auf Basis der mathematischen Fouriertransformation durch das Messprogramm durchgeführt wird, soll zum Schluss eine kleine Revision zu dem mathematischen Kapitel folgen. Weiterführende Infos können Sie gerne dem Kapitel zum Fourier-Optik Versuch (Versuch 233) entnehmen. Beachten Sie insbesondere, dass hier eine ganz leicht abgewandelte Definition verwendet wird, die allerdings nur Konventionssache ist. Die Nutzung dieser abgewandelten Konvention ändert nichts an den wesentlichen Resultaten des Unterkapitels!

Durch eine Fouriertransformation wird hier im Versuch vom „Zeitraum“ in den kanonisch konjugierten „Frequenzraum“ gewechselt.

Formal sieht eine Fourier-Transformation von ω nach t folgendermaßen aus

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega, \quad (25)$$

wobei hier $\mathcal{F}$ die Fouriertransformierte beschreibt. Die Rücktransformation liefert die gesuchte Fouriertransformierte:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (26)$$

Es wird nun Gebrauch von einigen mathematischen Relationen gemacht. Einerseits werden die Eulerdarstellungen für Sinus- und Kosinusfunktionen benötigt:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (27)$$

Andererseits wird folgende Relation zur Berechnung von Fourier-Integralen ausgenutzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} dt = 2\pi \cdot \delta(\omega_1 + \omega_2), \quad (28)$$

wobei letzteres die Delta-Distribution ist, ergo ein infinitesimal schmaler Peak im Frequenzraum bei $\omega_1 = -\omega_2$ (also dort, wo das Argument der Distribution gerade genau gleich 0 ist!) und 0 überall sonst.

Setzt man nun z.B. für $f(t)$ die Relation für die symmetrische Schwingung, also Gleichung (11), ein und rechnet das Ganze mit den oben genannten Tricks durch, so erhält man als Ergebnis im Fourier-Raum:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\varphi_0}{2} \cdot (\delta(\omega_1 + \omega) + \delta(\omega - \omega_1)). \quad (29)$$

Das heißt, man erwartet zwei Peaks im Fourier-Spektrum: einmal einen bei $\omega = \omega_1$ und einmal einen bei $\omega = -\omega_1$. Der letzte Peak wird aber nie sichtbar sein, da in diesem Versuch durch das Programm nur positive (physikalische) Frequenzen betrachtet werden. Für die antisymmetrische Schwingung verläuft die Rechnung analog, nur dass man statt ω_1 dieses Mal ω_2 einsetzt. Die Schwebung ist eine Überlagerung von Kosinus- und Sinusfunktionen. Gemäß der Eulerdarstellungen führt dies auf eine Ansammlung sehr vieler Exponentialterme, deren Argumente aus Summen und Differenzen von ω_1 und ω_2 bestehen, ergo den Schwingungs- und Schwebungsfrequenzen ω_I und ω_{II} . Im Endeffekt reduziert sich das Endergebnis diesmal auf *zwei* (physikalisch relevante) Peaks, einer bei $\omega = \omega_1$ und der andere bei $\omega = \omega_2$. Bei einer gemischten Anregung erhält man im Fourier-Spektrum also *alle* Normalschwingungsanteile als Peaks!

Eine perfekte, kontinuierliche Fouriertransformation könnte natürlich nur durchgeführt werden, wenn jeder Punkt der Schwingungen gemessen werden würde. Das wird hier aber nicht! Dadurch, dass eine bestimmte Aufnahmerate eingestellt ist, werden nur alle paar Zeiteinheiten die Auslenkungen gemessen und digital festgehalten, was zu einer Diskretisierung führt. Das führt neben der *endlichen* Messdauer (die eben dafür sorgt, dass das Integral in Gleichung (26) nicht bis $+\infty$ geht) und Effekten der Heisenberg'schen Unschärferelation zu einer Verbreiterung des Peaks zu einer Gauß-ähnlichen Struktur.

Dementsprechend ist auch leicht einzusehen, dass sich die Gauß-ähnliche Struktur umso mehr einem δ -Peak annähern würde, je länger die Messung andauert und umso mehr Datenpunkte erworben werden!

Da der Gaußfit nur eine Näherung an die eigentliche Struktur ist, ist es bei Linienspektren Konvention eher die Halbwertsbreite als Fehler zu verwenden, um den Fehler (z.B. durch mögliche Asymmetrien) nicht zu unterschätzen.

Versuch 212 Zähigkeit von Flüssigkeiten



Abbildung 1: Kugelfallviskosimeter und Kapillarviskosimeter

I Messaufbau

- Messzylinder aus Hartglas mit Messskaler, gefüllt mit Polyethylenglykol. Am unteren Teil des Zylinders befindet sich eine Präzisionskapillare (Länge: $100,0 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$, Kapillardurchmesser $1,50 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$).
- Kugeln aus „POM“-Polyacetal mit folgenden Durchmessern: $2r = 1,0 / 2,0 / 3,0 / 4,0 / 5,0 / 6,0 / 7,0 / 8,0 / 9,0 \text{ mm}$ ($\pm 25 \mu\text{m}$). Die Dichte der Kugeln und die Dichte von Polyethylenglykol ist im Anhang angegeben.
- Thermometer

- Pinzetten, Bechergläser
- Maßstab
- Stoppuhren

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Die Ableitung des Gesetz von Stokes finden Sie in W. Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik, Band 1*.
- Homepage des Praktikums <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Reale Flüssigkeiten, innere Reibung, Zähigkeit (Viskosität), Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit, laminare Strömung, Stokes'sches Gesetz, Gesetz von Hagen-Poiseuille, Reynold'sches Ähnlichkeitsgesetz, Reynoldszahl, Turbulenz.

Für Mathematiker und Physiker: Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit $v(t)$ einer in eine Flüssigkeit fallende Kugel. Stellen Sie dazu mit Hilfe den an der Kugel angreifenden Kräften eine Differentialgleichung auf und lösen Sie diese unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Nach welcher Zeit ist die Geschwindigkeit der Kugel nahezu konstant? (Tipp: Sie dürfen als Orientierungswerte gerne $m \approx 0.15 \text{ g}$ und $\eta \approx 0.2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ verwenden)

Verständnisfragen:

1. Welche Kräfte wirken auf eine fallende Kugel in einer Flüssigkeit und wie lautet die Differentialgleichung?
2. Wann erreicht die fallende Kugel ihre Endgeschwindigkeit?
3. Erläutern Sie den Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung.
4. Was besagt die Reynoldszahl? Wie groß ist die kritische Reynoldszahl für eine Kugel die in einer Flüssigkeit fällt und wie groß ist sie bei einer Rohrströmung?
5. Welche Kraft wirkt, wenn zwei parallele Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet, gegeneinander verschoben wird?
6. Was besagt das Gesetz von Hagen-Poiseuille?
7. Wie erhöht sich der Fluss, wenn der Rohrdurchmesser bei konstanten Druck verdoppelt wird?

IV Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Viskosität von Polyethylenglykol nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter. Zusätzlich ist die Gültigkeitsgrenze des Stokes'schen Gesetzes zu überprüfen, indem der Übergang von laminarer zu turbulenter Umströmung der Kugel (Wirbelablösung) ermittelt wird.
2. Bestimmen Sie die Zähigkeit von Polyethylenglykol nach Hagen-Poiseuille mit dem Kapillarviskosimeter.
3. Vergleichen Sie die unter 1. und 2. gewonnenen Werte miteinander.

V Grundlagen

Bewegt sich ein Körper mit **konstanter Geschwindigkeit** in einem fluiden oder gasförmigen Medium, so ist trotz der gleichförmigen Bewegung eine Kraft notwendig, um die Bewegung aufrecht zu erhalten. Dies scheint zunächst widersprüchlich zum zweiten Newtonschen Gesetz zu sein, nach dem ein Körper

beschleunigt wird wenn auf ihn eine Kraft wirkt. Allerdings gilt dies nur im Vakuum. Bei der Bewegung in einem Medium wirken zusätzlich Reibungskräfte, die dazu führen, dass bei einer konstanten äußeren Kraft, die Nettokraft verschwindet und sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die Reibung wird bei Flüssigkeiten durch zwischenmolekulare Kräfte verursacht. Diese führt dazu, dass bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit, **das Medium teilweise mitbewegt wird**. Sie alle haben dies schon beim morgendliche Frühstück erlebt. Taucht man einen Löffel in ein Honigglas und zieht diesen dann senkrecht nach oben heraus, so bleibt aufgrund der Adhäsion eine dünne Honigschicht am Löffel haften. Diese Schicht wechselwirkt mit benachbarten Molekülen, so dass beim Herausziehen ein ganzer Honigklumpen mitbewegt wird. Die Reibungskräfte lassen sich auch beim Umrühren von Honig oder Marmelade beobachten. Sie müssen eine deutliche Kraft aufwenden um den Löffel im Glas zu bewegen. Beim Umrühren von Kaffee ist dieser Effekt kaum wahrzunehmen. Offenbar hängt die Reibungskraft von der „Zähigkeit“ der Flüssigkeit ab.

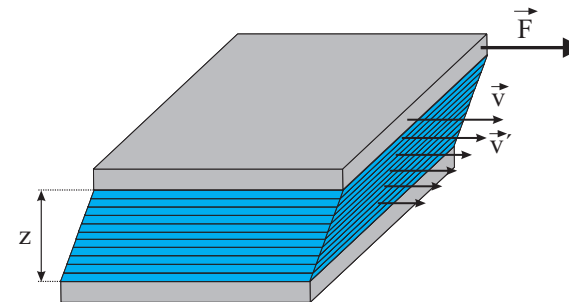


Abbildung 2: Gedankenexperiment zur Bestimmung der inneren Reibung. Die Flüssigkeit soll sich schichtweise in Richtung der Kraft bewegen.

Um die Reibungskräfte eines Körpers in einer Flüssigkeit zu quantifizieren, betrachten wir die Anordnung nach Abbildung 2. Bei diesem (Gedanken)-Experiment befindet sich zwischen zwei gleich großen Platten, die im Abstand z parallel zueinander ausgerichtet sind, eine Flüssigkeit. Die untere Platte ruht. Auf die obere Platte wird eine Kraft ausgeübt, so dass sie sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Da an der oberen Platte aufgrund der Adhäsion ein Flüssigkeitsfilm haftet, bewegt sich dieser mit der Geschwindigkeit der Platte mit. Andererseits beträgt die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfilms die an der

unteren, ruhenden Platte haftet, Null. Aus Stetigkeitsgründen müssen daher die dazwischen liegenden Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Die oberste Flüssigkeitsschicht, die sich mit der Platte mitbewegt, übt auf die darunter liegende Schicht eine Tangentialkraft aus und beschleunigt diese auf eine Geschwindigkeit v' . So beschleunigt jede Schicht die darunter liegende und wird gleichzeitig von dieser nach dem Reaktionsprinzip gebremst.

Experimentell zeigt sich, dass die Kraft F , die notwendig ist um die obere Platte zu bewegen, proportional zur Fläche A und zur Geschwindigkeit v und umgekehrt proportional zum Abstand z ist. Bewegt sich die obere Platte gleichförmig, so verschwindet die Nettokraft, d.h. die Reibungskraft F_r ist vom Betrag her gleich groß wie die auf die obere Platte ausgeübte Kraft F . Für die (Newtonsche) Reibungskraft gilt dann:

$$F_r = \eta A \frac{v}{z}. \quad (1)$$

Für den allgemeinen Fall drückt man diese Gleichung besser durch den Geschwindigkeitsgradienten dv/dz aus:

$$F_r = \eta A \frac{dv}{dz}. \quad (2)$$

Die Proportionalitätskonstante η ist eine flüssigkeitsspezifische Größe und wird als dynamische Viskosität, Zähigkeit oder meist auch nur als Viskosität bezeichnet. Für die Maßeinheit gilt nach Gleichung (1): $[\eta] = \text{Pa s}$.¹

Das Newtonsche Reibungsgesetz gilt natürlich auch für andere Körpergeometrien. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten aneinander ab ohne sich zu vermischen, spricht man von einer Schichtströmung oder von einer **laminaren Strömung**. Bei großen Geschwindigkeiten und bei speziellen Körpergeometrien, ist dies nicht mehr der Fall. In der Flüssigkeit kommt es dann zur Bildung von Wirbeln, die die Schichten vermischen. Bei diesen **turbulenten Strömungen** ist der Strömungswiderstand viel größer als bei einer laminaren Strömung, so dass das Newtonsche Reibungsgesetz seine Gültigkeit (Abbildung 3) verliert.

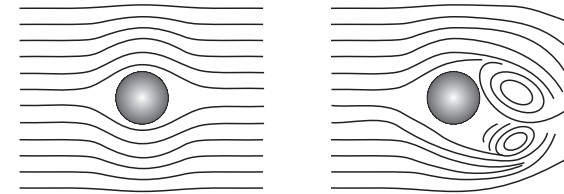


Abbildung 3: Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit. Links: Laminare Strömung bei der die Flüssigkeit den Körper symmetrisch umfließt. Die einzelnen Schichten gleiten aneinander ab ohne sich zu vermischen. Rechts: Turbulente Strömung bei hohen Geschwindigkeiten. In Folge der Wirbelbildung kommt es zu einer Vermischung der Flüssigkeit.

V.1 Reynoldszahl

Ob sich eine Flüssigkeit laminar oder turbulent verhält, lässt sich mit Hilfe der dimensionslosen Reynoldszahl **abschätzen**. Die Reynoldszahl ist eine semiempirische Größe, die das Verhältnis der (doppelten) kinetischen Energie eines Volumenelements der Flüssigkeit, zu den Reibungsverlusten beschreibt:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}}. \quad (3)$$

Je größer die kinetische Energie der Flüssigkeit $\hat{A}$, desto instabiler wird die Strömung. Andererseits wirkt die innere Reibung der Flüssigkeit dämpfend und somit stabilisierend auf die Strömungsbewegung. Bei kleinen Reynoldszahlen ist $E_{kin} \leq W_{Reibung}$ und die Flüssigkeit strömt laminar. Oberhalb eines kritischen Wertes Re_{kr} tritt dagegen eine turbulente Strömung auf. In diesem Fall gilt: $E_{kin} \gg W_{Reibung}$.

Führt man eine charakteristische Länge L ein, die die Geometrie des Strömungssystems beschreibt, so lässt sich die Reynoldszahl auch wie folgt darstellen:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \quad (4)$$

wobei v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und ρ die Dichte der Flüssigkeit beschreibt. Bei einer Rohrströmung ist für L der Rohrdurchmesser einzusetzen. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit beschreibt L den Durchmesser der Kugel.

¹In manchen Lehrbüchern findet man auch noch die Einheit Poise: 10 Poise = 1 Pa s.

Die kritische Reynoldszahl hängt vom jeweiligen Experiment ab. Beispielsweise zeigt sich experimentell, dass bei der Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr, der Übergang von laminarer zur turbulenter Strömung bei einer Reynoldszahl von $Re_{kr} \approx 2300$ erfolgt. Natürlich ist der Übergang nicht scharf, so dass auch bei der kritischen oder höheren Werten der Reynoldszahl noch ein laminarer Fluss möglich ist. Allerdings reicht ab der kritischen Reynoldszahl bereits eine kleine Störung aus, um die Strömung in eine turbulente umschlagen zu lassen. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit, erfolgt der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung bereits bei viel kleineren Reynoldszahlen. Experimentell zeigt sich, dass hier die kritische Reynoldszahl ungefähr Eins beträgt: $Re_{kr} \approx 1$

V.2 Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Bewegt sich eine Kugel mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit, so wirkt auf sie die Reibungskraft:

$$F_r = 6\pi\eta r v. \quad (5)$$

Diese Gleichung wird als das Gesetz von Stokes bezeichnet. Die Herleitung folgt aus dem Newtonschen Reibungsgesetz (1) und findet sich in den meisten Lehrbüchern der theoretischen Mechanik. Zu beachten ist, dass das Stokes'sche Gesetz eine Näherung für laminare Strömungen mit $Re < 1$ ist und nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gültig ist. Wegen des endlichen Durchmessers aller verwendbaren Fallrohre, wird die Sinkgeschwindigkeit verfälscht und systematisch zu klein gemessen, wobei der Fehler mit wachsendem Kugelradius zunimmt. Dies lässt sich durch die Ladenburg'sche Korrektur λ im Stokes'schen Gesetz berücksichtigen:

$$F_r = 6\pi\eta r v \lambda \quad (6)$$

mit

$$\lambda = \left(1 + 2,1 \frac{r}{R}\right), \quad (7)$$

wobei R den Radius des Fallrohres beschreibt und r den Radius der Kugeln.

Unter Ausnutzung des Stokes'schen Gesetz lässt sich die Viskosität η einer Flüssigkeit bestimmen.

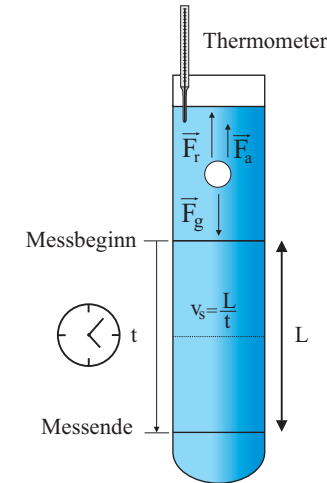


Abbildung 4: Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit mit einem Kugelfallviskosimeter. Bewegt sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit, heben sich alle angreifenden Kräfte auf.

Beim Kugelfallviskosimeter wird eine Kugel mit dem Radius r in die Flüssigkeit, dessen Viskosität bestimmt werden soll, fallen gelassen. Nach einer Beschleunigungsphase bewegt sich die Kugel mit einer konstanten Sinkgeschwindigkeit v_s . In diesem Fall verschwinden alle an die Kugel angreifenden Kräfte, d.h. Gewichtskraft $F_g = \rho_k V_k g$, Auftriebskraft $F_a = -\rho_f V_k g$ und Reibungskraft $F_r = -6\pi\eta r v_s$ heben sich auf:

$$F_g + F_a + F_r = 0. \quad (8)$$

Dabei beziehen sich die mit k indizierten Größen auf die Kugel und die mit f indizierten, auf die Flüssigkeit. Einsetzen der einzelnen Kräfte und Auflösen nach η liefert für die Viskosität der Flüssigkeit:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{v_s} r^2. \quad (9)$$

Durch Messung der Sinkgeschwindigkeit v_s kann so die Viskosität bestimmt werden.

V.3 Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille: Laminare Rohrströmung

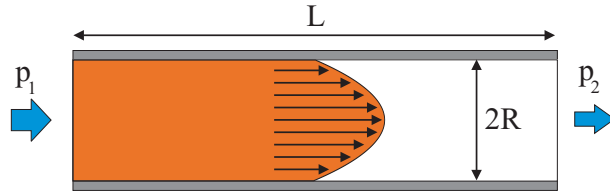


Abbildung 5: Laminare Rohrströmung. Unter dem Einfluss der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ strömt die Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr mit einem parabelförmigen Geschwindigkeitsprofil.

Eine andere Methode die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen, ist die Messung des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung. Betrachten wir dazu ein Rohr der Länge L und Radius R (Abbildung 5). Damit eine Strömung überhaupt möglich ist, muss an den Stirnflächen eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ vorhanden sein. Im Fall einer laminaren Strömung kann die Bewegung der Flüssigkeit wieder als Schichtströmung interpretiert werden, wobei bei einem Rohr mit kreisförmigen Querschnitt, einzelne Zylindermäntel aneinander abgleiten. Auf einen coaxialen Teilzylinder in der Flüssigkeit mit dem Radius $r < R$, wirkt aufgrund der Druckdifferenz eine Kraft

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (10)$$

Andererseits wirkt auch die Newtonsche Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}. \quad (11)$$

Bei einer stationären Strömung, bei der sich die einzelnen Schichten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, muss die Nettokraft verschwinden, d.h. $F_p = F_r$:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (12)$$

Hieraus folgt für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r. \quad (13)$$

Integration über r unter Berücksichtigung der Randbedingung $v(R) = 0$, liefert für die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2). \quad (14)$$

Diese Gleichung stellt ein Rotationsparaboloid dar. Die Flüssigkeit besitzt demnach das in Abbildung 5 gezeigte parabolische Geschwindigkeitsprofil.

Um den Volumenstrom, d.h. die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche des Rohrs strömt, zu bestimmen, müssen wir über die gesamte Querschnittsfläche integrieren:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L}. \quad (15)$$

Beachten Sie die Abhängigkeit von R^4 . Eine Verdopplung des Rohrradius ver-sechzehnfacht den Volumenstrom!

Gleichung (15) wird nach dem deutschen Wasserbau-Ingenieur Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen und nach dem französischen Arzt und Physiologen Poiseuille, auch als das Gesetz von Hagen-Poiseuille bezeichnet.

Sind Länge und Radius des Rohrs und die Druckdifferenz bekannt, so kann durch Messung des Volumenstroms die Viskosität bestimmt werden.

Die mittlere Geschwindigkeit des parabolischen Geschwindigkeitsprofils ergibt sich durch Division des gesamten Volumenstroms durch die Flussfläche, also durch

$$\bar{v} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\pi R^2}. \quad (16)$$

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Bestimmung der Viskosität nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter

Bei dem Versuch wird die Fallzeit t der Kugel zwischen zwei im Abstand Δs angebrachten Markierungen gemessen. Die Messungen sind entweder mit steigendem oder mit fallendem Kugelradius durchzuführen.

Notieren Sie sich die Temperaturen des Polyethylenglykol während der Messung mit den kleinsten Kugeln.

Legen Sie die Fallstrecke der Kugeln fest und notieren Sie diesen Wert. Der Abstand der ersten Messmarke von der Flüssigkeitsoberfläche ist so zu wählen, dass sich die Kugel beim Durchlaufen der ersten Messmarke, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Lassen Sie von jedem Durchmesser 5 Kugeln die Fallstrecke möglichst in der Rohrachse durchfallen. Zur Bestimmung der Fallzeit dienen die zahlreich beigegebenen Handstoppuhren. Bei den kleinsten Durchmessern empfiehlt sich eine Simultanmessung von mehreren Kugeln durchzuführen. Damit sich die Messzeiten bei den kleinen Kugeln nicht über einen zu langen Zeitraum erstrecken, können Sie hier eine kürzere Fallstrecke verwenden. Der Innendurchmesser des Kugelfallgefäßes ist am Viskosimeter angegeben. Vergessen Sie nicht diesen Wert in Ihr Protokoll aufzunehmen.

Sie müssen bei der Durchführung des Experiments unbedingt darauf achten, dass an den Kugeln keine Luftbläschen haften.

Sortieren Sie daher vor dem Einbringen der Kugeln in das Fallgefäß zunächst einige Kugeln des jeweiligen Durchmessers in ein Becherglas und geben Sie etwas Polyethylenglykol mit hinein. Schwenken Sie das Becherglas vorsichtig um, so dass die Kugeln vollständig benetzt sind und keinerlei Luftbläschen mehr daran zu erkennen sind. Mit der Pinzette werden die mit der Flüssigkeit benetzten Kugeln in das Fallgefäß gegeben.

Aufgabe 2: Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille mit einem Kapillarviskosimeter

Stellen Sie unter den Ausfluss der Kapillare ein Becherglas und öffnen Sie den Hahn, indem Sie ihn parallel zur Kapillare drehen. Warten Sie nach dem Öffnen so lange, bis sich die Strömungsverhältnisse stabilisiert haben und eine gleichmäßige Tropfenfolge zu beobachten ist. Sobald dies der Fall ist, stellen Sie einen leeren Messzylinder unter den Ausfluss, starten die Stoppuhr und

notieren die Anfangshöhe h_A der Flüssigkeitssäule im Fallgefäß. Führen Sie dies am besten gemeinsam mit Ihrem Partner durch, indem einer die Höhe des Flüssigkeitspiegels im Fallgefäß abliest und der andere gleichzeitig den Messzylinder unterstellt und die Stoppuhr startet. Messen Sie die Ausströmzeit von ca. 20 cm³ bis 25 cm³ der Flüssigkeit. Nachdem diese Mengen ausgeströmt sind, schließen Sie den Hahn und messen erneut die Höhe des Flüssigkeitsspiegels h_E . Notieren Sie ebenfalls die Raumtemperatur.

Achtung: Da eine Wiederholung der Messung relativ lange dauert, bei einer einmaligen Messung aber die Möglichkeit eines Irrtums besteht, müssen zur Kontrolle Zwischenwerte des Volumens aufgenommen werden. Notieren Sie daher bei laufender Stoppuhr die Ausflusszeit bei 5, 10, 15, 20, 25 cm³.

Achten Sie unbedingt nach Abschluss dieser Messung, dass der Hahn der Kapillare geschlossen ist.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Nach Gleichung (9) ergibt sich für die theoretische Sinkgeschwindigkeit v_{lam} einer Kugel unter dem Einfluss Stokes'scher Reibung bei laminarer Strömung:

$$v_{lam} = \frac{2}{9} g \frac{\rho_k - \rho_f}{\eta} r^2. \quad (17)$$

Tragen Sie den Mittelwert der von Ihnen gemessenen Sinkgeschwindigkeiten gegen das Quadrat des Kugelradius in ein Diagramm ein. Die Grenzen der Gültigkeit des Stoke'schen Gesetzes können Sie so direkt aus dem Diagramm ablesen.

Da das Stokes'sche Gesetz nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gilt, treten systematische Fehler auf, wenn mit einem Fallrohr eines bestimmten Durchmessers gemessen wird. Die Gleichungen (6) und (7) zeigen die Ladenburg-Korrektur im Stokes'schen Gesetz. Überlegen Sie, ab welchem Kugeldurchmesser eine Korrektur der von Ihnen gemessenen Fallzeiten sinnvoll ist. Berücksichtigen Sie dabei auch die Messgenauigkeit der Fallzeiten. Tragen Sie ggf. die korrigierten Fallgeschwindigkeiten in dasselbe Diagramm ein.

Legen Sie eine Gerade durch den *linearen* Bereich Ihrer eingetragenen (korrigierten) Messwerte, die durch den Ursprung verläuft, und bestimmen Sie die Viskosität aus dem Gradienten. Berechnen Sie mit diesem Viskositätswert für jeden Kugelradius nach Gleichung (17) den theoretischen Wert v_{lam} , d.h. die

Werte, die auf der extrapolierten Anfangsgeraden liegen.

Zusätzlich soll für jeden Kugelradius (Durchmesser d) die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho_f v d}{\eta} \quad (18)$$

berechnet werden. Dabei beschreibt v die für den jeweiligen Kugelradius gemessene Sinkgeschwindigkeit.

Tragen Sie das Verhältnis v/v_{lam} gegen $\log Re$ auf (logarithmische Achsenteilung beachten) und bestimmen Sie den Punkt, an dem ein Knick in der Kurve auftritt, während das Verhältnis zugleich unter den Wert 1 geht. An diesem Punkt verliert das Stokessche Gesetz seine Gültigkeit und die laminare Strömung geht in eine turbulente Strömung über. Schätzen Sie den numerischen Wert für die kritische Reynolds-Zahl.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Viskosität für Polyethylenglykol nach Hagen-Poiseuille. Beachten Sie, dass der Druck in der Kapillare durch die Höhe der Flüssigkeitssäule bestimmt wird. Während des Abfließens der Flüssigkeit ändert sich die Flüssigkeitshöhe und damit die Druckdifferenz in der Kapillare. Für die Berechnung der Druckdifferenz ist daher der Mittelwert von Anfangs- und Endhöhe h_A, h_E zu benutzen.

Berechnen Sie die Reynoldszahl der Kapillare (die charakteristische Länge ist hierbei der Kapillardurchmesser und die mittlere Geschwindigkeit ist gemäß (16) zu berechnen!) und überzeugen Sie sich, dass laminare Strömung vorlag.

Vergleichen Sie die gemessenen Viskositäten nach Hagen-Poiseuille mit den Werten nach Stokes (Schätzen Sie die Fehlergrenzen ab!). Achten Sie darauf, dass die Temperaturen u.U. verschieden sind.

Abbildung zur Bestimmung der Dichte von Polyethylenglykol in Abhängigkeit von der Flüssigkeitstemperatur:

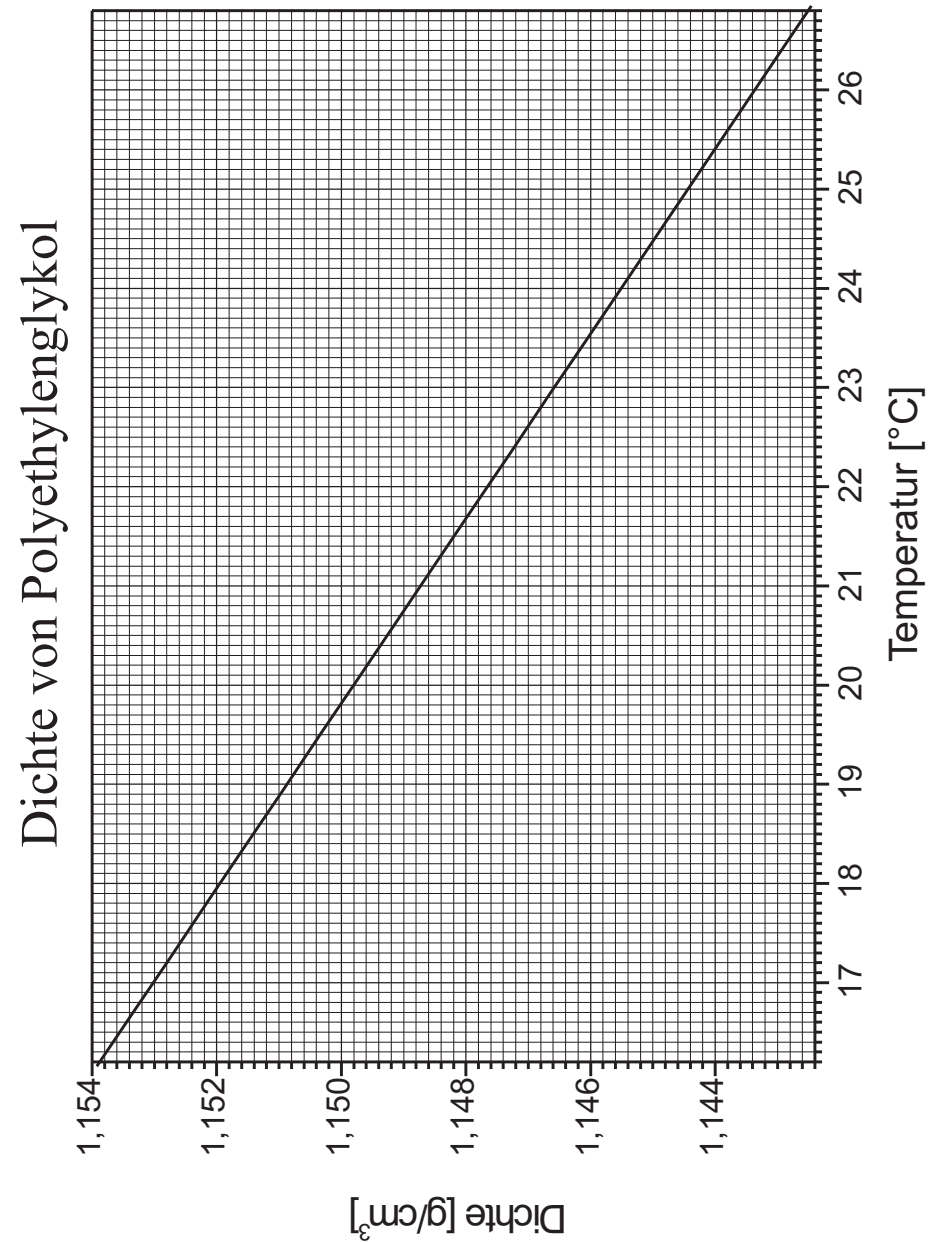
VIII Anhang

Dichte und Durchmesser der Kugeln:

Fehler Durchmesser:	$d \pm 25\mu m$
Dichte der Kugeln	$(1.385 \pm 0.015) \text{ g/cm}^3$

Heidelberger Standardwert für die Erdbeschleunigung:

$$g = (9.80984 \pm 0.00002) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Versuch 213 Kreisel

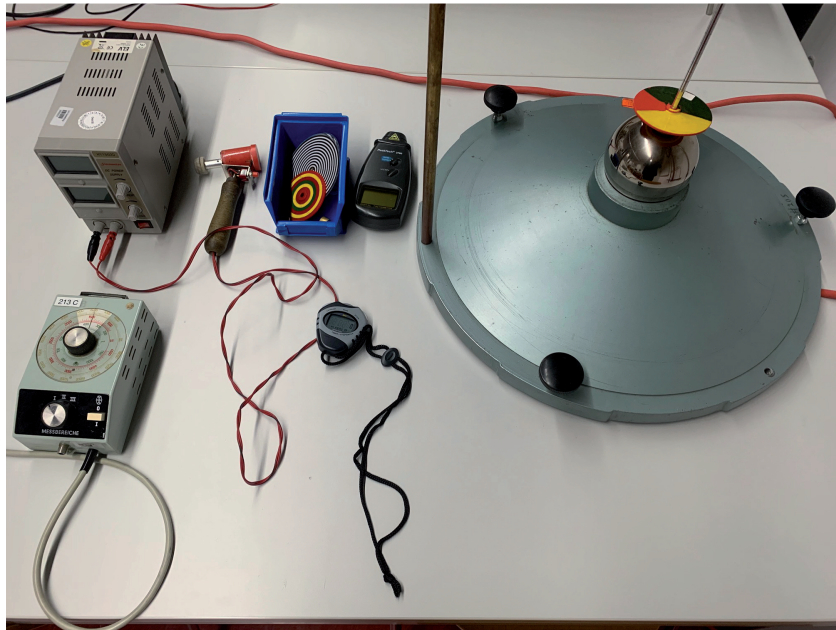


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Stahlkugel mit Aluminiumstab ($m = 4,164 \text{ kg}$ incl. Stab, Kugelradius $r=5,08 \text{ cm}$) als Kreisel gelagert in einer Luftkissenpfanne
- 2 Gewichte ($r_a=0,725 \text{ cm}$, $r_i=0,325 \text{ cm}$, $h=1,1 \text{ cm}$, $m=9,85 \text{ g}$)
- Farbscheibe, Scheibe mit konzentrischen Ringen
- Stroboskop
- Stoppuhr
- Motor mit Netzgerät

- Gyroskop zur Demonstration der Kreiseigenschaften

II Literatur

- Bergmann-Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1*.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- Pohl, *Einführung in die Physik, Band 1: Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Springer Verlag.
- Für Interessierende der theoretischen Physik sind die Bücher von Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Verlag Wiley-VCH und von Herbert Goldstein, *Klassische Mechanik*, Akademische Verl.-Ges., zu empfehlen.
- Homepage des Praktikums <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Mechanik des starren Körpers, Drehmoment und Drehimpuls - insbesondere deren Vektoreigenschaften, Trägheitsmoment und Trägheitstensor, Hauptträgheitsmomente, kräftefreier und schwerer Kreisel, Präzession und Nutation. Schauen Sie sich auch nochmals den Versuch Trägheitsmoment an, den Sie im Praktikum 1 durchgeführt haben.

Verständnisfragen:

1. In welcher Beziehung stehen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines um eine Achse rotierenden Körpers? In welchem Koordinatensystem nimmt der Trägheitstensor Diagonalgestalt an?
2. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kugel; wo liegen ihre Hauptträgheitsachsen? Beschreiben Sie die Lagen der Hauptträgheitsmomente bei einem rotationssymmetrischen Körper.
3. Warum fällt ein Kreisel nicht um?
4. Was ist die Ursache für das Auftreten von Präzession und Nutation?

IV Aufgaben

1. Untersuchen Sie in einem Vorversuch qualitativ das Verhalten eines Kreisels.
2. Messen Sie die Reibungsverluste des Kreisels und bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und Halbwertszeit.
3. Bestimmen Sie aus der Präzessionsfrequenz eines schweren Kreisels das Trägheitsmoment um die Figurenachse.
4. Aus Größe und Richtung der Umlaufschwindigkeit der momentanen Drehachse um die Figurenachse soll das Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse bestimmt werden.
5. Das gleiche Trägheitsmoment ist zusätzlich aus der Nutationsfrequenz zu bestimmen.

V Motivation

Seit unserer Geburt sind wir zu jeder Zeit der Schwerkraft ausgesetzt. Wir empfinden es daher als selbstverständlich, dass ein Gegenstand, der nicht im Schwerpunkt gelagert oder durch irgendwelche Aufhängungen fixiert wird, stets nach „unten“ fällt oder umkippt. Umso faszinierender ist es daher, dass sich ein rotierender Körper unter Umständen völlig anders verhalten kann. Wird ein schnell rotierender Kreisel angestoßen und damit der Schwerpunkt außerhalb der Symmetrieachse verlagert, fällt er nicht um, sondern weicht senkrecht zur Richtung der Schwerkraft aus. Dadurch erhält er einen zusätzlichen Drehimpuls. Der Kreisel rotiert dann zum einen um seine eigene Achse und zum anderen führt er gleichzeitig eine Drehbewegung um die Richtung der Erdanziehung aus. Diese Bewegung wird als Präzession bezeichnet. Erst wenn die Rotation zu gering wird, wird der Kreisel instabil und kippt.

Kreiselphänomene finden sich in vielen Bereichen. Wir leben sogar auf einem Kreisel, der zudem eine Präzessionsbewegung durchführt! Die Erde ist keine ideale Kugel, sondern infolge der Rotation abgeplattet. Ihr Durchmesser ist am Äquator rund 43 km größer als der Poldurchmesser. Zudem ist die Erde um etwa $66,5^\circ$ gegen die Erdbahnebene geneigt. Aufgrund dieser Schiefstellung üben Sonne und Mond ein Drehmoment auf die Erde aus, welches versucht, die Erdachse

aufzurichten und damit die Ekliptikschiefe zu verkleinern. Diesem Drehmoment weicht die Erde in einer rechtwinkligen Bewegung aus und präzessiert so um die Ekliptikebene. Die Zeit, die die Erdachse für einen vollen Präzessionsumlauf benötigt, beträgt ca. 25800 Jahre. Mit der Präzessionsbewegung ist eine stetige Wanderung des Himmelnordpols verbunden. Zur Zeit zeigt die Erdachse auf den Polarstern, der somit die Nordrichtung anzeigt. In etwa 12000 Jahre wird der Stern Vega diese Aufgabe übernehmen.



*Innenansicht eines
Kreiselkompass*

Technische Anwendung findet der Kreisel (Gyroskop) im Bereich der Navigation als Kreiselkompass, als künstlicher Horizont (Kreiselhorizont) und als Autopilot bei Flugzeugen. Bei letzterem wird mit dem Kreisel die Neigung der Tragflächen und mit einem zweiten Kreisel der Winkel zwischen Heck und dem Cockpit des Flugzeuges bestimmt. Zusammen mit einem Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsmesser kann so der Kurs der Maschine automatisch eingestellt werden. Mechanische Kreiselssysteme finden sich auch im Hubble-Teleskop. Sie dienen der Kursstabilisierung und helfen dem Teleskop die Balance zu halten und in der Bahn zu bleiben. Die Lebensdauer eines Satelliten wird oft durch die Lebensdauer seiner Gyroskope begrenzt. Fallen sie aus, so sind Richtung und Ausmaß von Lageänderungen nicht mehr feststellbar.

Beim Hubble-Weltraumteleskop war dies bereits schon zweimal der Fall. Zum Glück hat man das Teleskop mit insgesamt drei Ersatzkreiseln ausgestattet, so dass die Ausfälle nur von kurzer Dauer waren.

Auch in der Physik treten in vielen Bereichen Kreiselphänomene auf. So lassen sich die Eigenschaften eines mechanischen Kreisels zusammen mit quantenmechanischen Überlegungen auf Moleküle übertragen. Damit können z.B. die Rotationsspektren von Molekülen interpretiert werden.

Eine weitere Kreiselerscheinung ist die Larmor-Präzession. Aus klassischer Sicht bewegt sich im Atom ein Elektron um den Atomkern. Mit der Elektronenbewegung ist ein Kreisstrom verbunden, das ein magnetisches Dipolmoment induziert, welches senkrecht zur Ebene der Elektronenbewegung orientiert ist. Befindet sich nun solch ein Atom in einem äußeren $\vec{B}$ -Feld, so strebt das magnetische Moment eine Ausrichtung parallel zum Magnetfeld an. Somit kommt es zu einer

Einstein wird überprüft

Quarzkugeln in Raum und Zeit

Los Angeles (AP). Zwei grundlegende Annahmen von Albert Einstein sollen jetzt endlich überprüft werden. Am 17. April soll die von der Nasa finanzierte und von der Universität Stanford entwickelte Sonde Gravity Probe 2 (Schwerkraftsonde 2) vom US-Luftwaffenstützpunkt Vandenberg ins All starten. Die Sonde soll zwei Theorien Einsteins überprüfen: über Raum und Zeit und wie die Erde beide beeinflusst. Kern des Experiments sind vier Gyroskope – absolut runde, sich drehende Quarzkugeln von der Größe von Tischtennisbällen. Wenn sie einmal im Weltraum sind und sich drehen, sollten die Quarze ihre Richtung ändern – wenn Einstein Recht hatte.

Abbildung 2: Bei dem Experiment sollen die Zusammenhänge von Raum, Zeit und Schwerkraft erforscht werden. Nach Einstein wird die Raumzeit durch einen schweren Körper „gekrümmt“. Auch eine rotierende Masse wie unsere Erde sollte das Raumzeitgewebe quasi mit sich reißen. Wenn Einsteins Theorie richtig ist, muss sich diese Raumverwirbelung auf die Rotation von Kreisel auswirken, die sich in einem Satelliten um die Erde bewegen. (Quelle: Sonntag Aktuell, 4.4.04)

Präzession um die Feldrichtung.

Das mechanische Kreisel auch heute noch in der Forschung eingesetzt werden, dokumentiert der folgende Zeitungsartikel.

VI Grundlagen

VI.1 Der kräftefreie, symmetrische Kreisel

Jeder starrer Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, stellt einen Kreisel dar. Wird der Kreisel im Schwerpunkt gelagert, so wird er als kräftefreier Kreisel

bezeichnet. Bei dieser Aufhängung übt die Gewichtskraft kein äußeres Drehmoment $\vec{M}$ auf den Kreisel aus, so dass Betrag und Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ zeitlich konstant bleiben. Sind zudem zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß, so wird der Kreisel als symmetrisch bezeichnet.

Zur Beschreibung der Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels wollen wir im Folgenden drei charakteristische Achsen heranziehen. Die Symmetrieachse des Kreisels wird als Figurenachse bezeichnet und durch die Größe $\vec{F}$ beschrieben. Daneben ist noch die raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L}$ und die Richtung der Drehachse $\vec{\omega}$ zur Beschreibung der Kreiselbewegung wichtig.

Wird der Kreisel an der Figurenachse festgehalten und derart in Rotation versetzt, dass sich beim Andrehen die Richtung der Figurenachse nicht ändert, so fallen alle drei Achsen zusammen und sind zeitlich und räumlich konstant (Abbildung 3 links). Nur für diesen Spezialfall zeigten die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ in die gleiche Richtung und sind über das Hauptträgheitsmoment der Figurenachse miteinander verknüpft.

Die **allgemeine** Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels ist weitaus komplizierter. Experimentell kann man den allgemeinen Bewegungszustand dadurch einstellen, indem man dem um seine Figurenachse rotierenden Kreisel einen leichten Schlag erteilt. Dies führt dazu, dass die charakteristischen Kreiselachsen nicht mehr wie zuvor parallel ausgerichtet sind, sondern unterschiedliche Orientierungen einnehmen. Der Kreisel vollführt dann eine recht komplizierte Taumelbewegung, die als **Nutation**¹ bezeichnet wird (Abbildung 3 Mitte). Der Drehimpuls ist auch bei dieser Kreiselbewegung weiterhin räumlich und zeitlich konstant. Allerdings rotiert die Figurenachse auf einem Kegelmantel (Nutationskegel) mit der Nutationsfrequenz $\vec{\omega}_N$ um die raumfeste Drehimpulsachse und führt dabei gleichzeitig eine Eigenrotation $\vec{\omega}_F$ durch. Die resultierende Drehachse ist daher nicht konstant sondern eine Überlagerung der Eigenrotation um die Figurenachse und der Nutationsbewegung der Figurenachse um die Richtung des Drehimpulses. Daher wollen wir im Folgenden von der **momentanen Drehrichtung** $\vec{\omega}$ des Kreisels sprechen, die die Rotation des Kreisels zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt.

Die Ausrichtung der einzelnen Kreiselachsen lässt sich leichter verstehen, wenn wir die rechte Skizze in Abbildung 3 betrachten. Die Figurenachse stellt hier die Symmetrieachse eines **gedachten Kegels** dar. Dieser körperfeste, sogenannte Körperkegel, rollt auf dem Mantel eines weiteren, raumfesten Kegels (Raumke-

¹lat. nutare: nicken, schwanken

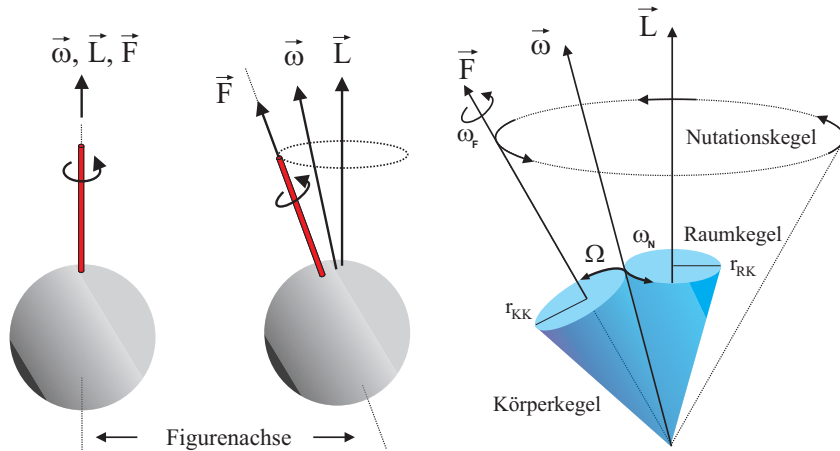


Abbildung 3: Bewegungen des kräftefreien symmetrischen Kreisel. Links: Figurenachse, momentane Drehrichtung und Drehimpuls sind parallel ausgerichtet und zeitlich konstant. Mitte: Nutationsbewegung. Alle drei charakteristische Achsen haben unterschiedliche Richtungen und nur der Drehimpuls ist zeitlich konstant. Rechts: Orientierung und Bewegung der Achsen im Nutationsfall für einen Kreisel mit $I_z < I_x = I_y$, wobei I_z das Trägheitsmoment um die Figurenachse darstellt. Die Bewegung kann man sich durch das Abrollen eines körperfesten Kegel auf einem raumfesten Kegel veranschaulichen.

gel), mit dem Drehimpuls als Symmetrieachse, ab. Die Lage der momentanen Drehrichtung ergibt sich in dieser Darstellung aus der Berührlinie der beiden Kegelmäntel.

Aus Abbildung 3 rechts folgt unmittelbar, dass bei der Nutation die Figurenachse, der Drehimpuls und die momentane Winkelgeschwindigkeit immer in einer Ebene liegen. Somit kann die momentane Winkelgeschwindigkeit in einen Nutationsanteil $\vec{\omega}_N$ und in einen Anteil der Eigenrotation der Figurenachse $\vec{\omega}_F$ zerlegt werden (Abbildung 4 links):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F. \quad (1)$$

Zerlegen wir zusätzlich Drehimpuls und momentane Winkelgeschwindigkeit in x- und z- Komponenten, so ergibt sich aus

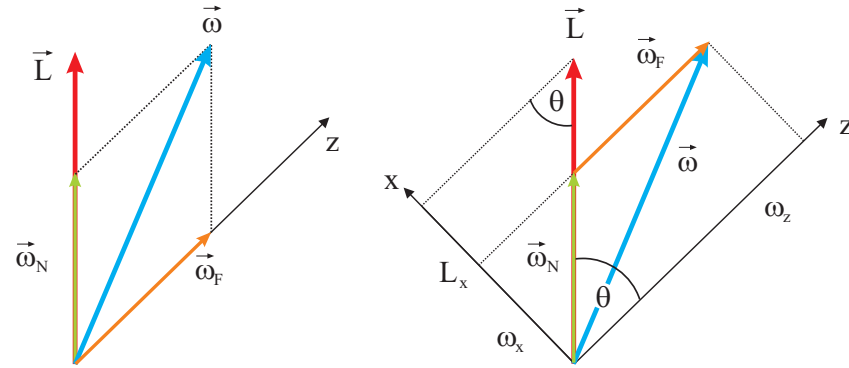


Abbildung 4: Geometrie der Nutationsbewegung. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass es körperfest ist und seine Achsen mit den Hauptachsen des Kreisel zusammenfallen. Die z-Richtung ist parallel zur Figurenachse orientiert.

$$\omega_x = \omega_N \sin \theta \quad (2)$$

und mit Hilfe der Beziehungen $L_x = L \sin \theta$ und $L_x = I_x \omega_x$ für den Betrag der Nutationsfrequenz:

$$\omega_N = \frac{L}{I_x} \quad (3)$$

Ist die Nutationsbewegung nur schwach ausgeprägt, d.h. bei kleinem Winkel θ , so kann der Betrag des Drehimpulses angenähert werden durch

$$L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F. \quad (4)$$

Hiermit ergibt sich für die Nutationsfrequenz

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F. \quad (5)$$

Die Nutationsbewegung der Figurenachse lässt sich im Experiment leicht beobachten (Abbildung 5). Schwieriger gestaltet sich die Visualisierung der momentanen Drehachse. Um die momentane Drehachse zu beobachten, müssen wir einen Trick anwenden. Dazu wird auf die Figurenachse eine Scheibe mit unterschiedlich farbigen Segmenten gesteckt. Für einen Beobachter, der auf die mit

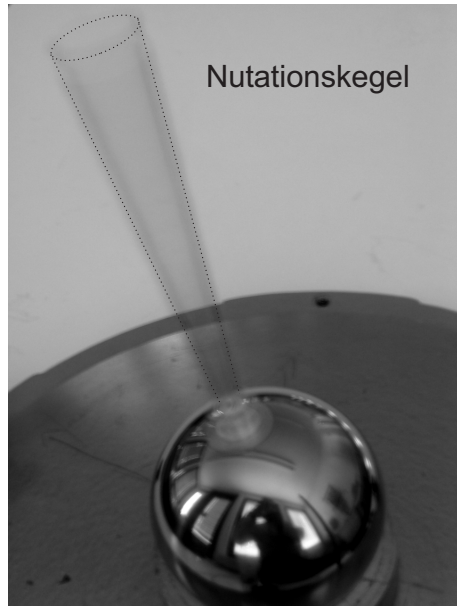


Abbildung 5: Nutationsbewegung der Figurenachse: Die Figurenachse läuft auf einem Kegelmantel um die raumfeste Drehimpulsachse.

dem Kreisel rotierende Scheibe blickt, verschwimmen aufgrund der Trägheit des Auges die Farben, so dass er nur die Mischfarbe der einzelnen Farbsegmente wahrnimmt. Nur in dem Punkt, in dem die momentane Drehachse die Farbscheibe durchstößt, steht die Farbscheibe „kurzfristig still“ und der Beobachter erkennt die „unverfälschte“ Farbe eines Segments. Dieser Punkt kennzeichnet somit die Orientierung der momentanen Drehrichtung.

Aufgrund der Wanderung der momentanen Drehachse auf dem Körperkegel um die Figurenachse, sieht der Beobachter am Ort der momentanen Drehachse, wie die einzelnen Farben der Sektorenscheibe durchlaufen werden (Abbildung 6). Der Farbwechsel erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit Ω (Abbildung 3), dessen Betrag sich aus dem Verhältnis der Radien von Körperkegel (r_{KK}) und Raumkegel (r_{RK}) sowie der Nutationsfrequenz ω_N bestimmen lässt:

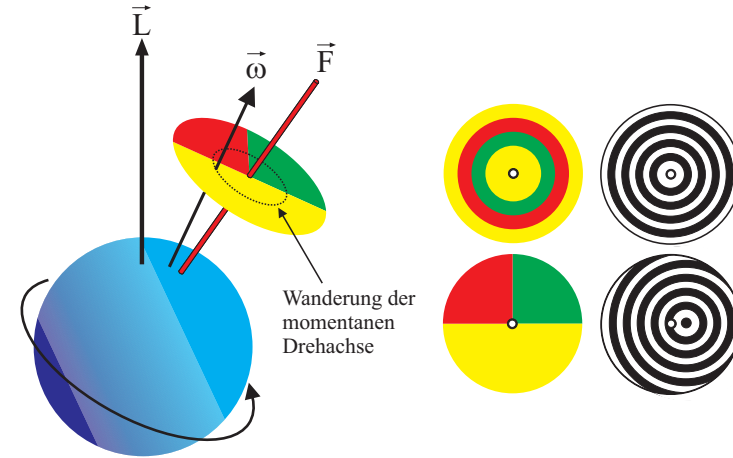


Abbildung 6: Visualisierung der momentanen Drehachse mit Hilfe einer farbigen Sektorenscheibe. Neben der Farbscheibe stehen noch anders gemusterte Scheiben im Praktikumsversuch zur Verfügung.

$$\frac{\Omega}{\omega_N} = \frac{r_{RK}}{r_{KK}}. \quad (6)$$

Da die Berechnung von Ω algebraisch recht aufwendig ist, soll hier direkt das Ergebnis angegeben werden. Eine analytische Berechnung von Ω wird im Anhang durchgeführt:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_F. \quad (7)$$

Für eine spätere Anwendung ist noch folgende Umformung nützlich:

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\omega_F/\Omega - 1}. \quad (8)$$

VI.2 Der schwere, symmetrische Kreisel

Beim schweren Kreisel liegt der Unterstützungspunkt nicht mehr im Schwerpunkt, aber im Fall des symmetrischen Kreisels ($I_x = I_y$) immer noch auf der

Figurenachse. Im Versuch wird dazu auf den Aluminiumstab eine Zusatzmasse m montiert, wodurch der Schwerpunkt entlang der Figurenachse verschoben wird. Wir wollen hier nur den Fall analytisch untersuchen, bei dem die Orientierungen von $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ zusammenfallen, d.h. es soll keine Nutationsbewegungen vorhanden sein.

Aufgrund der Gewichtskraft wirkt auf den Kreisel ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}, \quad (9)$$

wobei $\vec{l}$ den Vektor darstellt, der vom Unterstützungspunkt des Kreisel zur Zusatzmasse auf der Figurenachse zeigt (Abbildung 7).

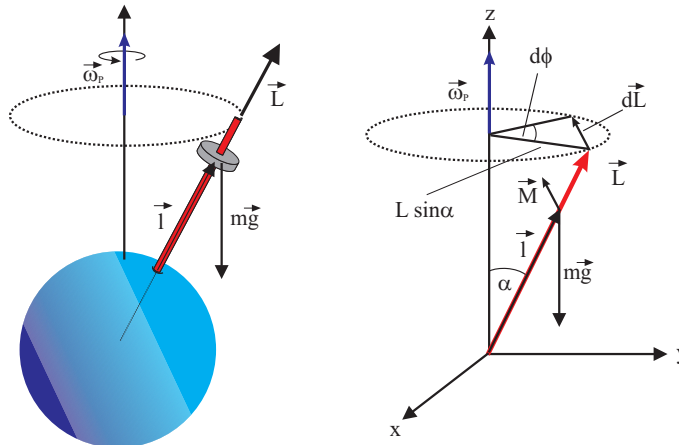


Abbildung 7: Links: Durch eine Zusatzmasse an der Figurenachse wird aus dem kräftefreien Kreisel ein schwerer Kreisel. Die Gewichtskraft übt ein äußeres Drehmoment $\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}$ aus, so dass der Kreisel mit der Frequenz $\vec{\omega}_P$ um die z-Achse präzidiert. Rechts: Geometrie zur Bestimmung der Präzessionsfrequenz.

Dieses Drehmoment bewirkt, dass sich der Drehimpuls zeitlich ändert. Wegen $\vec{M} \perp \vec{L}$ zeigt die Änderung des Drehimpulses in Richtung des Drehmoments, d.h. $d\vec{L} \parallel \vec{M}$ und damit $d\vec{L} \perp \vec{L}$, woraus unmittelbar folgt, dass der Betrag des Drehimpulses zeitlich konstant bleibt. Das äußere Drehmoment bewirkt demnach nur eine Änderung der Drehimpulsrichtung: **Der Drehimpulsvektor läuft auf einem Kegelmantel um die z-Richtung und versucht sozusagen**

der Gewichtskraft seitlich auszuweichen. Man bezeichnet diese Kreiselbewegung als **Präzession**². Die Präzessionsfrequenz $\vec{\omega}_P$, d.h. die Frequenz mit der der Drehimpuls um die z-Richtung rotiert, kann nach Abbildung 7 aus der zeitlichen Änderung des Präzessionwinkels φ abgeleitet werden:

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L \sin \alpha \, dt}. \quad (10)$$

Mit $L = I_z \omega_F$ erhalten wir

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \quad (11)$$

oder allgemein

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L}. \quad (12)$$

Die Präzessionsfrequenz ist demnach unabhängig von der räumlichen Orientierung des Kreisels und hängt nur vom Drehimpuls und vom Drehmoment ab.

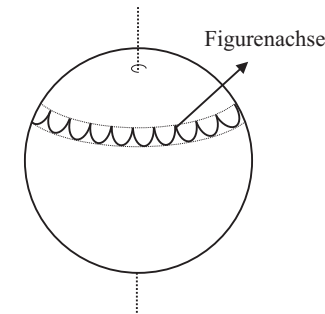


Abbildung 8: Bewegung der Figurenachse bei einer Überlagerung von Präzession und Nutation.

Bisher haben wir nur den Fall untersucht, bei dem der schwere Kreisel keine Nutation vollführt. Im Fall einer zusätzlichen Nutationsbewegung, weist der Kreisel eine komplexere Bewegung auf. Bei dieser Überlagerung von Präzession und Nutation durchläuft die Spitze der Figurenachse eine „girlandenförmige“ Bahn, deren genaue Form vom Verhältnis der Nutationsfrequenz zur Präzessionsfrequenz

²lat. praecedere: das Vorangehen

abhängt (Abbildung 8). Diese Bewegung ist im Praktikumsversuch leicht zu beobachten, soll hier aber quantitativ nicht weiter untersucht werden.

VI.3 Zusammenfassung

- Ein starrer Körper, der um einen festen Punkt rotiert, stellt einen Kreisel dar. Sind genau zwei Hauptträgheitsmomente identisch, so wird der Kreisel als symmetrisch bezeichnet. Wird der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt so heißt der Kreisel kräftefrei. In diesem Fall wirken keine äußeren Drehmomente und der Drehimpuls ist räumlich und zeitlich konstant.
- Die allgemeine Bewegung eines kräftefreien Kreisels stellt eine Nutationsbewegung dar. Dabei führt die Figurenachse eine Eigendrehung mit ω_F durch und rotiert mit der Nutationsfrequenz ω_N gleichzeitig um die raumfeste Drehimpulsachse. Die Winkelgeschwindigkeit ist nicht konstant sondern bewegt sich mit Ω um die Figurenachse. Diese Bewegung kann mit Hilfe einer farbigen Sektorscheibe beobachtet werden. Die Bewegungen der charakteristischen Kreiselachsen kann man sich durch ein Abrollen eines körperfesten Kegels auf einen raumfesten Kegels veranschaulichen.
- Liegt der Auflagepunkt des Kreisels nicht im Schwerpunkt, so heißt der Kreisel schwerer Kreisel. In diesem Fall übt die Gewichtskraft ein Drehmoment aus, das zu einer Präzession führt. Dabei bewegt sich der Drehimpuls mit der Frequenz ω_P auf einem Kegelmantel um die Richtung der Gewichtskraft.

VI.4 Bedingung des Versuchsaufbaus

Beschreibung des Luftkissenkreisels

Als Kreisel dient eine luftkissengelagerte Stahlkugel, in die ein Aluminiumstab eingeschraubt ist und etwa 17 cm über die Kugeloberfläche hinausragt. Die Kugel ist nicht gehärtet und kann durch unsachgemäße Behandlung beschädigt werden (z.B. durch Fallenlassen). **Der Kreisel darf beim Herausnehmen niemals am Stab festgehalten werden. Verbiegt sich die Aluminiumstange auch nur geringfügig, ist der Versuch nicht mehr durchführbar!**

Durch den Stab wird die Figurenachse und die I_z -Achse festgelegt. Auf ihm werden während des Versuchs Gewichtsstücke und Farbscheiben angebracht. Der Stab ist mit Rillen im Abstand von 1 cm versehen. Im Abstand von 10,

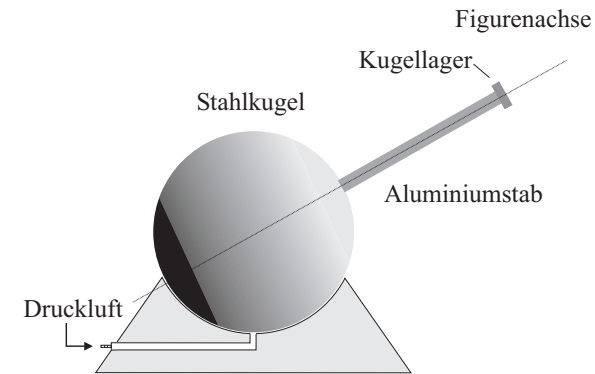


Abbildung 9: Aufbau des Luftkissenkreisels

15 und 20 cm von der Kugelmitte sind zusätzlich noch Doppelrillen markiert. Am Stabende ist ein Kugellager befestigt, an dem der Stab zur Änderung seiner Orientierung angefasst werden kann, ohne dabei die Frequenz Eigenrotation merklich zu verändern. Trotz des eingebauten Stabs ist die Stabseite der Kugel leichter. Einen kräftefreien Kreisel kann man daher nur erhalten, wenn man ein Zusatzgewicht an dem Stab befestigt. Dazu dient unter anderem die Farbscheibe, die auch für stroboskopische Messungen benutzt wird.

Justierung des Kreisels

Schieben Sie die Farbscheibe auf den Stab bis nahe an die Kugel und lassen Sie den Kreisel mit etwa 1-2 Hz rotieren. Verschieben Sie die Figurenachse mit Hilfe des Kugellagers in horizontaler Lage und lassen Sie dann die Achse vorsichtig los. Falls der Kreisel präzessiert, müssen Sie die Scheibe je nach Richtung der Präzession entlang des Stabs verschieben. Ist der Kreisel schließlich kräftefrei, so schieben Sie eine passende Zahl von Unterlegscheiben zwischen Scheibe und Kreisel. Damit ist gewährleistet, dass Sie bei einem Wechsel der Scheibe, den kräftefreien Zustand leichter wieder einstellen können.

Beschleunigen des Kreisels

Für kleine Geschwindigkeiten genügt es, die Kugel dadurch zu beschleunigen, dass man den senkrechten Stab zwischen den beiden gegeneinander gleitenden Handflächen in Drehung versetzt. Für höhere Geschwindigkeiten ist es bequemer, den Motor zu benützen: Halten Sie dabei den Kreisel am Kugellager fest

und versetzen Sie den Kreisel durch Andrücken des Filzrad am Kugelumfang in Rotation.

Bedienung des Stroboskops

Die Bestimmung der charakteristischen Kreiselfrequenzen werden mit einem Stroboskop durchgeführt. Das Stroboskop³ sendet mit einstellbarer Frequenz, Lichtpulse von etwa $10\ \mu\text{s}$ Dauer aus. Bewegt sich die auf den Kreisel montierte Farbscheibe mit der gleichen Frequenz wie die Blitzfrequenz des Stroboskops, so wird diese immer in der gleichen Lage beleuchtet. Für den Beobachter scheint die Scheibe dann still zu stehen. Allerdings tritt diese Erscheinung auch dann auf, wenn die Scheibe mit der n -fachen Blitzfrequenz rotiert. Ist dagegen die Blitzfrequenz beispielsweise doppelt so hoch wie die des Kreisels, so beobachtet man zwei gleichfarbige Sektoren. Durch gezieltes Variieren um die n -fache Frequenz müssen Sie die richtige Frequenz herausfinden.

Mit dem kleinen Motor kann der Kreisel auf maximal $800\ \text{min}^{-1}$ beschleunigt werden. Diesen Bereich können sie komplett in der Stellung I des Stroboskops erfassen. Sie brauchen daher den Messbereich des Stroboskops nicht umzuschalten. Da die Sektorenscheibe natürlich auch vom Raumlicht beleuchtet wird, erscheinen die Farben immer etwas vermischt, nur die Trennlinien der Sektoren bleiben bei der richtigen Frequenz stehen.

VII Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Vorversuch Der Vorversuch soll Sie mit dem Kreisel vertraut machen und Ihnen die später genauer zu untersuchenden Erscheinungen qualitativ demonstrieren. Gerade für das visuelle, intuitive Verständnis der Nutation kann es hilfreich sein, sich bei einer relativ geringen Umdrehungszahl des Kreisels den Nutationsvorgang mit der Slow-Mo Funktion des Smartphones oder Tablets aufzunehmen und sich diese Aufnahme einmal genauer anzusehen.

Teilaufgabe a: Öffnen Sie das Druckluftventil an der Wand. Stecken Sie die Scheibe mit den Farbsektoren nach oben auf den Stab und balancieren Sie die Scheibe wie zuvor beschrieben aus, so dass der Kreisel kräftefrei wird. Beschleunigen Sie den Kreisel auf einige Umdrehungen pro Sekunde und beobachten Sie die Reaktion des Kreisels, wenn Sie den Metallring des Kugellagers am Stabende mit einem Finger zur Seite drücken. Erläutern Sie Ihre Beobachtungen.

³Am Stroboskop wird die Frequenz in Umdrehungen/Minute angezeigt.

Teilaufgabe b: Stellen Sie nun eine Nutationsbewegung ein, indem Sie dem Stab einen leichten, seitlichen Stoß erteilen. Beobachten Sie die Farbscheibe: In der mischfarbigen Fläche der sich drehenden Scheibe sollten Sie einen Punkt erkennen, an dem eine „reine, unvermischte“ Farbe erscheint. An dieser Stelle ändert sich die Farbe gemäß der Farbanordnung auf der Sektorenscheibe. Dieser Punkt stellt den um die Figurenachse wandernden Ort der momentanen Drehachse dar. Drehen Sie die Scheibe um, so dass die Seite mit den farbigen Ringen nach oben zeigt und wiederholen Sie den Versuch. Wenn Sie beim Anschlagen des Kreisels einen Nutationskegel erreichen, der gerade in einem der Farbringe verläuft, ändert sich die Farbe am Ort der momentanen Drehachse nicht, d.h. $\vec{\omega}$ läuft auf einem Kreis um die Figurenachse.

Teilaufgabe c: Legen Sie zusätzlich die Scheibe mit den konzentrischen Kreisen auf die Farbscheibe. Wählen Sie zunächst die Seite der Scheibe, bei der der Mittelpunkt der Kreise seitlich gegen die Aufnahmeachse verschoben ist. Liegt keine Nutation vor ($\vec{\omega} \parallel \vec{L}$) so erkennt man ein System konzentrischer, verwaschener Kreise um den Stab. D.h. der Mittelpunkt des Kreissystems zeigt die Drehachse an. Drehen Sie nun die Scheibe um und versetzen Sie den Kreisel in Drehung. Durch einen seitlichen Stoß werden wieder die drei Kreiselachsen getrennt. Warum markiert jetzt der Mittelpunkt der verwaschenen Kreise die Drehimpulsachse, die räumlich stehen bleibt? Bringen Sie ein Zusatzgewicht am Stab an und wiederholen Sie den Versuch. Die Drehimpulsachse sollte nun ein Präzessionsbewegung durchführen.

Teilaufgabe d: Ohne zusätzliche Farbscheibe richtet sich der Stab immer auf, d.h. der Schwerpunkt liegt unterhalb der Kugelmittle. Mit einem Zusatzgewicht am Ende des Stabes fällt dagegen der Kreisel um. In diesem Fall liegt der Schwerpunkt oberhalb der Kugelmittle. Versetzen Sie in beiden Fällen den Kreisel in Drehung und lassen Sie den Stab aus einer nichtvertikalen Stellung los. Beobachten Sie die Drehrichtung der Präzession. Ändern Sie die Drehrichtung des Kreisels und wiederholen Sie den Versuch.

Aufgabe 2: Messen der Dämpfung des Kreisels

Bringen Sie wieder die Sektorenscheibe an und überprüfen Sie ob der Kreisel kräftefrei ist. Montieren Sie zusätzlich beide Gewichte am Stabende. Beschleunigen Sie den Kreisel mit Hilfe des Motors bei senkrechter Achse auf ca. $600 - 700\ \text{min}^{-1}$. Messen Sie alle 2 Minuten die Drehfrequenz des Kreisels über einen Zeitraum von 12 Minuten. Notieren Sie die Drehfrequenz bei der jeweiligen Zeit

unter Berücksichtigung der Fehler.

Aufgabe 3: Messen der Präzession des Kreisels mit verschiedenen Zusatzmassen

Bei allen Messungen dieser Aufgabe wird der Kreisel zunächst bei senkrechter Achse auf die gewünschte Geschwindigkeit gebracht. Anschließend wird die Achse durch Angreifen am Kugellager schräg gestellt und kurz vor der gewählten Ablesemarke möglichst nutationsfrei losgelassen. Als Ablesemarke dient ein Messingstab in der Kreiselbasis.

Teilaufgabe a: Montieren Sie auf den Stab die Farbscheibe und vergewissern Sie sich, dass der Kreisel kräftefrei ist. Befestigen Sie im Abstand von 20 cm zur Kugelmittle ein Zusatzgewicht auf den Stab. Die Drehgeschwindigkeit sollten Sie auf ungefähr 500 min^{-1} einstellen. Lassen Sie den Stab bei gleicher Drehgeschwindigkeit des Kreisels möglichst nutationsfrei unter drei verschiedenen Winkeln des Stabs gegen die Vertikale los und bestimmen Sie jeweils die Zeit für einen Umlauf (Präzessionsdauer T_P).

Teilaufgabe b: Belasten Sie den kräftefreien Kreisel mit folgenden Zusatzmassen:

- Ein Gewichtsstück bei 15 cm.
- Ein Gewichtsstück bei 20 cm.
- Zwei Gewichtsstücke bei 15 cm.
- Zwei Gewichtsstücke bei 20 cm.

Messen Sie für jede Gewichtseinstellung bei jeweils vier verschiedene Frequenzen f im Bereich $250 \text{ min}^{-1} < f < 700 \text{ min}^{-1}$, mit der Stoppuhr die Präzessionsdauer T_P . Beginnen Sie bei jeder Masseneinstellung bei einer hohen Frequenz und bremsen Sie dann für die folgenden Messungen den Kreisel etwas ab. Notieren Sie für jede Messung die Frequenz ω_F und die Präzessionsdauer T_P .

Aufgabe 4: Messen der Nutationbewegung des Kreisels

Überprüfen Sie, ob der Kreisel kräftefrei ist. Versetzen Sie anschließend den Kreisel bei senkrechter Achse mit Hilfe des Motors in Rotation. Nach dem Anwerfen wird durch einen leichten seitlichen Stoß auf die Achse, der Kreisel in

Nutation versetzt. Überlegen Sie sich, wie Sie die Frequenzen der Figurenachse ω_F , der Nutation ω_N und der momentanen Drehachse Ω messen können.

Teilaufgabe a: Bestimmen Sie die Umlaufrichtung der momentanen Drehachse mit Hilfe der Farbscheibe. Beachten und notieren Sie die Reihenfolge der Farben.

Teilaufgabe b: Messen Sie mit der Stoppuhr für 10 Frequenzen im Bereich $300 \text{ min}^{-1} < \omega_F < 600 \text{ min}^{-1}$ jeweils die Zeit t für 10 Frequenz des Farbwechsels Ω der Sektorscheibe (Umläufe der momentanen Drehachse um die Figurenachse).

Teilaufgabe c: Versetzen Sie den kräftefreien Kreisel durch vorsichtiges Anschlagen an die Achse in Nutation. Damit die in Gleichung (5) gemachte Näherung gilt, sollte die Öffnung des Nutationskegels an der Spitze des Stabes nur 1-2 cm betragen. Bestimmen Sie 10 Wertepaare von ω_N und ω_F . Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Aufgrund der Luftreibung nehmen die Frequenzen ständig ab. Es ist daher wichtig, dass beide Frequenzen möglichst schnell hintereinander gemessen werden. Es empfiehlt sich daher, erst das Stroboskop auf eine Frequenz einzustellen, die etwas kleiner ist als die momentane Frequenz ω_F . Notieren Sie diese Frequenz und warten Sie bis der Kreisel diese Frequenz erreicht und bestimmen Sie dann rasch die zugehörige Frequenz ω_N .

VIII Auswertung

Aufgabe 1: Diskutieren Sie Ihre Beobachtungen des Vorversuchs.

Aufgabe 2: Tragen Sie die Messpunkte der Dämpfungsmessung auf halblogarithmisches Papier auf oder erzeugen Sie aus den Messwerten ein halblogarithmisches Diagramm (z.B. mit Python). Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Dämpfungskonstante und die Halbwertszeit.

Aufgabe 3: Vergleichen Sie die gemessenen Präzessionszeiten und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 4: Aufgrund der Dämpfung des Kreisels ändert sich während der Präzessionsbewegung die Drehfrequenz ω_F . Berechnen Sie für jede Messung mit Hilfe der Dämpfungsmessung aus Aufgabe 2 und dem Startwert von ω_F die Drehfrequenz am Ende der Präzessionsbewegung und bestimmen Sie daraus ein mittleres $\bar{\omega}_F$. Tragen Sie jeweils T_P als Funktion von $\bar{\omega}_F$ auf und bestimmen Sie für jedes äußere Drehmoment die Steigung s_i . Beachten Sie, dass die Geraden durch den Ursprung gehen. Berechnen Sie aus den Steigungswerten nach Gleichung (11) das Trägheitsmoment I_z . Das zusätzliche Trägheitsmoment der unterschiedlichen Gewichtsstücke kann vernachlässigt werden. Der Mittelwert der vier Messungen ist dann das gesuchte Trägheitsmoment I_z des Kreisels.

Aufgabe 5: Vergleichen Sie Ihre Beobachtungen der Nutation des Kreisels mit der Farbscheibe mit Gleichung (8) und den zu Abbildung 3 gegebenen Erläuterungen. Welches der beiden Trägheitsmomente I_x, I_z ist größer?

Aufgabe 6: Tragen Sie die gemessene Umlauffrequenz der momentanen Drehachse gegen ω_F auf und bestimmen Sie die Steigung der Geraden. Mit Gleichung (8) und dem in Aufgabe 5 bestimmten Trägheitsmoment I_z kann $\Delta I = I_x - I_z$ und damit I_x berechnet werden.

Aufgabe 7: Tragen Sie ω_N über ω_F in einem Diagramm auf und bestimmen Sie mit Gleichung (5) und dem bekannten I_z wieder I_x .

IX Anhang: Berechnung der Kreisfrequenz Ω mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen

Bei einem starren Körper, der um eine beliebige Achse durch seinen Schwerpunkt rotiert, fallen im Allgemeinen die Richtungen des Drehimpulses $\vec{L}'$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ nicht zusammen. In einem **raumfesten**, kartesischen Koordinatensystem⁴, gilt für den Drehimpuls:

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

bzw.

$$\vec{L}' = \hat{I}' \vec{\omega}', \quad (14)$$

wobei $\hat{I}'$ den Trägheitstensor darstellt. Wählen wir dagegen ein **körperfestes** Koordinatensystem, das parallel zu den Hauptachsen des Kreisels orientiert ist, so nimmt der Trägheitstensor eine sehr einfache Form an. In diesem Hauptachsensystem verschwinden alle Nebenmomente und der Trägheitstensor hat Diagonalfom:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}' \quad (16)$$

gilt aber nur in einem Inertialsystem, z.B. im raumfesten Koordinatensystem. Bei dem körperfestem System handelt es sich um ein rotierendes und damit um ein beschleunigtes Bezugssystem. Allerdings können die Größen des raumfesten Systems auf das mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierende Koordinatensystem durch

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (17)$$

⁴Größen, die mit einem Strich versehen sind, beziehen sich hier stets auf ein raumfestes Koordinatensystem.

transformiert werden. Im körperfesten Koordinatensystem lautet dann die Bewegungsgleichung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \quad (18)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (15) erhalten wir schließlich die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \\ M_y &= I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ M_z &= I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (19)$$

Wenden wir diese Gleichungen auf den kräftefreien, symmetrischen Kreisel an: Die Kräftefreiheit führt dazu, dass kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, d.h. $M_i = 0$ und aufgrund der Symmetrie gilt zudem $I_x = I_y \equiv I_x$. Mit diesen Randbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z &= 0 \\ I_x \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= 0 \\ I_z \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar, dass die z-Komponente von $\vec{\omega}$ konstant ist. Definieren wir zusätzlich noch die Größe

$$\Omega = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_z, \quad (21)$$

so folgt schließlich

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y &= 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Differentiation einer Gleichung nach der Zeit und Eliminierung der jeweils anderen Frequenz liefert zwei identische Oszillorgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x &= 0 \\ \ddot{\omega}_y + \Omega^2 \omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Wir erhalten schließlich für die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \omega_x &= A \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y &= A \sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z &= \text{konst.}, \end{aligned} \quad (24)$$

wobei $A^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{konst.}$ und φ von den Anfangsbedingungen abhängt.

Aus den Gleichungen (24) lesen wir, dass im körperfesten System die Spitze des Winkelgeschwindigkeits-Vektors $\vec{\omega}$ mit der Frequenz $\Omega = \text{konst.}$ (Gleichung (21)) auf einer zur Figurenachse senkrechten Ebene rotiert. Die momentane Winkelgeschwindigkeit bewegt sich somit auf einem Kegel, entsprechend dem Körperkegel in Abbildung 3 um die Figurenachse. Dies entspricht unseren Überlegungen, die wir in den Gleichungen (6) und (7) angegeben haben.

Versuch 221 Adiabatenkoeffizient

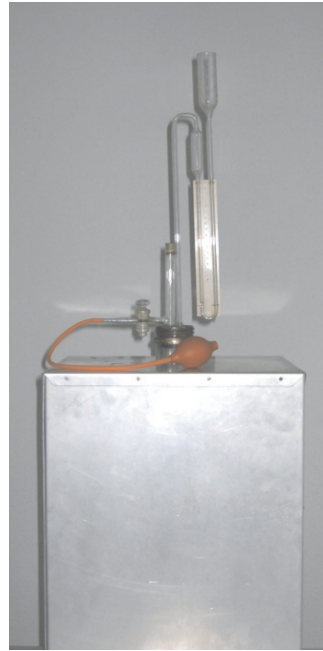


Abbildung 1: Links: Versuchsaufbau nach Rüchardt. Rechts: Aufbau nach Clément-Desormes. Der Gasbehälter befindet sich im Aluminiumgehäuse.

I Messaufbau

Aufbau nach Clément-Desormes:

- Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftballg

Aufbau nach Rüchardt:

- Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper

- Gasflaschen (Argon, Luft)
- Stoppuhr

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder.
- Homepage des Praktikums <http://www.physikpraktika.uni-hd.de>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.phys.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Zustandsänderungen eines Gases und deren Darstellung im pV-Diagramm (Isotherme, Isobare, Isochore, Adiabate), Adiabaten-Exponent, Poisson-Gleichung, spezifische Wärme eines Gases, Gleichverteilungssatz, Freiheitsgrade (theoretische Werte für c_p/c_V bei ein- und mehratomigen Gasen).

Verständnisfragen:

1. Für welchen thermodynamischen Prozess ist die Größe κ von Bedeutung?
2. Welche Beziehung besteht zwischen den Größen c_p , c_V , κ und f (Anzahl der Freiheitsgrade)? Wie groß ist der theoretische Wert von κ für ein Edelgas? Was erwarten Sie für Luft bzw. für Kohlendioxid?
3. Was ist größer: c_p oder c_V ?

IV Aufgabe

1. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_V ist für Luft auf zwei verschiedene Weisen und für Argon nach Rüchardt zu messen.

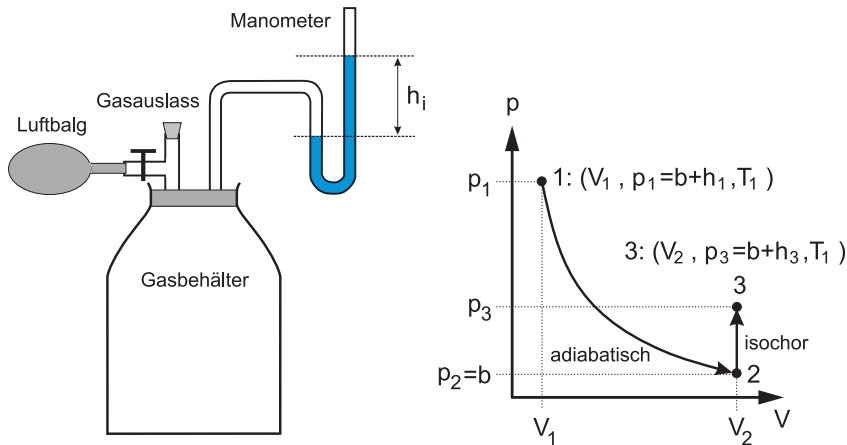


Abbildung 2: Links: Skizze des Aufbaus nach Clément und Desormes. Rechts: Dazugehöriges pV -Diagramm.

V Grundlagen

V.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes

Der Messaufbau ist in Abbildung 2 dargestellt. Der Druck in einem luftgefüllten Gasbehälter lässt sich mit Hilfe eines Luftbalgs vergrößern und kann mit einem Manometer abgelesen werden.

Durch Pumpen mit dem Luftbalg wird in dem Gasbehälter ein Überdruck erzeugt, wobei sich das Gas dabei erwärmt. Wartet man nun so lange ab, bis sich das Gas wieder auf Zimmertemperatur abgekühlt hat, so ist der Zustand 1 im pV -Diagramm in Abbildung 2 erreicht:

$$\text{Zustand 1: } V_1, \quad p_1 = b + h_1, \quad T_1 \quad (1)$$

wobei V_1 das Volumen im Zustand 1, b der äußere Luftdruck, h_1 die Höhendifferenz des Manometers und T_1 die Temperatur des Gases im Zustand 1 (Zimmertemperatur) bezeichnen.

Im nächsten Schritt wird der Gasauslassstopfen am Gasbehälter für eine kurze

Zeit geöffnet, so dass sich der Druck im Behälter dem äußeren Luftdruck b angleicht. Dabei entweichen Moleküle aus der Flasche, d.h. die Gasmenge ändert sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass man durch eine Volumenvergrößerung um ΔV zu dem Druck b kommt. Da der Druckausgleich sehr schnell erfolgt, findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt. Es handelt sich daher um einen adiabatischen Prozess, bei dem sich die Temperatur des Gases um ΔT abkühlt. Für den Zustand 2 des Gases gilt dann:

$$\text{Zustand 2: } V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_2 = b, \quad T_2 = T_1 - \Delta T. \quad (2)$$

Nun wartet man solange ab, bis die Temperatur des Gases wieder auf Zimmertemperatur angestiegen ist. Da sich dabei das Volumen nicht ändert, handelt es sich um eine isochore Zustandsänderung bei der der Druck ansteigt. Hat die Temperatur des Gases schließlich Zimmertemperatur erreicht, befindet sich das Gas im Zustand 3:

$$\text{Zustand 3: } V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_3 = b + h_3, \quad T_3 = T_1. \quad (3)$$

Die Zustände 1 und 2 sind durch die Poisson'sche Gleichung miteinander verknüpft:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (4)$$

Hiermit berechnen wir

$$(b + h_1) V_1^\kappa = b (V_1 + \Delta V)^\kappa. \quad (5)$$

Da $\Delta V \ll V_1$ ist können wir $(V_1 + \Delta V)^\kappa$ nähern durch

$$(V_1 + \Delta V)^\kappa = V_1^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^\kappa \approx V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right). \quad (6)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1}. \quad (7)$$

In den Zuständen 1 und 3 ist die Temperatur der Luft im Gasbehälter gleich, d.h. es gilt das Boyle-Mariotte'sche Gesetz $pV = \text{konst.}$:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad (8)$$

$$\rightarrow (b + h_1)V_1 = (b + h_3)(V_1 + \Delta V). \quad (9)$$

Da $h_3 \ll b$ und $\Delta V \ll V_1$, kann der Term $h_3\Delta V$ vernachlässigt werden. Somit ergibt sich:

$$h_1V_1 = h_3V_1 + b\Delta V, \quad \text{bzw.} \quad (10)$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b}. \quad (11)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (7) ein, so erhalten wir schließlich:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}. \quad (12)$$

Wir können somit den Adiabatenkoeffizient κ allein durch Ablesen des Manometerstandes in den Zuständen „1“ und „3“ bestimmen.

V.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt

Eine weitere Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten eines Gases, ist mit der Methode nach Rüchardt möglich (Abbildung 3). Auf einem Gasbehälter ist eine Glasröhre montiert. Bringt man in das Glasrohr einen Schwingkörper, der nahezu den gleichen Durchmesser wie das Glasrohr besitzt, so schwingt dieser in der Röhre auf und ab. Dabei wird das Gas periodisch adiabatisch komprimiert und expandiert. Allerdings ist die Schwingung stark gedämpft, so dass nur wenige Perioden beobachtbar sind.

Um dem entgegenzuwirken befindet sich in der Mitte des Glasrohrs eine kleine Öffnung von ungefähr 1 mm Durchmesser. Lässt man einen gleichmäßigen Gasstrom in die Flasche, dann wirkt, sofern sich der Schwingkörper unterhalb der Öffnung befindet, ein zusätzlicher Druck auf den Schwingkörper. Befindet sich der Schwingkörper über der Öffnung, so entweicht der Gasstrom durch die Öffnung und der Druck sinkt. Beachten Sie, dass durch diese Maßnahme nur die Reibungsverluste ausgeglichen werden. Die eigentliche Bewegung des Schwingkörpers beruht auch weiterhin auf der adiabatischen Kompression und Expansion des Gases.

Der Schwingkörper befindet sich im Gleichgewicht wenn der Druck p in der Flasche gleich der Summe aus dem Luftdruck p_0 und dem „Schweredruck“ des

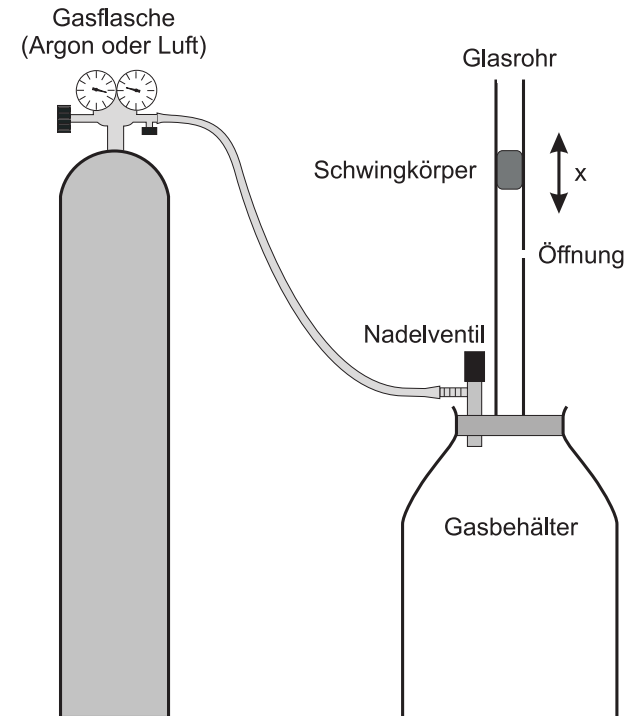


Abbildung 3: Versuchsaufbau nach Rüchardt.

Schwingkörpers ist:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}, \quad (13)$$

wobei m die Masse und A die Querschnittsfläche des Schwingkörpers beschreiben. Schwingt der Körper um eine kleine Strecke x über die Gleichgewichtslage hinaus, wobei sich der Druck p um dp ändert, so gilt nach dem Newton'schen Gesetz:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = A dp. \quad (14)$$

Da der Vorgang adiabatisch erfolgt, gilt die Poisson'sche Gleichung

$$pV^\kappa = \text{konst.}$$

Differentiation dieses Ausdrucks nach V liefert:

$$\begin{aligned} p &= V^{-\kappa} \cdot \text{konst.} \\ \frac{dp}{dV} &= -\kappa V^{-\kappa-1} \cdot \text{konst.} \\ \frac{dp}{dV} &= -\kappa \frac{p}{V} \\ dp &= -\kappa \frac{p}{V} dV. \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (14) ein, so erhalten wir:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -A \kappa \frac{p}{V} dV.$$

Mit $dV = Ax = \pi r^2 x$, wobei r den Radius des Glasrohrs darstellt, ergibt sich:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\pi^2 r^4 \kappa \frac{p}{V} x$$

bzw.

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV} x = 0.$$

Gleichung (22) ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Die allgemeine Form lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Vergleichen wir dies mit Gleichung (22), so ergibt sich für die Kreisfrequenz des Schwingkörpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}}$$

bzw. für die Periodendauer T

$$T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}}.$$

Für den Adiabatenkoeffizienten κ folgt dann:

(15)

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \quad (26)$$

(16)

(17)

(18)

(19)

Die Größen m , V und r sind bekannt und an der Versuchsanordnung angegeben. Für p ist der Druck gemäß Gleichung (13) einzusetzen. Somit kann der Adiabatenkoeffizient allein durch Messung der Periodendauer T bestimmt werden.

VI Durchführung des Versuchs

Hinweis: Da für jede Teilaufgabe nur ein Messaufbau zur Verfügung steht, beginnt die eine Gruppe mit der Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes, die andere mit der Messung nach Rüchardt. Anschließend wechseln beide Gruppen den Versuchsaufbau.

Aufgabe 1: Messen des Adiabatenkoeffizienten nach der Methode von Clément und Desormes

Erzeugen Sie durch mehrmaliges Pumpen mit dem Luftbalg ein Überdruck im Gasbehälter. Bei diesem Vorgang erwärmt sich das Gas. Warten Sie daher nach der Druckerhöhung einige Minuten ab, bis die Temperatur des Gases wieder auf Zimmertemperatur abgesunken ist. Sie können das Erreichen der Zimmertemperatur am asymptotischen Absinken des Druckes am Manometer auf den Endwert h_1 beobachten. Dies entspricht, wie im Kapitel „Grundlagen“ erläutert, dem Zustand 1 im pV-Diagramm. Notieren Sie den Druck h_1 .

Öffnen Sie nun für etwa 2 Sekunden den Stopfen der Gasauslassöffnung. Dadurch wird ein adiabatischer Druckausgleich erzielt (Zustand 2 im pV-Diagramm). Warten Sie anschließend wieder den Temperatursausgleich ab, bis sich ein konstanter Überdruck h_3 eingestellt hat (Zustand 3). Notieren Sie diesen Wert. Dem Versuch ist mindestens 5-mal zu wiederholen. Falls der Enddruck h_3 noch groß genug ist, kann man diesen Zustand als Anfangszustand für die folgende Messung benutzen. Falls nicht, müssen Sie den Druck durch Pumpen mit dem Luftbalg erneut erhöhen.

Aufgabe 2: Messen des Adiabatenkoeffizienten nach der Methode von Rüchardt

Stellen Sie am Reduzierventil der Gasflasche einen Druck von ca. 0,4 bar ein und regeln Sie das Nadelventil an der Apparatur so ein, dass sich eine Schwingung

um die Mitte des Rohres (d.h. um die Gasaustrittsöffnung) einstellt. Um sicherzustellen, dass der Gasbehälter vollständig mit dem entsprechenden Gas gefüllt ist, sollten Sie bevor Sie mit der Messung beginnen einige Minuten abwarten. Die Größen m , V und r sind an der Versuchsanordnung angegeben. Notieren Sie diese Werte sowie den Luftdruck in Ihr Protokollheft. Messen Sie an jedem Aufbau die Zeit für mindestens 50 Schwingungen. Überlegen Sie sich, wie Sie beim Zeitmessen des statistischen Fehler minimieren können.

VII Auswertung

Berechnen Sie für beide Messmethoden die Adiabatenkoeffizienten der entsprechenden Gase und vergleichen Sie diese mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Was könnten die Ursachen für mögliche Abweichungen sein?

VIII Anhang - Bemerkung zum Adiabatenkoeffizient

Der Unterschied der molaren Wärmen eines idealen Gases ist gegeben durch

$$c_p - c_V = R, \quad (27)$$

wobei R die allgemeine Gaskonstante darstellt. Bei der Ableitung dieser Beziehung wird vorausgesetzt, dass die innere Energie des Gases nicht vom Volumen sondern nur von der Temperatur abhängt. Dies ist für verdünnten Gase einigermaßen der Fall. Bei der Betrachtung der kinetischen Gastheorie in den Lehrbüchern sagt man, einatomige Gase haben drei, nämlich die translatorischen Freiheitsgrade, zweiatomige Gase (oder gestreckte Moleküle) zusätzlich zwei rotatorische Freiheitsgrade und drei- oder mehratomige Gase insgesamt 6 Freiheitsgrade, woraus sich dann $c_V = 1,5R$, bzw. $2,5R$ und $3R$ ergibt und somit $\kappa = 5/3$ bzw. $7/5$ und $4/3$ folgt. Tatsächlich treten aber z.B. bei dem linearen CO_2 -Molekül bei Zimmertemperatur bereits Knickschwingungen auf, oder bei Ethan machen die beiden CH_3 -Gruppen Rotationspendelschwingungen gegeneinander, so dass zur inneren Energie weitere Beiträge kommen, die zu einer Erniedrigung von κ führen. In der folgenden Tabelle sind einige Werte für κ nach Kohlrausch aufgelistet:

Gas	κ
Ar	1,648
He	1,63
H_2	1,41
N_2	1,401
O_2	1,398
CO_2	1,293
Methan	1,308
Ethan	1,188
Propan	1,13

Versuch 222 Heißluftmotor

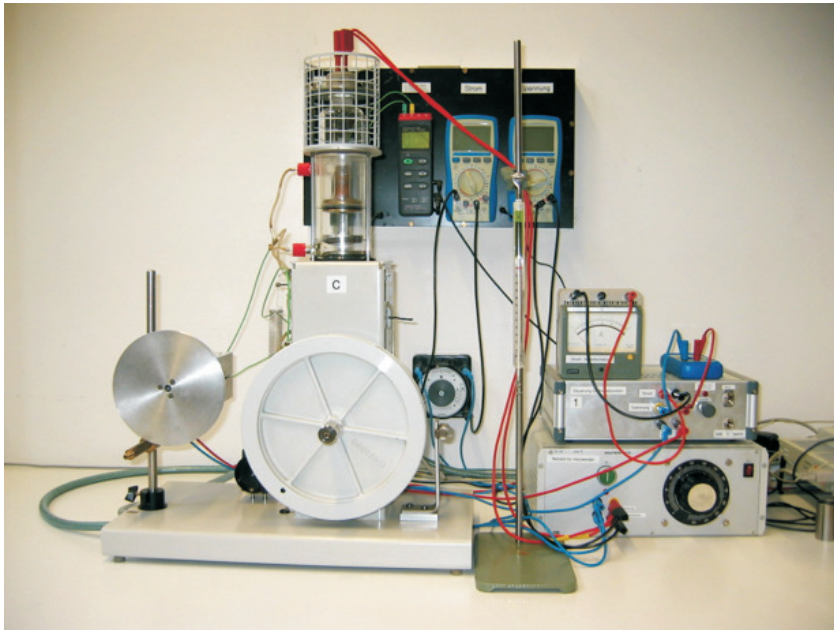


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Heißluftmotor
- regelbares Netzteil für die Heizwendel
- Sensorsystem „Cassy“ mit Druck- Temperatur- und Wegsensor
- PC mit Drucker
- Dreikanal Thermometer
- Multimeter

- Elektrischer Antriebsmotor mit regelbarem Netzteil
- Durchflussmengen- Messgerät des Kühlwassers

II Literatur

- Bergmann- Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band I*, de Gruyter Berlin.
- Eichler, Kronfeldt, Sahm, *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*, Springer Verlag.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wärmelehre, ideales Gasgesetz, Zustandsgrößen, Hauptsätze der Thermodynamik, thermodynamischer Kreisprozess, Wärmekraftmaschine, Kältemaschine und Wärmepumpe, Carnot- Prozess, Wirkungsgrad.

Verständnisfragen:

1. Wie lauten die drei Hauptsätze der Thermodynamik?
2. Worin unterscheiden sich isotherme, adiabatische, isochore und isobare Zustandsänderungen? Wie verlaufen diese im pV- Diagramm?
3. Beschreiben Sie den Carnot'schen Kreisprozess. Wie groß ist der theoretische Wirkungsgrad?
4. Diskutieren Sie die Wirkungsweise eines Stirlingmotors anhand des pV-Diagramms. Erläutern Sie für jeden Takt die Änderung der inneren Energie, die zugeführter Wärme und die geleistete Arbeit.
5. Beschreiben Sie die Funktion des Regenerators und diskutieren Sie warum der Stirling- Prozess mit einem idealem Regenerator den maximalen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine erreicht.

6. Erklären Sie mit Hilfe des pV-Diagramms die Funktionen der Stirling-Maschine beim Betrieb als Kältemaschine und als Wärmepumpe.
7. Laufen Wärmepumpen und Kältemaschinen gleichsinnig oder gegensinnig?
8. Worin liegt der Vorteil einer Wärmepumpe gegenüber anderen Heizquellen?

IV Aufgaben

1. Untersuchen Sie qualitativ die Wirkungsweise des Heißluftmotors als Kältemaschine und Wärmepumpe.
2. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Heißluftmotors aus dem pV-Diagramm.
3. Ermitteln Sie den Wirkungsgrad durch Messung der abgegebenen Arbeit mit Hilfe einer Drehmomentmessung.

V Motivation

„...These imperfections have been in great measure removed by time and especially by the genius of the distinguished Bessemer¹. If Bessemer iron or steel had been known thirtyfive or forty years ago there is scarce a doubt that the air engine would have been a great success.“ – Robert Stirling, 1876

In diesem Zitat bezieht sich Robert Stirling auf die Gefahren der Anfang des 19. Jahrhunderts aufkommenden Hochdruckdampfmaschinen. Um den Wirkungsgrad der Dampfmaschine zu steigern, wurde die Kesseltemperatur unter hohem Druck weit über den Siedepunkt des Wassers erhöht. Allerdings waren die damals zur Verfügung stehenden Materialien - Stahl war noch nicht bekannt - ungeeignet, diesen hohen Drücken dauerhaft standzuhalten. Zahlreiche Kesselexplosionen waren die Folge, die viele Menschenopfer forderten.

Die technischen Mängel der Hochdruckdampfmaschine, insbesondere die Gefahren für die Arbeiter, waren mitverantwortlich dafür, dass sich der schottische Pfarrer Robert Stirling mit der Entwicklung eines neuen Motortyps beschäftigte.

¹Ein nach Henry Bessemer benannte Stahlsorte bzw. ein Verfahren zur Massenstahlerzeugung.

1816 wurde von dem damals 26-jährigen Stirling der Heißluftmotor zum Patent angemeldet. Damit ist der Stirlingmotor, nach der Dampfmaschine, die älteste periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine.



Robert Stirling

Die ersten Anwendungen des Stirlingmotors waren vor allem Wasserpumpen und Maschinenantriebe mit kleinem bis mittlerem Leistungsbedarf. Allerdings gelang es dem Stirlingmotor niemals sich gegen die Dampfmaschine so richtig durchzusetzen. Mit der Entwicklung neuer Materialien, insbesondere des Stahls, wurden die Dampfmaschinen betriebssicherer und verdrängten den Heißluftmotor immer mehr vom Markt. Lediglich in solchen Bereichen, in denen Antriebe mit geringer Leistung benötigt wurden, wie z.B. Ventilatoren oder Nähmaschinen, wurden Heißluftmotoren in größerer Stückzahl eingesetzt.

Das endgültige Ende der Stirlingmotoren, aber auch letztendlich der Dampfmaschinen, wurde durch die Erfindung des Verbrennungsmotors und des Elektromotors eingeleitet. Diese neuen Motoren waren bei gleichem Gewicht deutlich leistungstärker und auch günstiger herzustellen als der Heißluftmotor, so dass dieser allmählich vom Markt verschwand.

Im Jahre 1938 griff die Firma Philips die Ideen Stirlings erneut auf. Philips suchte für seine Radioempfänger und Sendestationen neue Absatzmärkte in Afrika und Asien. Da die Elektrifizierung dieser Länder noch nicht vorangeschritten war, benötigte man Stromgeneratoren, die auf Basis des Heißluftmotors entwickelt werden sollten. Kurz nach dem zweiten Weltkrieg um 1950 wurden als erster Prototyp ein 200 W Stirlingmotor vorgestellt. Allerdings wurde dieser Motor niemals in großen Stückzahlen gefertigt. Mit der Erfindung des Transistors wurden die Radioempfänger immer energiesparender und benötigten daher keine zusätzlichen Stromgeneratoren. Trotzdem wurde an der Entwicklung des Heißluftmotors weiter gearbeitet. 1975 stellte Philips einen 4-Zylinder Heißluftmotor vor, der eine Leistung von 115 PS bei 3200 Umdrehungen pro Minute erreichte. Der Wirkungsgrad dieses Motors betrug 40 %!

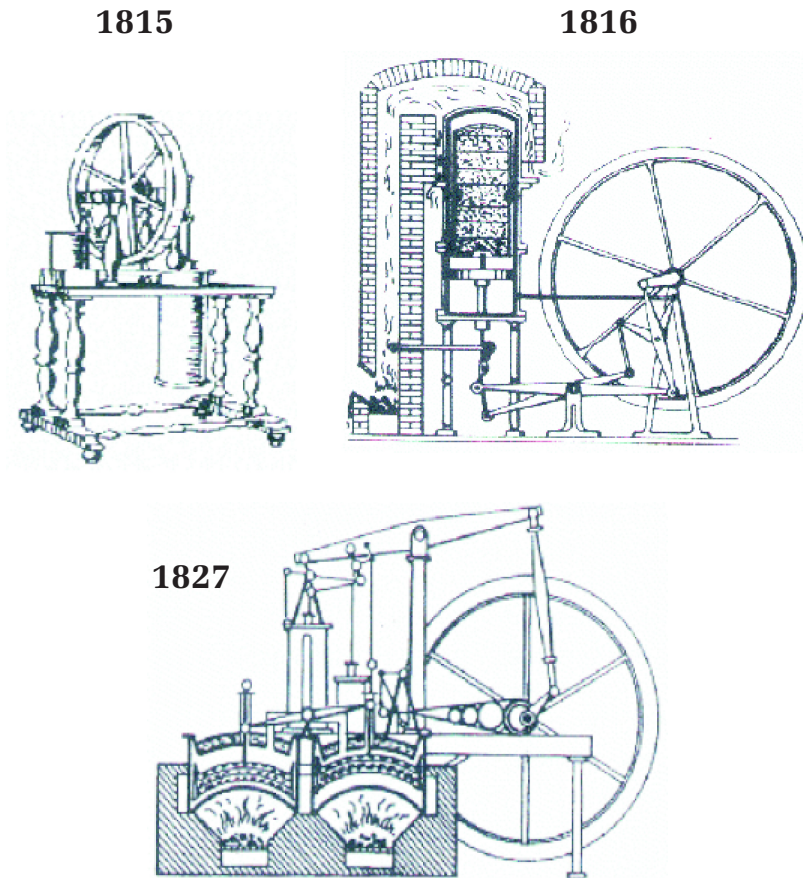


Abbildung 2: Historische Stirlingmotoren. Quelle: Hermann Schmidt. Hat der Stirlingmotor eine Zukunft? Eine allgemeine Übersicht.

Ein wesentlicher Vorteil der Heißluftmotoren besteht darin, dass die „Wärme von außen zugeführt wird“ und nicht wie bei Otto- oder Dieselmotoren eine innere Verbrennung erfolgt. Dadurch können nahezu alle Energieträger verwendet werden; nicht nur flüssige, feste oder gasförmige Brennstoffe, sondern auch Sonnenenergie, die bei chemischen Reaktionen freiwerdende Wärme und im Prinzip auch Kernenergie. Die äußere Verbrennung ist zudem sehr umweltschonend. Durch einen externen Brenner kann die Verbrennung optimal reguliert werden, so dass ein Minimum an Umweltschadstoffen wie Kohlenmonoxid oder Stickoxiden erzeugt werden. Desweiteren entstehen bei der äußeren Verbrennung keine Verschmutzungen und Rückstände innerhalb des Motors, wodurch eine hohe Standzeit gewährleistet ist und ein wartungsbedingter Ölwechsel des Motors nur selten oder gar nicht notwendig ist. Weitere Vorteile liegen in der geringen Geräuschemission, der Laufruhe und dem hohen Wirkungsgrad. Der theoretische Wirkungsgrad des Stirlingmotors entspricht dem des Carnot- Wirkungsgrades und ist damit höher als der theoretische Wirkungsgrad von Otto- und Dieselmotoren.

Allerdings besitzt der Heißluftmotor gegenüber den hochgezüchteten Verbrennungsmotoren auch deutliche Nachteile: Um bei kleiner Bauhöhe und geringem Gewicht hohe Leistungen zu erzielen, muss das Arbeitsgas auf einen sehr hohen Druck (≈ 150 bar) „vorgespannt“ werden und zudem der Motor bei hohen Drehzahlen betrieben werden. Damit sind äußerst hohe mechanische Belastungen für die trockenlaufenden Lager und Dichtungen verbunden. Die Materialien des Erhitzers müssen bis zu 1000°C hitze- und druckbeständig sein. Bei einem Innendruck von 150 bar ist dies nicht trivial! Diese Anforderungen setzen spezielle Materialien voraus, die die Herstellung dieses Motors gegenüber den Verbrennungsmotoren verteuern. Ein weiterer Nachteil liegt in dem hohem Aufwand der Leistungsregulierung. Bei einem Verbrennungsmotor lässt sich die Leistung durch die Einspritzmenge des Brennstoffes sehr einfach einstellen. Bei dem Heißluftmotor ist dies nicht möglich. Eine schnelle Leistungsregulierung ist hier nur über eine Variierung des Innendrucks möglich- bei typischerweise 150 bar ebenfalls nicht trivial.

Angesichts des heutigen Entwicklungsstand ist der Einsatz von Heißluftmotoren nur in solchen Bereichen wirtschaftlich, in denen Otto- oder Dieselmotoren nicht eingesetzt werden können. Ein erfolgversprechendes Anwendungsgebiet stellen Blockheizkraftwerke (BHKW) zur dezentralen Energieversorgung dar. Solche Kraftwerke können zur Stromerzeugung mit günstigen und nachwachsenden Brennstoffen (z.B. Holzpellets) befeuert werden. Zudem lässt sich die Abwärme

zu Heizzwecken nutzen, so dass ein sehr hoher Wirkungsgrad erreicht wird. Zur Zeit wird von der Sindelfinger Firma Solo ein Blockheizkraftwerk auf Basis eines Stirling- Motors in Serie gefertigt. Dieses Stirling- Modul liefert eine elektrische Leistung von 2-9 kW bei einem elektrischen Wirkungsgrad von 24 %. Der Gesamtwirkungsgrad des BHKW liegt nach Angaben der Firma Solo bei 90 %.

Gute Marktchancen besitzt der Heißluftmotor auch im Bereich der FCKW-freien Kälteerzeugung. Der Stirling- Motor kann nämlich nicht nur als Wärmekraftmaschine, sondern auch zum Heizen bzw. Kühlen verwendet werden. Wird der Motor von außen mechanisch angetrieben, so arbeitet er je nach Drehrichtung des Antriebs als Wärmepumpe oder als Kältemaschine. Vor allem im Betrieb als Kältemaschine finden sich zahlreiche technische Anwendungen. Da Temperaturen von bis zu -190°C erreicht werden können, eignen sich Stirling-Motoren zur Kühlung von Supraleitern, von Infrarotsensoren und zur Luft- oder Erdgasverflüssigung.

Das Konzept der Stirlingmaschinen ist noch lange nicht beendet. Gerade in der jetzigen Zeit, in der man immer mehr nach umweltschonenden und regenerativen Energiequellen sucht, stellt der Heißluftmotor ein erfolgversprechendes Konzept dar. Die Entwicklung neuer Werkstoffe und Verfahren ist so weit voran geschritten, dass die von Stirling vorhergesagte Ära bereits begonnen hat:

„It remains for some skilled and ambitious mechanist in a future age to repeat it under favourable circumstances and with complete success.“ – Robert Stirling, 1876

VI Grundlagen

VI.1 Wirkungsweise des Heißluftmotors

Es gibt unterschiedliche Typen von Stirlingmotoren. Wegen des einfachen Aufbaus wollen wir zunächst das Funktionsprinzip des Stirlingmotors anhand eines sogenannten γ -Typ Heißluftmotors diskutieren (Abbildung 3 oben). Dieser Motor besitzt zwei separate Zylinder, die durch ein Rohr miteinander verbunden sind. Beide Zylindern sind mit Luft gefüllt und nach außen abgedichtet. Um den Wirkungsgrad zu erhöhen, werden bei industriell gefertigten Motoren statt Luft auch Edelgase oder Wasserstoff als Arbeitsgas verwendet. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

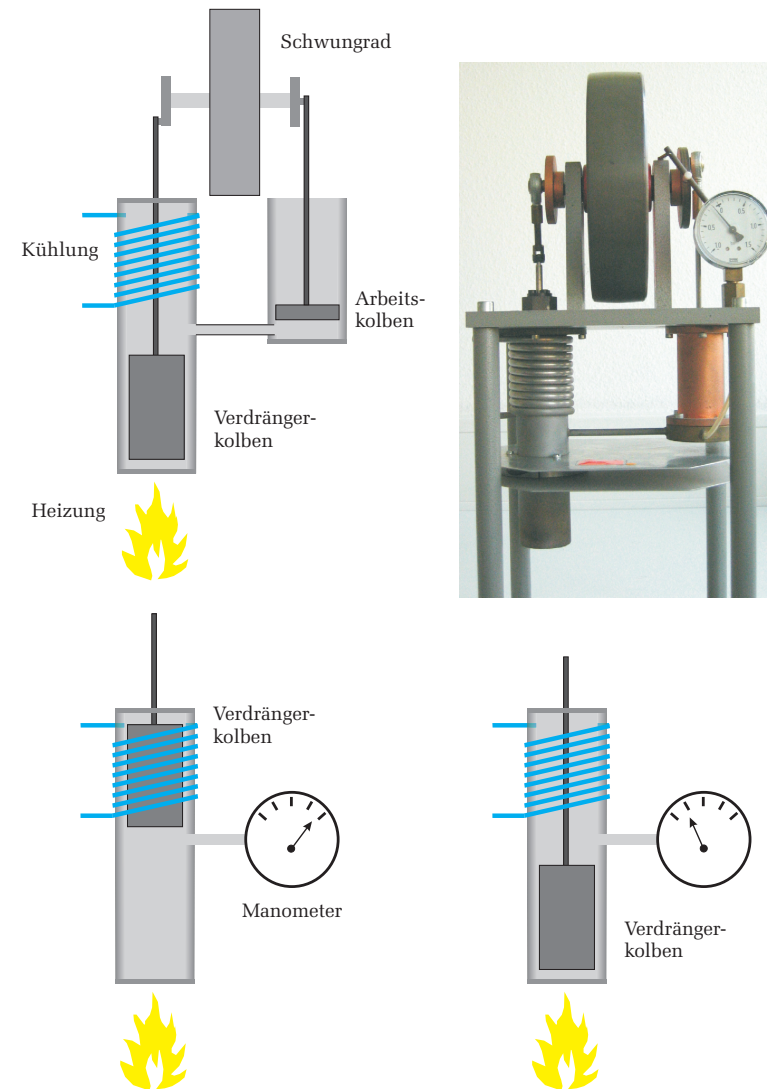


Abbildung 3: Oben: Aufbau eines γ -Typ Stirlingmotors. Unten: Wirkungsweise des Verdrängers.

Betrachten wir zunächst den linken Zylinder (Abbildung 3 unten) des Heißluftmotors. Der untere Bereich wird von außen beheizt, der obere gekühlt. Bei den im Praktikum verwendeten Motoren erfolgt die Heizung elektrisch mit einer Heizwendel und die Kühlung durch eine Wasserkühlung. Im Zylinder befindet sich der sogenannte **Verdrängerkolben** der ungefähr die Hälfte des Zylindervolumen einnimmt. Seine Aufgabe besteht darin, das Arbeitsgas zwischen dem heißen und dem kalten Bereich des Zylinders hin und her zu bewegen. Befindet sich der Verdrängerkolben im oberen Bereich, so hat er die Luft in den unteren, beheizten Bereich des Zylinders verdrängt. Umgekehrt wurde die Luft in den kalten Bereich des Zylinders verdrängt, wenn sich der Verdrängerkolben im unteren Teil des Zylinders befindet. Beachten Sie, dass der Verdrängerkolben das Arbeitsgas nicht komprimiert, sondern es nur zwischen den beiden Wärmereservoirs hin und her schiebt. Je nach Stellung des Verdrängers, wird das Gas einmal aufgeheizt und im anderen Fall abgekühlt. Befindet sich das Gas im geheizten Bereich, so steigt auch der Druck im Zylinder. Hat dagegen der Verdränger die Luft in den kalten Bereich verschoben, so kühlt sich die Luft ab und der Druck sinkt. Dieser „Heizzyylinder“ ist nun mit einem weiteren Zylinder, dem Arbeitszylinder, über ein Rohr verbunden (Abbildung 3 oben). In ihm erfolgt die eigentliche Kompression und Expansion des Gases durch den sogenannten **Arbeitskolben**. Verdrängerkolben und Arbeitskolben werden durch eine gemeinsame Kurbelwelle gesteuert. Die Kolben sind so angeordnet, dass eine Kompression des Gases dann erfolgt, wenn sich die Luft im kalten Bereich des Heizzyinders, und damit über das Rohr auch im Arbeitszylinder, befindet. Das Arbeitsgas wird demnach bei einem geringen Druck komprimiert.

Nach der Kompression verdrängt der Verdrängerkolben die Luft in den heißen Bereich, der Druck steigt, das Arbeitsgas expandiert und verschiebt den Arbeitskolben, so dass nach außen mechanische Arbeit verrichtet wird. Danach wird die Luft wieder abgekühlt und einen Teil der zuvor freigewordenen Arbeit dazu verwendet, dass Gas erneut zu komprimieren. Der Kreisprozess beginnt von vorne.

Im Gegensatz zu dem γ -Typ Heißluftmotor besitzt der β -Typ Stirlingmotor (Abbildung 4) nur einen Zylinder, in dem sowohl Arbeitskolben als auch Verdrängerkolben gemeinsam angeordnet sind. Das Funktionsprinzip entspricht dem des γ -Typ Heißluftmotors, mit dem Unterschied, dass der Gaswechsel von heiß nach kalt im Kompressionsraum nicht durch ein Rohr, sondern in einem gemeinsamen Zylinder erfolgt. Dadurch verringert sich das Totvolumen und der Wirkungsgrad steigt. Im Praktikumsversuch werden wir quantitative Messungen

nur am β -Typ Stirlingmotor durchführen. Ein γ -Typ Motor steht zu Demonstrationszwecken zur Verfügung.

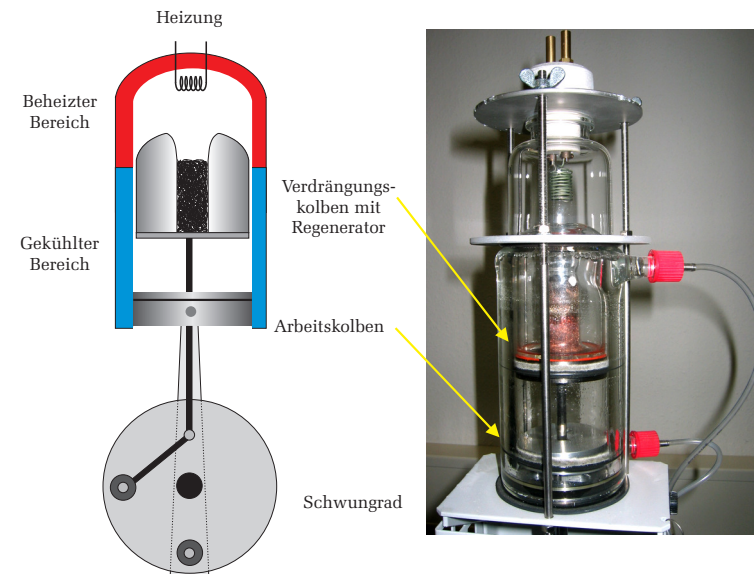


Abbildung 4: Aufbau eines β -Typ Stirlingmotors

Abbildung 5 links zeigt den Stirling- Prozess im pV - Diagramm; rechts daneben die entsprechenden Stellungen des Arbeits- und Verdrängerkolbens. Beim idealen Stirling- Prozess werden vier Zustandsänderungen durchlaufen:

- $1 \rightarrow 2$ Isotherme Expansion: In Stellung 1 befindet sich der Verdrängungskolben ganz unten (unterer Totpunkt). Die Luft befindet sich im **heißen** Zylinderbereich und wird aufgeheizt. Bei der isothermen Expansion nimmt das Arbeitsgas die Wärmemenge Q_1 auf, dehnt sich dabei aus und verschiebt den Arbeitskolben gegen den Atmosphärendruck nach unten, wobei vom Gas die Arbeit W_1 geleistet wird.
- $2 \rightarrow 3$ Isochore Abkühlung: Der Verdrängungskolben bewegt sich nach oben und verdrängt das Arbeitsgas in den gekühlten Bereich. Das Gas wird auf die Temperatur T_2 abgekühlt und gibt dabei die Wärmemenge Q_2 an das Kühlsystem ab.
- $3 \rightarrow 4$ Isotherme Kompression: Der Arbeitskolben bewegt sich nach oben und komprimiert die **kalte** Luft. Dabei wird vom Kolben die Arbeit W_3 verrichtet. Die bei der Kompression freiwerdende Wärmemenge Q_3 wird an das Kühlsystem abgeführt.
- $4 \rightarrow 1$ Isochore Erwärmung: Der Verdrängerkolben bewegt sich nach unten und schiebt das Arbeitsgas in den heißen Bereich zurück. Durch Aufnahme der Wärmemenge Q_4 steigt die Temperatur wieder auf den Anfangswert T_1 .

Der ideale Stirling Prozess lässt sich technisch nicht realisieren. Eine isochore Zustandsänderung setzt eine diskontinuierliche Kolbenbewegung voraus. Bei den Zustandsänderungen $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ müsste der Arbeitskolben im Stillstand verharren und nur der Verdrängerkolben bewegt werden. Zudem müssten die Isothermen sehr langsam durchlaufen werden, so dass ein hinreichender Wärmeaustausch mit dem Heiz- bzw. Kühlsystem gewährleistet ist. Solch eine Maschine könnte nur diskontinuierlich mit geringer Drehzahl arbeiten, womit ein äußerst unruhiger Lauf und sehr hohe mechanische Belastungen verbunden wären.

Bei dem im Praktikum verwendeten Motor sind sowohl Arbeits- als auch Verdrängerkolben über das Schwungrad direkt an die Kurbelwelle angekoppelt (Abbildung 4). Beide Kolben weisen somit eine annähernd sinusförmige Bewegung auf, wodurch ein ruhiger, belastungsarmer Lauf möglich ist. Zudem sind Arbeits-

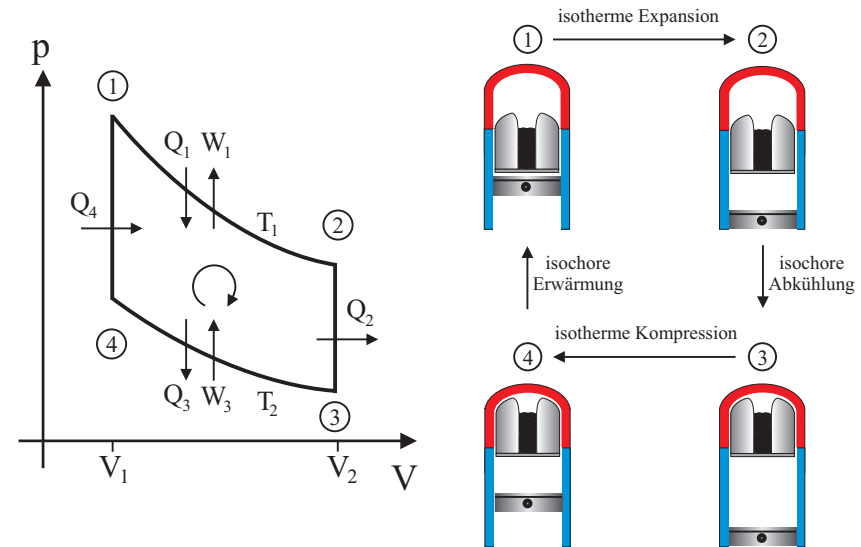


Abbildung 5: Links: pV - Diagramm des idealen Stirling Prozesses. Rechts: Korrespondierende Stellungen des Arbeits- und Verdrängungskolbens bei einem β -Typ Heißluftmotor.

und Verdrängungskolben um 90° phasenverschoben angeordnet, so dass der ideale Stirling- Prozess einigermaßen gut angenähert werden kann (Abbildung 6 links). Der Nachteil bei diesem kontinuierlich laufenden Kurbeltrieb liegt darin, dass der Kreisprozess nicht in vier diskreten Zustandsänderungen durchlaufen wird, sondern dass es zu einer Überlappung der einzelnen Takte kommt. So findet beispielsweise bei der Expansion im Arbeitstakt $1 \rightarrow 2$ auch gleichzeitig ein vorzeitiger Gasaustausch vom heißen in den kalten Bereich statt und zu Beginn des Kompressionstaktes $3 \rightarrow 4$ befindet sich noch nicht die gesamte Luft im gekühlten Teil des Motors. Diese Überlappungen führen zu einer Reduzierung des Wirkungsgrads gegenüber dem idealen Stirling- Prozess. Das pV -Diagramm eines realen Heißluftmotors zeigt daher deutliche Abweichungen vom idealen Stirling- Prozess (Abbildung 6 rechts). Die starken Abrundungen im Bereich der Isochoren gegenüber dem idealen Prozess sind auf die kontinuierliche Bewegung des Kolbens und die Trägheit der Wärmeleitung zurückzuführen.

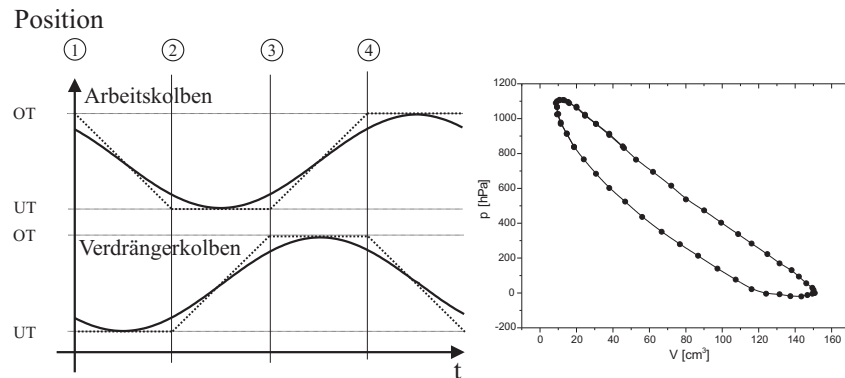


Abbildung 6: Links: Kurbelwellendiagramm eines Heißluftmotors. Die gepunktete Kurve verdeutlicht die diskontinuierliche Kolbenbewegung des idealen Stirling-Prozesses, die durchgezogene Linie die kontinuierlich laufende Bewegung bei einem Kurbeltrieb. Die Bezeichnungen OT/UT an der Ordinate kennzeichnen den oberen bzw. unteren Totpunkt, d.h. die Umkehrpunkte der jeweiligen Kolbenbewegungen. Rechts: Gemessenes pV -Diagramm des im Praktikum eingesetzten Heißluftmotors. Die von der Kurve eingeschlossene Fläche entspricht der pro Zyklus in mechanische Arbeit überführten Wärmeenergie.

VI.2 Funktion des Regenerators

Durch den Einsatz eines Regenerators kann die Effizienz des Heißluftmotors erheblich gesteigert werden. Um dies zu verstehen, blicken wir nochmals auf die Funktion des Verdrängungskolbens zurück. Der Verdrängungskolben hat die Aufgabe das Arbeitsgas periodisch zwischen dem geheizten und dem gekühlten Bereich zu bewegen. Im Takt $2 \rightarrow 3$ der isochoren Abkühlung bewegt sich der Verdrängerkolben nach oben und schiebt das Arbeitsgas in den gekühlten Bereich.

Beim „Gasaustausch“ ist es zum einen wichtig, dass die Temperaturänderung des Arbeitsgases möglichst rasch erfolgt und zum anderen, dass die von außen zugeführte Wärme dem System nicht völlig verlorengeht. Beides wird mit dem Regenerator erreicht, der als Kurzzeitwärmespeicher wirkt. Der Verdrängungskolben besitzt in axialer Richtung eine Öffnung, die mit Kupferwolle gefüllt ist. Bewegt sich der Verdränger nach oben, so strömt die heiße Luft durch den Regenerator und gibt dabei einen Großteil der Wärme an die Kupferwol-

le ab. Diese Wärme wird im Regenerator gespeichert, so dass das Arbeitsgas auf dem Rückweg $4 \rightarrow 1$ vom kalten in den heißen Bereich, sich einen Großteil der zuvor abgegebenen Wärme aus der Kupferwolle zurückholen kann. Diese Wärmemenge wird demnach nicht an das Kühlsystem abgeführt, sondern bleibt innerhalb des Kreisprozesses erhalten. Mit einem idealen Regenerator erreicht der Wirkungsgrad des Stirling-Motors den maximal möglichen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine! Wir werden bei der Berechnung des Wirkungsgrades noch darauf zurückkommen.

VI.3 Thermodynamische Beschreibung des Stirling-Prozesses

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik führt die einem System zugeführte Wärmemenge dQ zu einer Änderung der inneren Energie dU sowie zur Verrichtung einer Volumenarbeit $p dV$:

$$dQ = dU + p dV \quad (1)$$

Bei einem idealen Gas beschreibt die innere Energie allein die Bewegungsenergie der Gasmoleküle. Eine Erhöhung der inneren Energie führt somit zu einem Temperaturanstieg. Mit Hilfe der molaren Wärmekapazität C_V ergibt sich

$$dQ = C_V \nu dT + p dV, \quad (2)$$

wobei ν die Gasmenge in mol bezeichnet.

Beim Stirling'schen Kreisprozess werden, wie in Abbildung 5 dargestellt, vier Zustandsänderungen durchlaufen. Wir wollen im Folgenden für jeden Takt die Energiebilanz (2) aufstellen und daraus den Wirkungsgrad des idealen Stirling-Prozesses berechnen:

1. Bei der isothermen Expansion wird dem Heizsystem die Wärmemenge Q_1 entzogen. Da die Temperatur konstant bleibt, wird diese Wärmemenge vollständig in mechanische Volumenarbeit umgewandelt.

$$dQ_1 = p dV. \quad (3)$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = \nu RT, \quad (4)$$

wobei R die ideale Gaskonstante darstellt, ergibt sich für (3)

$$dQ_1 = pdV = \nu RT_1 \frac{dV}{V}. \quad (5)$$

Durch Integration von V_1 bis V_2 (siehe Abbildung 5) ergibt sich schließlich für die Wärmemenge Q_1

$$Q_1 = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (6)$$

Da bei der isothermen Zustandsänderung die zugeführte Wärmemenge vollständig in Volumenarbeit W umgewandelt wird, gilt für die bei diesem Motortakt geleistete Arbeit

$$W_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (7)$$

2. Bei der isochoren Abkühlung wird wegen $dV = 0$ keine Volumenarbeit geleistet. Temperaturänderungen wirken sich daher nur auf die innere Energie aus:

$$dQ_2 = C_V \nu dT. \quad (8)$$

Durch Integration ergibt sich

$$Q_2 = C_V \nu \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V \nu (T_1 - T_2), \quad (9)$$

wobei dieser Ausdruck negativ ist, da Wärme nach außen abgeführt wird.² Die mechanische Arbeit W_2 ist bei diesem Motortakt Null:

$$W_2 = 0. \quad (10)$$

3. Bei der isothermen Kompression gelten die gleichen Überlegungen wie bei der isothermen Expansion. Zu berücksichtigen ist lediglich, dass die Kompression bei diesem Motortakt bei der Temperatur T_2 erfolgt und die Richtung der Integration über das Volumen entgegengesetzt von V_2 nach V_1

²Vorzeichenkonvention: Negative Vorzeichen treten bei Termen auf bei denen Wärme nach außen abgeführt wird oder wenn dem Gas von außen Arbeit zugeführt wird (Kompression). Leistet das Gas nach außen Arbeit oder wird Wärme zugeführt, sind die entsprechenden Terme positiv.

verläuft. Für die nach außen abgeführte Wärmemenge ergibt sich:

$$Q_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (11)$$

und für die Volumenarbeit

$$W_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (12)$$

4. Auch hier gelten die gleichen Überlegungen wie unter 2. Die vom Gas aufgenommene Wärmemenge Q_4 beträgt

$$Q_4 = C_V \nu (T_1 - T_2) \quad (13)$$

und es wird keine mechanische Arbeit verrichtet.

$$W_4 = 0 \quad (14)$$

Die vom Heißluftmotor geleistete Nutzarbeit W_N ergibt sich aus dem Kurvenintegral über den gesamten Kreisprozess.

$$W_N = \oint pdV \quad (15)$$

Da nur beim Durchlaufen der Isothermen Arbeit geleistet wird, ist die Nutzarbeit gerade die Summe der Teilarbeiten in den Takten $1 \rightarrow 2$ und $3 \rightarrow 4$:

$$\begin{aligned} W_N &= W_1 + W_3 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ W_N &= \nu R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Nutzarbeit ist demnach umso größer, je größer die Temperaturdifferenz und je größer das Kompressionsverhältnis V_2/V_1 ist.

Der ideale thermische Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist definiert durch das Verhältnis der Nettoarbeit W_N zur aufgenommenen Wärmemenge Q^+

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+}. \quad (17)$$

Betrachten wir zunächst einen Heißluftmotor **ohne Regenerator** und berechnen zur Bestimmung des thermischen Wirkungsgrads die aufgenommene Wärmemenge Q^+ . Im Takt $2 \rightarrow 3$ wird das Arbeitsgas isochor abgekühlt und die Wärme dem Kühlwassersystem zugeführt. Diese Abwärme geht ohne Regenerator dem System verloren, so dass bei der isochoren Erwärmung im Zyklus $4 \rightarrow 1$ die benötigte Wärme erneut aus dem Heizsystem entnommen werden muss. Die während des Kreisprozesses insgesamt aufgenommene Wärmemenge Q^+ setzt sich somit aus zwei Beiträgen zusammen, nämlich aus den zugeführten Wärmemengen bei der isothermen Expansion und der isochoren Erwärmung:

$$Q^+ = Q_1 + Q_4 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \nu (T_1 - T_2). \quad (18)$$

Zusammen mit Gleichung (16) erhalten wir nach einigen Umformungen für den thermischen Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+} = \frac{\ln \frac{V_2}{V_1} (1 - \frac{T_2}{T_1})}{\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{C_V}{R} (1 - \frac{T_2}{T_1})}. \quad (19)$$

Wie man dieser Gleichung entnehmen kann, hängt der Wirkungsgrad von der Temperaturdifferenz, vom Kompressionsverhältnis aber auch von der **Art des verwendeten Gases** ab. Im Nenner steht das Verhältnis der molaren Wärmekapazität und der Gaskonstante. Nach dem Äquipartitionsprinzip entspricht dieses Verhältnis gerade der halben Anzahl der Freiheitsgrade der Gasmoleküle. Um einen hohen Wirkungsgrad zu erzielen, werden daher bei industriell gefertigten Motoren, häufig Edelgase als Arbeitsmedium eingesetzt. Diese haben als einatomige Gase nur drei Freiheitsgrade und besitzen daher die kleinsten molaren Wärmekapazitäten.

Durch die Verwendung eines Regenerators kann der Wirkungsgrad des Heißluftmotors deutlich gesteigert werden. Mit diesem wird die Abwärme der isochoren Abkühlung im Takt $2 \rightarrow 3$ nicht an das Kühlwasser abgeführt, sondern im Regenerator (Kupferwolle) gespeichert. Ein idealer Regenerator kann die gesamte Wärme zwischenspeichern und bei der isochoren Erwärmung im Zyklus $4 \rightarrow 1$ dem Arbeitsgas wieder zuführen. Somit bleibt dieser Wärmebeitrag im System erhalten. Die einzige äußere Wärmezufuhr erfolgt dann nur bei der isothermen Expansion, so dass für die insgesamt aufgenommene Wärmemenge Q^+ gilt:

$$Q^+ = Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (20)$$

Mit Gleichung (16) erhält man für den thermischen Wirkungsgrad η_{th}^R des Stirling- Prozesses mit einem idealen Regenerator

$$\eta_{th}^R = \frac{W_N}{Q^+} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (21)$$

Somit erreicht der Stirling- Prozess den gleichen Wirkungsgrad wie der Carnot-Prozess und damit den maximal möglichen Wirkungsgrad, den eine periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine überhaupt erreichen kann.

VI.4 Betrieb des Heißluftmotors als Wärmepumpe und Kältemaschine

Der Stirling'sche Kreisprozess ist einer der wenigen Kreisprozesse, der umkehrbar ist. Wird das Schwungrad des Motors von außen angetrieben, so kann dieser auch als Kältemaschine oder Wärmepumpe betrieben werden.

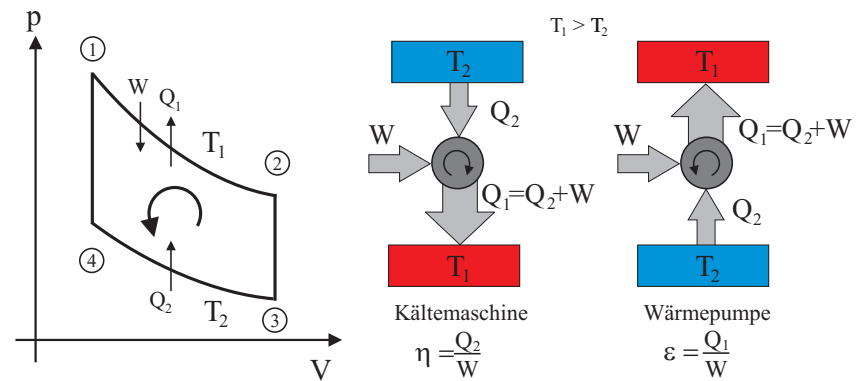


Abbildung 7: Links: Beim Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine oder Wärmepumpe wird das pV- Diagramm links herum durchlaufen. Rechts: Energiebilanz von Kältemaschine und Wärmepumpe.

Bei einem äußeren Antrieb wird der **Kreisprozeß** im pV- Diagramm in umgekehrter Richtung, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen³. In diesem Fall kehren sich die Richtungen aller Energieströme um.

³Der Drehsinn bezieht sich hier auf das Durchlaufen des Prozesses im pV-Diagramm und hat nichts mit der Drehrichtung der Kurbelwelle zu tun!

Beim Betrieb als Kältemaschine wird dem zu kühlenden Bereich die Wärmemenge Q_2 entzogen und dem Wärmereservoir die Wärmemenge $Q_1 = W + Q_2$ zugeführt (Abbildung 7). W bezeichnet dabei die von außen zugeführte mechanische Arbeit. Der im Praktikum verwendete Motor arbeitet als Kältemaschine, wenn er im Uhrzeigersinn von außen angetrieben wird. Dabei sinkt die Temperatur im oberen Raum und die Kühlwassertemperatur steigt. Wird der Motor entgegen dem Uhrzeigersinn betrieben, so arbeitet er als Wärmepumpe. Dabei sinkt die Temperatur des Kühlwassers und der obere Bereich des Motors wird aufgeheizt.

Der Wirkungsgrad einer Kältemaschine lässt sich durch das Verhältnis der der kalten Seite entzogenen Wärmemenge Q_2 zur zugeführten mechanischen Arbeit W definieren:

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (22)$$

Die Effizienz einer Wärmepumpe wird durch die sogenannte Leistungsziffer ϵ charakterisiert:

$$\epsilon = \frac{Q_1}{W}. \quad (23)$$

Die Berechnung dieses Ausdrucks lässt sich analog wie bei der Wärmekraftmaschine durchführen, sie hängt nur von den Temperaturen der beiden Wärmereservoirs ab:

$$\epsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1 \quad ! \quad (24)$$

VI.5 Bedienung des Versuchsaufbaus

Aufbau des Heißluftmotors

Der im Praktikum eingesetzte Heißluftmotor besteht aus einem Glaszylinder, in dem sowohl Arbeits- als auch Verdrängerkolben vertikal angeordnet sind. Beide Kolben werden durch eine gemeinsame Kurbelwelle gesteuert, wobei der Verdrängerkolben dem Arbeitskolben um 90° vorseilt. Der untere Teil des Zylinders ist doppelwandig und wird mit Kühlwasser versorgt. Die Temperatur des zufließenden als auch des abfließenden Wassers können mit Hilfe von Thermoelementen gemessen werden. Zusätzlich wird die Durchflussmenge mit einem elektronischen Durchflussmengenmessgerät angezeigt.

Der Heißluftmotor ist mit einem abnehmbaren Zylinderkopf ausgestattet. Beim

Betrieb als Wärmekraftmaschine wird auf den Zylinder ein elektrisch beheizbarer Kopf montiert, der den oberen Bereich des Motors heizt.

Die Heizleistung kann mit Hilfe eines externen Netzteils stufenlos eingestellt werden (max. 300 W) und mit Hilfe von zwei Multimetern gemessen werden. Das Amperemeter ist nur für einen Dauerstrom von 10 A ausgelegt. Da im Betrieb höhere Ströme auftreten, ist vor dem Amperemeter ein Stromwandler geschaltet, der den Strom um das Fünffache reduziert. Der tatsächliche fließende Strom ist daher um einen Faktor fünf höher als das Amperemeter anzeigt. Beim Betrieb als Wärmepumpe bzw. Kältemaschine kann der geheizte Kopf durch einen anderen Zylinderkopf ausgetauscht werden. In diesem Kopf ist ein Reagenzglas montiert, das in den Motor hineinreicht. Das Reagenzglas wird mit Wasser gefüllt und die Temperatur des Wassers mit einem weiteren Thermometer gemessen. Der Antrieb für die Wärmepumpe/Kältemaschine erfolgt über einen Riemenantrieb des Schwungrades mittels eines Elektromotors. Achten Sie unbedingt darauf, dass alle rotierenden Teile und der Antriebsriemen durch die Riemenabdeckung geschützt sind. Die Leistung des Elektromotors kann durch ein separates Netzteil variiert werden und durch eine Strom- und Spannungsmessung bestimmt werden.

Der Verdrängerkolben ist wie der Zylinder aus Glas gefertigt und auf einer wassergekühlten Aluminiumplatte montiert. Der Zu- und Abfluss des Kühlwassers erfolgt durch ein koaxiales Rohr in der Pleuelstange. Diese zusätzliche Kühlung erhöht die Effizienz des Wärmeaustauschs mit dem kalten Wärmereservoir. In axialer Richtung besitzt der Verdränger eine Öffnung, die mit Kupferwolle gefüllt ist und als Regenerator wirkt.

Zur Darstellung von pV-Diagrammen werden Druck und Volumen gemessen. Die Volumenmessung beruht auf der Messung der Auslenkung des Arbeitskolbens: An der Unterseite des Arbeitskolbens ist eine Schnur befestigt, die über eine Umlenkrolle einen magnetischen Sensor auslenkt. Somit wird die Bewegung des Kolbens in eine korrespondierende Drehung des Drehung und damit in eine dem zurückgelegtem Weg proportionale Spannung übertragen. Die Druckmessung im Kompressionsraum erfolgt mit Hilfe eines elektronischen Drucksensors. Das Potentiometer und der Drucksensor werden mit einem Interface ausgelesen und mit Hilfe einer speziellen Software (Cassy) auf einem Computer dargestellt.

Inbetriebnahme der Wasserkühlung

Schalten Sie zunächst die Wasserkühlung ein: Damit beide Motoren gekühlt werden, müssen die Kugelhähne des jeweiligen Motors an der Wandinstallation

geöffnet sein. Der Hahn **D** steuert den Kühlkreislauf des γ - Heißluftmotors und muss während der Versuchsdurchführung geschlossen bleiben. Kontrollieren Sie den Wasserfluss mit Hilfe des Durchflussmessers. Durch zweimaliges Drücken der Taste **Funktion** und anschließendem Drücken der Taste $\leftarrow$ wird der Durchfluss in ml/min angezeigt. Die Durchflussmenge soll im Bereich von 200 ml/min bis 300 ml/min liegen.

Kontrollieren Sie, ob der Motor ausreichend geschmiert ist. Auf der Innenseite des Glaszylinders muss ein deutlicher Ölfilm sichtbar sein. Ist dies nicht der Fall, wenden Sie sich an den Assistenten.

Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine oder Wärmepumpe

Wird der Heißluftmotor als Kältemaschine betrieben, so wird dem oberen Teil des Zylinders pro Umlauf die Wärme Q_2 entzogen und dem Kühlkreislauf die Wärme Q_1 zugeführt. Da der Wärmefluss vom kälteren zum wärmeren Reservoir nicht selbstständig abläuft, muss dafür pro Umlauf die mechanische Arbeit W_M aufgewendet werden. Für die an das Kühlsystem abgegebene Wärme gilt im idealen Fall: $Q_1 = Q_2 + W_M$.

In diesem Versuchsteil sollen Sie Q_1 , Q_2 und W_M experimentell bestimmen und den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Q_2}{W_M} \quad (25)$$

berechnen.

Die dem oberen Teil des Zylinders entzogene Wärme Q_2 wird durch eine Kompensationsmessung bestimmt. Mit Hilfe einer Heizwendel wird die Temperatur des Zylinderkopfes konstant gehalten. Dadurch wird die von der Kältemaschine abgeführte Wärme kompensiert: Die von der Heizung pro Umlauf zugeführte elektrische Arbeit W_H entspricht dann gerade der dem Zylinderkopf von der Kältemaschine entzogenen Wärme Q_2 :

$$Q_2 = W_H = \frac{U_H I_H}{f}, \quad (26)$$

wobei U_H und I_H die Heizspannung und den Heizstrom bezeichnen und f für die Motordrehzahl steht.

Die an das Kühlwasser abgegebene Wärme Q_1 wird mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$Q_1 = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (27)$$

berechnet. Hierbei bezeichnet c_W und ρ die Wärmekapazität und Dichte von Wasser ($c_W=4180 \text{ J/(kg K)}$), $\Delta T = T_{ab} - T_{zu}$ und $\dot{V}$ die Temperaturdifferenz von Zu- und Ablauf und den Volumenstrom des Kühlwassers.

Die pro Umdrehung zugeführte mechanische Arbeit lässt sich durch eine Strom- und Spannungsmessung des elektrischen Antriebsmotors bestimmen:

$$W_M = \frac{U_M I_M}{f}. \quad (28)$$

Dabei ist zu beachten, dass auch der Elektromotor einen Wirkungsgrad kleiner als Eins besitzt. Sie sollten dies bei der Diskussion Ihrer Ergebnisse berücksichtigen.

Betrieb des Heißluftmotors als Wärmekraftmaschine

Der Motor wird mit Hilfe einer Heizwendel unter Zuführung der elektrischen Energie Q_{el} von außen beheizt. Bei der Beheizung des Motors treten bereits Verluste auf, die dazu führen, dass ein Teil der zugeführten Wärme gar nicht in den Kreisprozess mit einfließt. Vor allem bei dem im Praktikum verwendeten Motor sind diese erheblich. Um Ihnen einen Einblick in das Funktionsprinzip des Motors zu geben, sind die wesentlichen Teile dieses Demonstrationsmotors aus Glas gefertigt. Dadurch treten sehr große Verluste bedingt durch Wärmeabstrahlung und Wärmeleitung auf. Bezeichnen wir diese Verluste durch Q_v , so wird effektiv nur die Wärme $Q_{el} - Q_v$ in den Kreisprozess von außen eingekoppelt.

Ein Teil dieser Wärme wird von dem Motor in mechanische Energie W_{mech} umgewandelt. Die mechanische Arbeit W_{mech} wird durch zwei Methoden bestimmt. Die Aufnahme des pV- Diagramms und Berechnung der Fläche erfolgt mit einem Computer. Hieraus lässt sich die Arbeit W_{pV} bestimmen.

Bei der zweiten Methode wird die abgegebene Arbeit W_D durch eine Drehmomentmessung an der Motorachse mit Hilfe eines Pronyschen Bremszaums bestimmt (siehe Abbildung 8). Dieser besteht aus zwei hölzernen Bremsbacken, die an der Motorwelle montiert werden. Mit Hilfe zweier Schrauben kann eine variable Bremskraft auf die Welle ausgeübt werden. Zur Messung des Drehmomentes wird der Bremszaum in einen Kraftmesser eingehängt und so ausgerichtet, dass der Bremszaum waagrecht ausgerichtet ist und der Kraftmesser senkrecht dazu hängt. In diesem Fall gilt für das Drehmoment D :

$$D = lF, \quad (29)$$

wobei l die Länge des Bremszaums von der Motorachse bis zur Aufhängung des

Kraftmessers ist und F die Kraft. Für die pro Motorzyklus abgegebene Arbeit W_D gilt somit:

$$W_D = 2\pi D, \quad (30)$$

bzw. für die Leistung

$$P_D = W_D f, \quad (31)$$

wobei f die Drehzahl des Motors ist.

Statt des Kraftmessers können Sie auch eine Waage benutzen. Dies hat den Vorteil, dass der Bremszaum nicht ausgerichtet werden muss. Allerdings „flackert“ die Anzeige etwas. Probieren Sie aus, welche Methode Sie für besser halten.

Neben der Umwandlung in mechanischer Energie, fließt ein großer Teil der zugeführten Wärme „ungenutzt“ in den Kühlkreislauf. Diese Abwärme wird im folgenden durch Q_{ab} bezeichnet. Desweiteren kommen Reibungsverluste Q_R durch Kolben und Lager hinzu. Die Energiebilanz des Heißluftmotors lässt sich somit wie folgt angeben:

$$Q_{el} = Q_v + W_{mech} + Q_{ab} + Q_R. \quad (32)$$

Experimentell können die Größen Q_{el} , W_{mech} und Q_{ab} unmittelbar bestimmt werden. Die Verluste Q_v und Q_R lassen sich allerdings nicht ohne größeren Aufwand messen. Diese sind durch eine Differenzmessung abzuschätzen. Bezeichnen wir die allgemeinen Verluste durch $Q_V = Q_v + Q_R$ so gilt nach (32):

$$Q_V = Q_v + Q_R = Q_{el} - Q_{ab} - W_{mech}. \quad (33)$$

Die pro Motorzyklus von außen zugeführte Wärme, wird aus der elektrischen Heizleistung und der Motordrehzahl f bestimmt:

$$Q_{el} = \frac{P_{el}}{f} = \frac{IU}{f}. \quad (34)$$

Die an das Kühlwasser abgegebene Wärme Q_{ab} wird wie bei Aufgabe 1 mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$Q_{ab} = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (35)$$

berechnet.

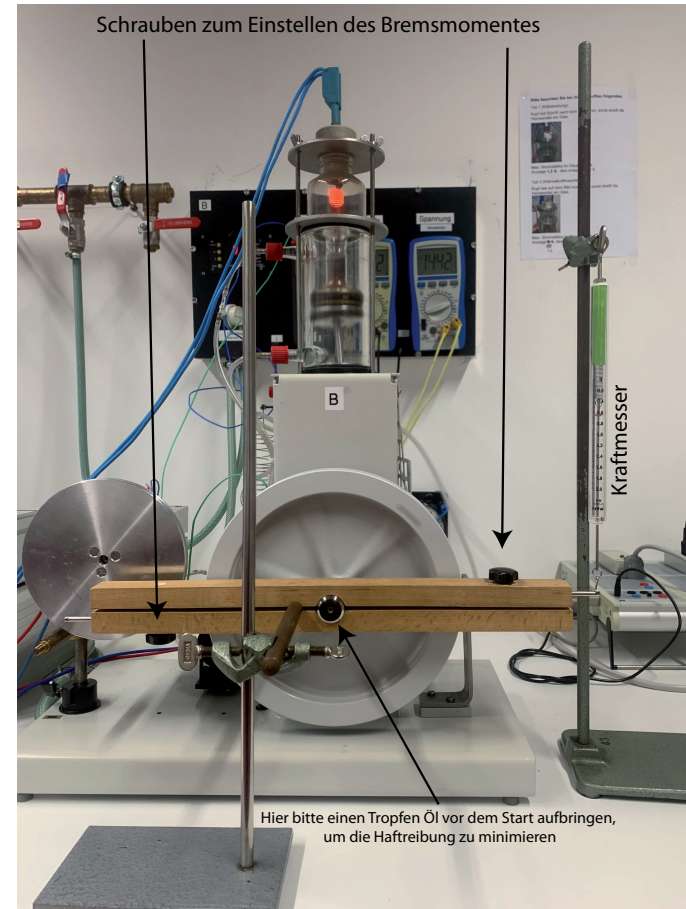


Abbildung 8: Bestimmung der mechanischen Arbeit durch eine Drehmomentmessung an der Motorwelle.

Bedienung der Software

Für das Programm Cassy-Lab sind für jede Aufgabe eigene Makros erstellt und auf dem Desktop des Versuchscomputer abgelegt. Die Makros sind bereits vorkonfiguriert, so dass Sie nur noch die Messparameter einstellen müssen. Abbildung 9 zeigt Ihnen die wichtigsten Funktionen und Einstellungen, die Sie für die Durchführung des Versuchs kennen sollten. Beim Starten einer neuen Messung wird die alte automatisch gelöscht und die Ergebnisse der neuen Messung werden im Plotfenster dargestellt. Ein Einstellen der Messzeit wird nur für den letzten Versuchteil benötigt, bei den anderen Versuchteilen läuft die Messwertaufzeichnung so lange, bis sie wieder auf den Button für das Starten einer neuen Messung drücken. Das beendet eine laufende Messung, startet aber nicht direkt eine neue. Durch einen Rechtsklick auf den Graph können Sie weitere

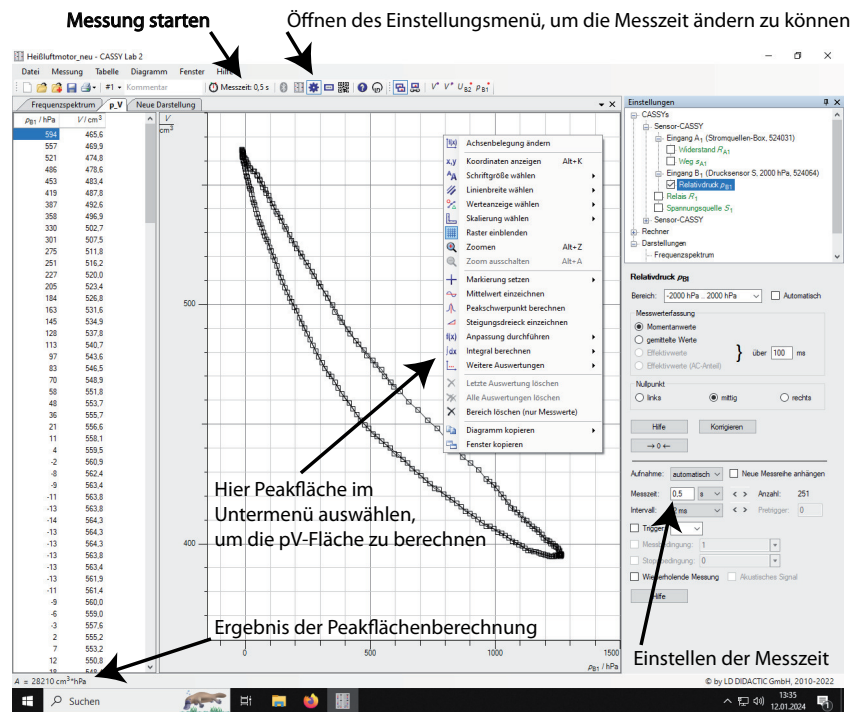


Abbildung 9: Einstellungs Fenster der Software CASSY LAB.

Einstellungen vornehmen. Es erscheint ein Popup-Menu, das weitgehend selbst erklärend sein sollte. Ebenfalls können Sie durch einen rechten Klick auf die Koordinatenachsen den Wertebereich verändern, beispielsweise den anzuzeigenden Bereich einstellen. Zur Bestimmung der Fläche des pV-Diagramms, klicken sie rechts auf das Diagramm und wählen Sie aus dem Menüpunkt „Integral berechnen“, die Option „Peakfläche“ aus. Suchen Sie im pV-Diagramm den Bereich bei dem ein Überlapp der Messpunkte zu Beginn und am Ende der Messung vorliegt. Fahren Sie mit dem Mauszeiger bei gedrückter linker Maustaste von außen nach innen über diesen Bereich. Der komplette Umfang der Kurve muss sich dabei verfärben. Nach dem Loslassen der Taste wird der Flächeninhalt in der linken unteren Ecke des Bildschirms angezeigt. Durch Drücken der Tastenkombination „ALT+T“ können Sie den Flächeninhalt zusätzlich auf dem Diagramm platzieren.

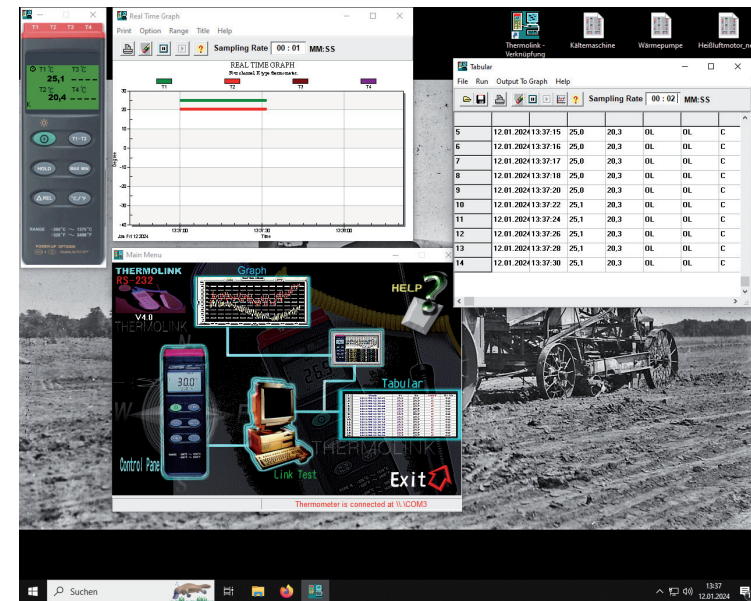


Abbildung 10: Bestimmung der mechanischen Arbeit durch die Fläche des pV-Diagramms.

Die Software Thermolink zeigt die gemessenen Temperaturen der an das

Thermometer angeschlossenen Thermoelemente an. Abbildung 10 zeigt alle möglichen Fenster, wie Sie die Messwerte des Thermometers darstellen können. Am wichtigsten ist die graphische Darstellung der Temperaturen der Zu- und Abflüsse des Kühlwassers. Wenn Sie das Programm erstmals geöffnet haben, sollten Sie es bis Sie mit dem Versuch komplett fertig sind nicht wieder schließen. Sonst könnte es dazu kommen, dass das Programm die Kommunikationsverbindung zum Thermometer nicht mehr erkennt und der Computer neu gestartet werden muss.

VII Durchführung des Versuchs

Sicherheitshinweise:

Lassen Sie den Heißluftmotor niemals unbeaufsichtigt laufen!

Der beheizte Bereich des Motors wird sehr heiß. Achten Sie beim Umgang mit dem Motor, dass Sie diese Bereiche nicht berühren.

Verwenden Sie bei allen Strom- und Spannungsmessungen ausschließlich die vollisolierten Sicherheitsmessleitungen.

Der Motor darf nur bei eingeschalteter Wasserkühlung betrieben werden.

Die Heizwendel des Keramik-Zylinderkopfs darf nur bei laufendem Motor bis zur Gelbglut erhitzt werden. Im Fall eines Stillstandes, werfen Sie den Motor rasch wieder an oder schalten Sie das Netzteil aus.

Der Heizstrom des Teflon-Zylinderkopf darf 6 A nicht übersteigen (Anzeige am Amperemeter maximal 1,2 A).

Der Betrieb des Motors als Wärmepumpe oder Kältemaschine darf nur bei montierter Riemenabdeckung erfolgen.

Die Drehzahl soll nicht kleiner als $2,5 \text{ s}^{-1}$ und nicht größer als $7,0 \text{ s}^{-1}$ sein.

Die Befestigungsschrauben für die Zylinderköpfe nicht zu fest anziehen, sonst zerstören Sie den Glaszylinder.

Nehmen Sie den Pronyzaun bei noch laufendem Motor nach Lösen der Bremsmomentschrauben wieder ab, da es sonst einen Rückschlag beim Stehenbleiben des Motors gibt.

Aufgabe 1: Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine und quantitative Bestimmung der Kälteleistung

Montieren Sie den **Teflon-Zylinderkopf** mit der Heizwendel auf den Motor. **Überprüfen Sie anschließend ob die Heizwendel nicht den Verdränger berührt und ziehen Sie gleichmäßig und nicht zu fest die Muttern an.** Im Zylinderkopf ist ein Thermoelement eingebaut, mit dem die Temperatur im Zylinder gemessen werden kann. Verbinden Sie das Anschlusskabel des Thermoelements mit dem Digitalthermometer an der Medientafel (Anschluss T3). Schließen Sie den Heizkopf an das Netzteil an. Das Netzteil ist in der Regel bereits mit der Medientafel verbunden. **Stellen Sie den Bereichsschalter des Amperemeters auf 20 A AC und den Spannungsbereich des Voltmeters auf 20 V AC.** Zwischen dem Amperemeter und dem Netzteil ist ein Stromwandler geschaltet. Dadurch zeigt das Amperemeter nur 1/5 des tatsächlich fließenden Stroms an.

Spannen Sie den Antriebsriemen über das Schwungrad des Motors und an der Seite des Elektromotors über die Riemenscheibe. **Anschließend ist die Riemendeckung zu montieren.**

Die Stromausgangsbuchsen des Motornetzteils ist an das analoge Dreheiseninstrument angeschlossen und die Spannungsbuchsen an das daneben liegende Multimeter. Schalten Sie den Computer ein und starten Sie das Programm „Thermolink“ zum Auslesen des Digitalthermometers. Zeichnen Sie die Temperaturen des Kühlwassers und die Temperatur im oberen Teil des Motors auf. Starten Sie nach kurzem Abwarten den Elektromotor: Schalten Sie den Netzschalter auf der Rückseite ein und wählen Sie die gewünschte Drehrichtung (kalt, warm) auf der Frontseite aus. Vergewissern Sie sich, dass der Drehzahlregler auf maximaler Drehzahl steht. Durch Betätigung des Hauptschalter auf der Frontseite startet der Motor.

Die Temperatur im oberen Teil des Motors beginnt zu sinken. Versuchen Sie nun durch die elektrische Heizung die Temperatur wieder auf den ursprünglichen Wert einzustellen: Drehen Sie den Einstellregler am Heizungs- Netzteil auf Nullstellung und schalten Sie dann das Netzteil ein. Erhöhen Sie nun **langsam** die Heizleistung bis die Temperatur wieder auf den Anfangswert angestiegen ist.

Achtung: Der maximale Heizstrom darf 6 A nicht übersteigen! Das entspricht einer Anzeige am Amperemeter von 1,2 A!

Der Temperaturanstieg erfolgt nicht spontan sondern mit einer Zeitverzögerung. Sie müssen daher nach jeder Leistungseinstellung abwarten bis sich die Temperatur stabilisiert hat und dann nachregeln. Auf keinen Fall darf die Heizleistung zu groß eingestellt werden! Sonst müssen Sie längere Zeit warten, bis sich die Temperaturen wieder gefallen sind.

Wenn Sie den ursprünglichen Temperaturwert wieder über einen längeren Zeitraum erreicht haben, protokollieren Sie die folgenden Größen:

- Heizstrom I_H (**Achtung:** muss am Ende $\times 5$ gerechnet werden!)
- Heizspannung U_H
- Durchflussmenge $\dot{V}$ des Kühlwassers (Mittelwert über 5 Messungen)
- Temperaturdifferenz des Kühlwassers $T_{ab} - T_{zu}$
(*Tipp:* über das Thermoelement ablesen)

Die von außen zugeführte mechanische Leistung W_M wird in der nächsten Aufgabe bestimmt.

Aufgabe 2: Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe

Achtung: Beim Umbau sollte die Drehzahl des Elektromotors **nicht** verstellt werden, da ansonsten einige Messgrößen zwischen Aufgabe 1 und 2 doppelt gemessen werden müssen! Ohne Verstellung dürfen (und sollen!) Messgrößen aus Aufgabe 1 und 2 zusammen verwendet werden.

Bei dieser Aufgabe soll der Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine und Wärmepumpe qualitativ untersucht werden. Durch Bestimmung der „Gefrierwärme“ von Wasser soll zusätzlich der Wirkungsgrad der Kältemaschine abgeschätzt werden.

Stecken Sie den **Zylinderkopf mit dem Reagenzglas** auf den Motor. Achten Sie darauf, dass der Kopf plan sitzt und das Reagenzglas nur so weit in den Verdrängerkolben eintaucht, dass es nicht vom Verdränger berührt wird. Um dies zu überprüfen, drehen Sie den Verdränger mit Hilfe des Schwungrades vorsichtig in den oberen Totpunkt. Wenn die Position in Ordnung ist, ziehen Sie die Zylinderkopfmutter gleichmäßig an.

Messen Sie mit der Pipette ungefähr 1 ml Wasser ab, füllen dieses in das Reagenzglas und stecken Sie zusätzlich den Temperaturfühler mit hinein. Achten Sie darauf, dass das Thermometer möglichst zentrisch sitzt und nicht an den Rand des Reagenzglases stößt.

Starten Sie das Programm „Kältemaschine.lab“ sowie das Programm „Thermolink“ zum Auslesen des Digitalthermometers. Möglicherweise ist das Programm noch geöffnet. Vor erneutem Öffnen das Programmes, das noch offene Fenster erst schließen. Sonst könnte es passieren, dass Thermolink die Verbindung zum Thermometer nicht mehr aufbauen kann und der Computer erst neu gestartet werden muss. Beginnen Sie mit der Aufzeichnung der Temperatur des Wassers im Reagenzglas und des Kühlwassers zunächst ohne dass der Motor läuft. Nach ungefähr einer Minuten können Sie dann den Motor starten.

Protokollieren Sie die Motorleistung durch eine Spannungs- und Strommessung. Lassen Sie den Motor als Kältemaschine mindestens 10 bis 15 Minuten laufen, bis die Temperatur deutlich unter 0°C gefallen ist und sich nicht mehr ändert. Nach längerer Verwendung als Kältemaschine sind die folgenden Größen zu notieren:

- Motorstrom I_M
- Motorspannung U_M
- Drehzahl f (Mittelwert über drei Messungen mit dem optischen Drehzahlmessgerät)
- Gefrierzeit t_f des Wassers im Reagenzglas aus dem Temperaturplateau)

Stoppen Sie das Messprogramm nachdem das Temperaturminimum erreicht wurde (**Motor nicht abschalten!**) und *speichern Sie den Temperaturverlauf*. Gegebenenfalls sollten Sie interessante Kurvenverläufe vergrößert darstellen und separat abspeichern. Speichern Sie ebenfalls den Temperaturverlauf des Kühlwassers ab.

Betreiben Sie unmittelbar danach den Motor als Wärmepumpe. Starten Sie zunächst, nachdem Sie die Messdaten der Kältemaschine gespeichert haben, in CassyLab und ThermoLink eine neue Messung. Schalten Sie den Drehrichtungsschalter auf „Warm“. Messen Sie erneut den Temperaturgang des Wassers

im Reagenzglas und den Temperaturverlauf des Kühlwassers und *speichern Sie auch diese Daten ab*.

Aufgabe 3: Betrieb als Wärmekraftmaschine

Montieren Sie den **Keramik-Zylinderkopf** mit der Heizwendel auf den Motor. Schließen Sie den Heizkopf an das Netzteil an. **Vergewissern Sie sich durch händisches Drehen des Schwungrades, dass die Heizwendel nicht an den Verdrängerkolben anstößt!**

Entfernen Sie die Riemenabdeckung und den Antriebsriemen. Positionieren Sie den Verdrängerkolben in den unteren Totpunkt und schalten Sie das Netzteil bei maximaler Leistungsabgabe ein. Lassen Sie die Heizwendel ungefähr fünf Sekunden vorglühen und werfen Sie dann das Schwungrad des Stirlingmotors im Uhrzeigersinn von Hand an. Vorsicht: Klemmen Sie nicht Ihre Finger ein! Wiederholen Sie die Anwerfversuche so lange, bis der Motor von selbst läuft. Sobald der Motor rund läuft, verringern Sie die Leistung, indem Sie den Heizstrom reduzieren. Der Maximalstrom ist am Aufbau angegeben. In der Zeit, in der sich der Motor nun einläuft, kümmern Sie sich um die Bedienung der Software: Starten Sie das Programm „Heißluftmotor_neu.lab“ auf dem Desktop. Nehmen Sie ein pV-Diagramm auf und bestimmen Sie zur Übung die eingeschlossene Fläche (siehe Abb. 9).

Wenn der Motor eingelaufen ist, protokollieren Sie folgende Messwerte:

- Heizstrom I_H (**Achtung:** Faktor 5 des Stromwandlers berücksichtigen!)
- Heizspannung U_H
- Durchflussmenge $\dot{V}$ des Kühlwasser (Mittelwert über 5 Messungen)
- Temperaturdifferenz des Kühlwasser $T_{ab} - T_{zu}$ (Tipp: Ablesen direkt über das Thermometer, an dem die Thermolemente angeschlossen sind)
- Drehzahl f (Mittelwert über drei Messungen mit dem optischen Drehzahlmessgerät)
- Fläche des pV-Diagramms (Mittelwert über 3 Messungen)

Da kein Bremszaum angebracht worden ist, handelt es sich hierbei um eine *Leerlaufmessung*. Messen Sie anschließend die real abgegebene Arbeit W_D durch ei-

ne Drehmomentmessung. Lösen Sie hierfür die Schrauben des Prony- Zaums, so dass sich dieser leichtgängig auf die Achse des laufenden Motors schieben lässt. Geben Sie vorher etwas Silikonöl auf die Motorwelle, sodass sich die Haftreibung zwischen Welle und Pronyzaun verringert. Hängen Sie den Federkraftmesser in den Bremszaun ein und ziehen Sie die Schrauben so an, dass eine Kraft von ungefähr 0,8 N wirkt. Durch Variierung der Höhe des Federkraftmessers wird der Prony- Zaun in der Horizontalen gehalten. Da es passieren kann, dass der Bremszaun von der Welle fällt, müssen Sie diesen mit einer Stange sichern. Lassen Sie den Motor nun einige Zeit einlaufen und korrigieren Sie die waagrechte Lage des Prony- Zaums nach.

Zu Protokollieren sind folgende Messgrößen:

- Eingestellte Bremskraft F (4 verschiedene Einstellungen)
- Drehzahl f (zu *jeder* eingestellten Bremskraft den Mittelwert über 3 Messungen)
- Flächen im pV-Diagramm (zu *jeder* Kraft den Mittelwert über 3 Messungen)

Die Messungen sollten Sie für insgesamt vier verschiedene Bremskräfte, und zwar für 0,8 N bis 0,2 N in Schritten von 0,2 N durchführen.

Achten Sie darauf, dass Sie den Motor nicht abwürgen. Im Fall eines Stillstandes werfen Sie den Motor rasch wieder an oder schalten das Netzteil aus!

VIII Auswertung

Zu Aufgabe 1: Berechnen Sie aus der Kompensationsmessung die Kälteleistung des Motors. Stellen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 2 gemessenen Leistung/Arbeit des Elektromotors die Energiebilanz auf und diskutieren Sie gegebenenfalls die Diskrepanz. Vergessen Sie hierbei nicht, Q_1 , Q_2 und W_M explizit anzugeben! Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Kältemaschine.

Zu Aufgabe 2: Interpretieren Sie den Temperaturverlauf des Wassers im Reagenzglas beim Betrieb des Motors als Kältemaschine und Wärmepumpe. Gehen Sie dabei auch auf den Temperaturverlauf des Kühlwassers ein. Warum verläuft der Aufheizvorgang des Wassers viel schneller als der Abkühlvorgang?

Schätzen Sie aus der Gefrierzeit des Wassers erneut die Kälteleistung der Kältemaschine ab und vergleichen Sie diesen mit dem Wert, den Sie in der Auswertungsaufgabenteil mittels W_M zuvor bestimmt haben (spezifische Schmelzwärme $\lambda_{H_2O}=335 \text{ J/g}$).

Zu Aufgabe 3: Berechnen Sie aus den Messdaten der Leerlaufmessungen folgende Größen und geben Sie diese am besten tabellarisch an:

f	P_{el}	Q_{el}	P_{ab}	Q_{ab}	P_{pV}	Q_{pV}	η_{th}
---	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-------------

Der reale thermische Wirkungsgrad η_{th} berechnet sich aus dem Verhältnis der mechanischen Arbeit W_{pV} und der zugeführten Wärme Q_{el} ($\eta_{th} = \frac{W_{pV}}{Q_{el}}$).

Stellen Sie die Energiebilanz auf und berechnen Sie hieraus die Motorverluste Q_V . Diskutieren Sie die einzelnen Beiträge und überlegen Sie sich, wo die Ursachen für die hohen Verluste liegen könnten.

Bestimmen Sie aus den Drehmomentmessungen die mechanische Arbeit W_D und W_{pV} und berechnen Sie den thermische Wirkungsgrad η_{th} sowie den effektiven Wirkungsgrad $\eta_{eff} = W_D/Q_{el}$ (Die Länge des Bremszauns von der Motorachse zum Aufhängepunkt des Kraftmessers beträgt 25 cm). Tragen Sie η_{th} und η_{eff} als Funktion der Frequenz auf. Versuchen Sie den Kurvenverlauf zu interpretieren. Warum sind die beiden Wirkungsgrade nicht gleich groß?

Versuch 223 Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung

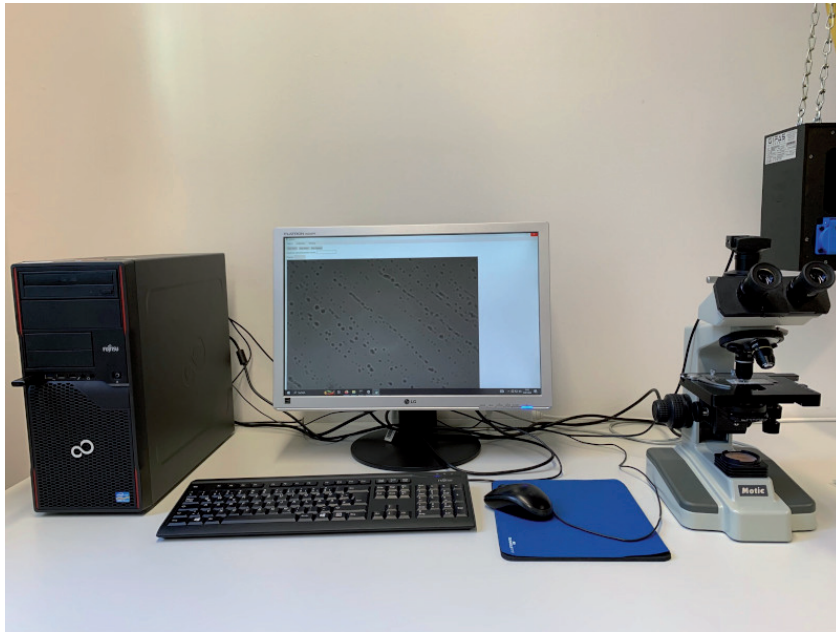


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Messprogramm, Jupyternotebook und Excel
- Thermometer
- Objektmikrometer

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Demtröder, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Die Grundlagen zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Sie in der Versuchsbeschreibung des Versuchs 251: *Statistik des radioaktiven Zerfalls* nachlesen.
- Homepage des Praktikums <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomial- und Gauß-Verteilung.

Verständnisfragen:

- Was ist Wärme aus Sicht der kinetischen Theorie der Wärme? Was besagt der Gleichverteilungssatz? Wie hoch ist die thermische Geschwindigkeit eines Partikels der Masse 10^{-15} kg bei Zimmertemperatur?
- Berechnen Sie das Produkt kT für Zimmertemperatur und geben Sie diesen in der Einheit eV an. Diesen Wert sollten Sie sich für die Zukunft unbedingt merken.
- Was bezeichnet man als Brownsche Bewegung? Worin liegt die Ursache dieser Bewegung? Welche Größen haben Einfluss auf die Brownsche Bewegung?
- Wie groß ist der zu erwartende Wert der mittleren Verschiebung bzw. der mittleren quadratischen Verschiebung eines Partikels.
- Berechnen Sie die mittlere quadratische Verschiebung eines Partikels (Partikelradius $a=500$ nm) suspendiert in Wasser ($T=20^\circ\text{C}$) innerhalb eines Zeitraums von $t=1$ s. Die Viskosität von Wasser können Sie Abbildung 13 entnehmen.

- Wozu wird das Immersionsöl benötigt?

IV Aufgaben

1. Präparieren Sie eine Mikroskopprobe einer Partikelsuspension.
2. Nehmen Sie jede Sekunde und mindestens 150 Mal das Mikroskopbild eines einzelnen Partikels auf.
3. Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops mit einem Objektmikrometer.
4. Vermessen Sie die Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder.
5. Berechnen Sie aus der mittleren quadratischen Verschiebung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante.

V Motivation

Mit Blütenpollen läßt sich die Existenz von Atomen und Molekülen beweisen

„Heute vor 100 Jahren, am 11. Mai 1905, reichte Albert Einstein bei den „Annalen der Physik“ eine wichtige Arbeit ein, in der er die sogenannte Brownsche Bewegung erklärte. Dem schottischen Botaniker Robert Brown war bereits im Jahr 1827 aufgefallen, daß Blütenpollen in einem Glas Wasser eine eigenartige Zickzackbewegung ausführen. Was war die Ursache dafür? Alle Versuche, diese Brownsche Bewegung zu erklären, scheiterten zunächst. Sie blieb jahrzehntelang geheimnisvoll. Erst Albert Einstein erkannte, daß die Bewegung der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit durch ein fortwährendes Stoßen der Wassermoleküle verursacht wird. Dies war in jener Zeit tatsächlich noch ein gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist. Und gleichzeitig paßte Einsteins Beschreibung zur molekularen Theorie der Wärme. Je wärmer beispielsweise Wasser ist, um so größer ist die mittlere Geschwindigkeit, mit der die Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stöße verursachen können. So erklärt sich auch der Begriff Thermodynamik: Wärme ist eben etwas Dynamisches. Einstein schrieb damals an einen Freund, daß „unter der Voraussetzung der molekularen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von der Größenordnung

1/1000 Millimeter bereits eine wahrnehmbare ungeordnete Bewegung ausführen müssen, welche durch die Wärmebewegung erzeugt ist.“

Nahezu zeitgleich mit Albert Einstein lieferte auch der polnische Physiker Marian Smoluchowski eine korrekte Erklärung der Brownschen Bewegung. Es war dann allerdings der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin der einige Jahre später die Brownsche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigte. Dafür wurde Perrin im Jahr 1926 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. ¹

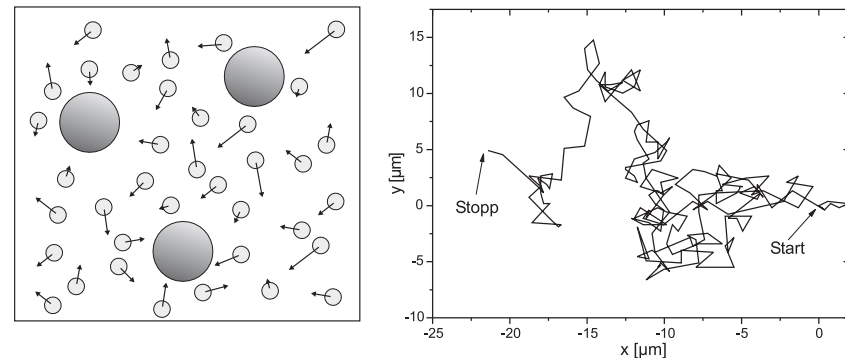


Abbildung 2: Links: Modell der Brownschen Bewegung. Die Moleküle des umgebenden Mediums stoßen aufgrund ihrer thermischen Energie mit den suspendierten Partikeln, wodurch sich diese auf völlig unregelmäßigen Bahnen bewegen. Rechts: Gemessene Bahn eines einzelnen Partikels.

In diesem Versuch werden Sie die Brownsche Bewegung von Partikeln suspendiert in Wasser mit einem Mikroskop beobachten und deren statistische Bewegung untersuchen (Abbildung 2). Durch Vermessen der Teilchenbahn und der Berechnung der pro Zeiteinheit auftretenden mittleren Verschiebung, können Sie die Boltzmannkonstante bestimmen.

Eine genaue Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung ist nur bei der Beobachtung sehr vieler Einzelschritte möglich und daher im Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich. Bei einer sorgfältigen Durchführung ist aber eine Genauigkeit von besser als 10 % möglich.

¹Norbert Lossau, Artikel vom 11. Mai 2005 in der Zeitung „Die Welt“

VI Grundlagen

VI.1 Brownsche Bewegung

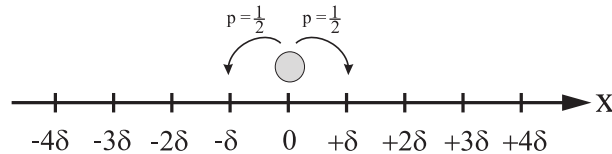


Abbildung 3: *Eindimensionaler Random-Walk. Bei jedem Stoß bewegt sich das Partikel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts. Die Sprungweite δ soll bei allen Stößen gleich groß sein*

Die Brownsche Bewegung lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Random-Walk Modell quantitativ beschreiben (Abbildung 3). Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, dass sich ein Partikel nur in einer Dimension, der x-Richtung, bewegen kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Partikel an der Position $x = 0$. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, das Partikel nach der Zeit t im Intervall $[x, x + \Delta x]$ zu finden. Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Das Partikel erfährt alle τ -Sekunden einen Stoß. Innerhalb der Zeit t treten somit $n = t/\tau$ Stoßprozesse auf.
- Bei jedem Stoß wird das Partikel um die gleiche Distanz δ verschoben. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Partikel dabei um $+\delta$ nach rechts, bzw. um $-\delta$ nach links bewegt, sind gleich groß.
- Bei mehreren Partikeln hängt die Brownsche Bewegung eines einzelnen Partikels nicht von der Bewegung der anderen Partikel ab. Jedes Partikel bewegt sich völlig unabhängig von den anderen, auch dann, wenn sich zwei oder mehrere Partikel sehr nahe kommen.

Damit sich das Partikel nach n -Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet, muss es insgesamt $(n+m)/2$ -mal in die positive x-Richtung gelaufen sein und $(n-m)/2$ -mal in die negative Richtung. Dabei ist zu beachten, dass m bei geradem n ebenfalls gerade sein muss und entsprechend bei ungeradem n , ungerade sein muss.

Beispiel: Befindet sich das Partikel nach $n = 10$ Stößen an der Position 6δ (d.h. $m = 6$), so ist es insgesamt $(n+m)/2 = 8$ -mal nach rechts gesprungen und $(n-m)/2 = 2$ -mal nach links. Nun gibt es aber verschiedene Möglichkeiten, wie das Partikel an die Position $x = m\delta$ gekommen ist. Es kann z.B. am Anfang zweimal nach links gesprungen sein und anschließend hintereinander 8 Mal nach rechts gelaufen sein. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \quad (1)$$

Möglichkeiten, welchen Weg das Partikel gelaufen sein könnte. Für unser Beispiel mit $n = 10$ und $m = 6$ ergeben sich 45 verschiedene Schrittfolgen.

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(m; n)$ angeben, mit welcher sich das Partikel nach n -Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet. Diese ist gerade durch die Binomialverteilung² gegeben:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2}, \quad (2)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Sprungs nach links bzw. nach rechts angibt. Da die Sprungwahrscheinlichkeiten in beiden Richtungen gleich groß sind, gilt $p = 1/2$ und somit

$$P(m; n) = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

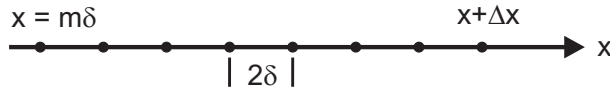
In der Regel ist die Zeit τ zwischen zwei Stößen sehr klein, so dass $n = t/\tau$ bei einer Beobachtungszeit von typischerweise $t = 1$ s, eine sehr große Zahl darstellt. Für diesen Fall können wir $n!$ und $m!$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel

$$n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (4)$$

nähern. Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für die Wahrscheinlichkeit $P(m; n)$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \quad (5)$$

²Siehe auch Versuch 251 „Statistik des radioaktiven Zerfalls“

Abbildung 4: Anzahl der Positionen im Bereich $[x, x + \Delta x]$.

Wir wollen nun statt m und n , die leicht messbaren Größen x und t verwenden. Da m entweder gerade oder ungerade ist, gilt für Δm :

$$\Delta m = \pm 2 \quad (6)$$

Im Intervall $[x, x + \Delta x]$ gibt es somit $\frac{\Delta x}{2\delta}$ mögliche Positionen (Abbildung 4). Somit folgt:

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x. \quad (7)$$

Substituieren wir $n = t/\tau$ sowie $m = x/\delta$ und definieren zusätzlich die Größe D :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau}, \quad (8)$$

so erhalten wir schließlich für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit t innerhalb des Bereichs $[x, x + \Delta x]$ zu finden:

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (9)$$

$P(x; t)$ in Gleichung (9) ist eine Gaußverteilung (Abbildung 5). Die allgemeine Form solch einer Verteilung lautet

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

wobei $\langle x \rangle$ den Mittelwert und σ^2 die Varianz, bzw. σ die Standardabweichung beschreiben. Da die Verteilung (9) symmetrisch zu $x = 0$ ist, verschwindet die mittlere Verrückung $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0. \quad (11)$$

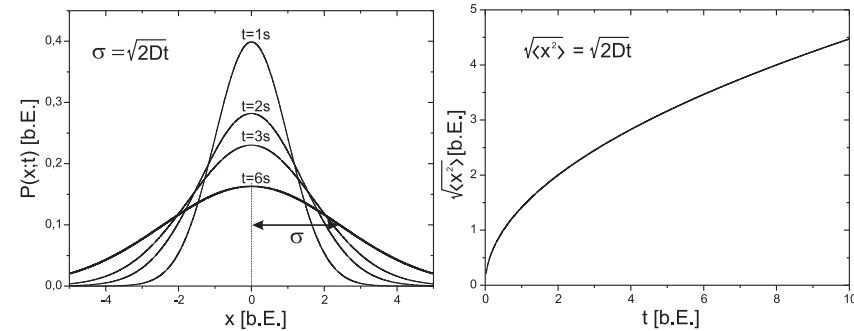


Abbildung 5: Links: Gaussverteilung mit dem Mittelwert $\langle x \rangle = 0$ und der Varianz $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 2Dt$. Da die Varianz zeitabhängig ist, wird die Verteilung mit zunehmender Zeit immer breiter. Rechts: Mittleres Verschiebungsquadrat $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ als Funktion der Zeit.

Dies ist auch sofort einzusehen, da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel bei einem Stoß entweder nach links oder nach rechts springt, gleich groß ist. Der verschwindende Mittelwert $\langle x \rangle$ ist daher nicht geeignet, die Brownsche Bewegung des Partikels zu beschreiben. Anders sieht es aus, wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle x^2 \rangle$ berechnen:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2. \quad (12)$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat entspricht der Varianz $\sigma^2 = 2Dt$ und damit der Breite der Verteilung.

Damit können wir das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung wie folgt formulieren:

Der mittlere Abstand ($\equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) eines Partikels vom Ursprungsort, nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit t zu:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad \text{Einstein-Smoluchowski-Gleichung.} \quad (13)$$

Bisher haben wir die Brownsche Bewegung nur in einer Dimension untersucht. Unser Ergebnis lässt sich aber sehr einfach auf mehrere Dimensionen übertragen.

Findet die Brownsche Bewegung in zwei Dimensionen statt, so gilt für das mittlere Verschiebungsquadrat³ $\langle r^2 \rangle$:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (14)$$

Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, liefert jeder Summand den Beitrag $2Dt$ und somit

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}, \quad (15)$$

bzw. im Dreidimensionalen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}. \quad (16)$$

Der Parameter D wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die Beweglichkeit des Partikels im umgebenden Medium. Nach Einstein ist der Diffusionskoeffizient gegeben durch

$$D = \frac{kT}{f}, \quad (17)$$

wobei f den Reibungskoeffizienten, k die Boltzmannkonstante und T die Temperatur der Flüssigkeit darstellen. Für kugelförmige Partikel mit dem Radius a , die in einer Flüssigkeit der Viskosität η suspendiert sind, berechnet sich f nach dem Stokesschen Gesetz (siehe Versuch 212 - Zähigkeit von Flüssigkeiten):

$$f = 6\pi\eta a. \quad (18)$$

Damit folgt für den Diffusionskoeffizient nach Stokes-Einstein:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (19)$$

Diese Beziehung verknüpft die makroskopischen Größen η , a und T mit den mikroskopischen Größen δ und τ in Gleichung (8). Einsetzen von (19) in Gleichung (15), liefert für das mittlere Verschiebungsquadrat kugelförmiger Partikel im Zweidimensionalen:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t. \quad (20)$$

³Im mehrdimensionalen Fall schreiben wir für das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ anstatt $\langle x^2 \rangle$.

Damit haben wir die Möglichkeit die Boltzmannkonstante experimentell zu bestimmen. Sind die Größen T , η und der Kugelradius a der Partikel bekannt, so kann durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrats die Boltzmannkonstante berechnet werden:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle. \quad (21)$$

VI.2 Bedienung des Versuchsaufbaus

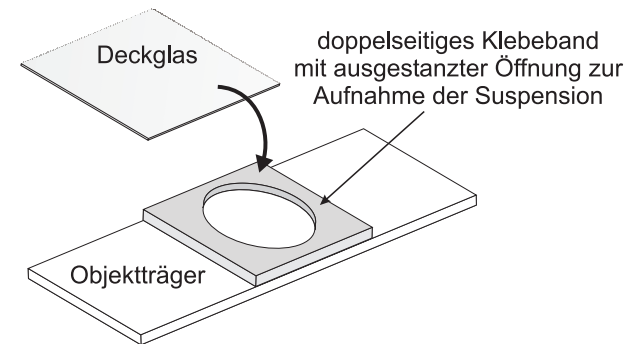


Abbildung 6: Skizze der Probenfassung. Die ausgestanzte Öffnung des doppelseitigen Klebebands wird mit der zu untersuchenden Suspension befüllt und anschließend mit dem Deckglas verschlossen.

Probenpräparation

In diesem Versuch wird die Brownsche Bewegung von in Wasser suspendierten Silicananopartikeln vermessen. Um diese mit dem Mikroskop beobachten zu können, benötigen wir eine Probenfassung, die einerseits dick genug ist, sodass sich die suspendierten Partikel darin frei bewegen können, andererseits muss diese auch dünn genug sein, damit eine Fokussierung mit dem Mikroskop möglich ist. Um dies zu gewährleisten, werden Sie zunächst eine Probenfassung gemäß Abbildung 6 anfertigen. Auf einen Objektträger wird ein doppelseitiges Klebeband aufgebracht, in dessen Mitte zuvor ein Loch ausgestanzt wurde. In diese Öffnung wird die Probenflüssigkeit eingefüllt und mit einem Deckglas verschlossen. Das doppelseitige Klebeband erfüllt dabei zwei Aufgaben: Zum einen

vergrößert dieses das Probenvolumen, so dass sich die suspendierten Partikel frei bewegen können, zum anderen dient es zur Abdichtung der Flüssigkeit, wodurch ungewollte Strömungen durch Verdunstungsprozesse unterdrückt werden.

Für die Anfertigung der Probe gehen Sie wie folgt vor: Schneiden Sie ein Stück doppelseitiges Klebeband passend auf die Größe des Objektträgers (24 mm × 32 mm) zurecht und stanzen Sie mit dem Lochisen zentrisch ein Loch in das Klebeband (Mit der Unterlage auf dem Boden stanzen!). Anschließend kleben Sie das Klebeband mittig auf den Objektträger und entfernen die Abdeckfolie. Schütteln Sie die Flasche mit der Probenflüssigkeit gut durch und pipettieren Sie ca. 150 μl der Probenflüssigkeit in die ausgestanzte Öffnung des Klebebands. Der Durchmesser der Partikel ist auf der Flasche angegeben. Notieren Sie diesen Wert. Legen Sie nun das Deckglas auf das doppelseitige Klebeband und drücken Sie es mit einem Papiertuch vorsichtig an. Dabei darf ruhig etwas von der Flüssigkeit herausfließen. Allerdings dürfen sich keine (größeren) Luftblasen in der Flüssigkeit bilden! Trocknen Sie die Probe mit einem Papiertuch ab und geben Sie auf die Mitte des Deckglases **einen Tropfen** Immersionsöl. Spannen Sie nun die Probe auf den Mikroskoptisch (Abbildung 7) ein. Am Objektivkranz des Mikroskops wählen Sie das Objektiv 100/1.25 oil (100-fache Vergrößerung, Numerische Apertur $NA=1,25$) aus.

Für die Beobachtung der Partikel, muss das Mikroskopobjektiv mithilfe des Fokusgrobtriebes (siehe Abbildung 7) so nahe an den Objektträger gefahren werden, dass der Öltropfen auf dem Objektträger gerade berührt wird. Ab diesem Punkt darf nur noch mit dem Fokusfeintrieb gearbeitet werden, da sonst eine Berührung des Objektivs mit dem Objektträgerglas leicht möglich. Deshalb sollte der Fokus langsam verändert werden, bis suspendierte Partikel im Bildausschnitt zu sehen sind. Zur Verschiebung des Ausschnittes in x- und y-Richtung, kann der jeweilige x- oder y-Antrieb verwendet werden.

Zur Verbesserung des Kontrastes sollten die Irisblende am Kondensor auf die Position *MIN* gestellt werden.

Achtung: Bei der Versuchsdurchführung können folgende systematische Fehler auftreten, die unbedingt zu vermeiden sind:

- Überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich nur ein einziges Partikel beobachten. Manchmal kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere Partikel „zusammenkleben“. Dies lässt sich gut erkennen, indem man etwas den Fokus variiert. Meistens erscheint dieser „Klumpen“ auch deutlich größer als einzelne Partikel.

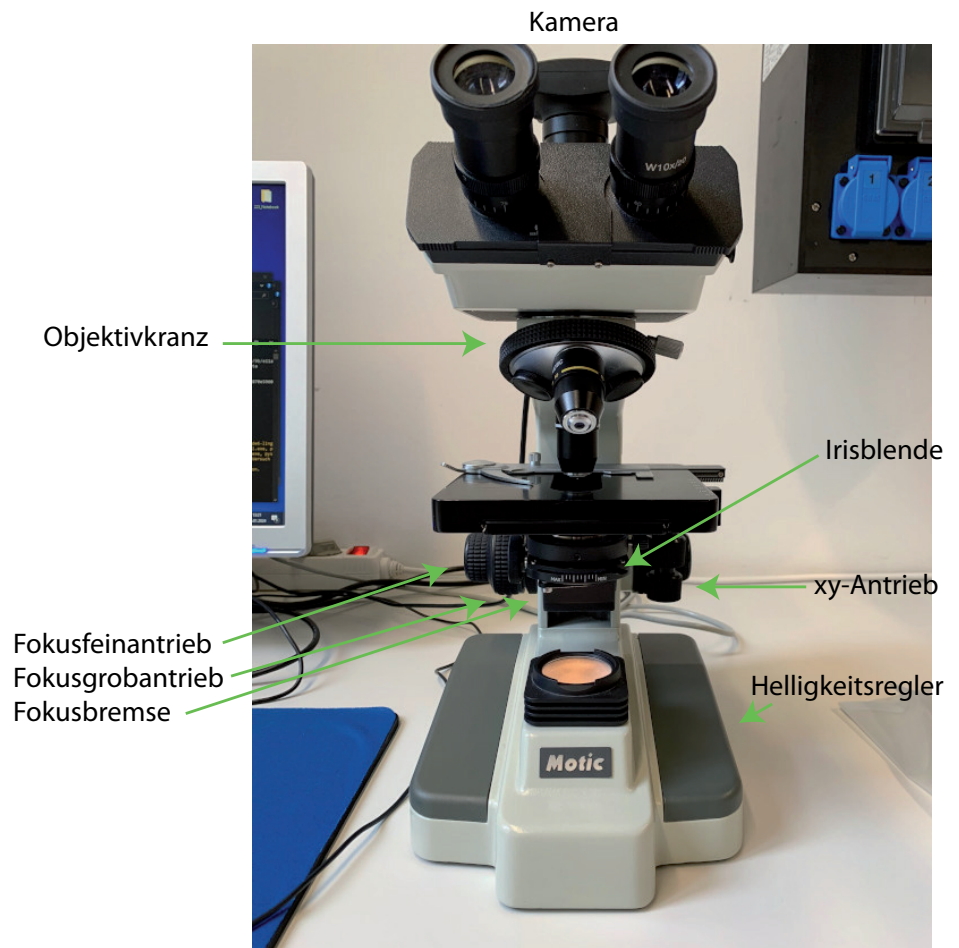


Abbildung 7: Bedienungselemente des Mikroskops.

- Auf keinen Fall dürfen Sie während der Messung die xy -Position des Objektisches verstellen. Auch Erschütterungen des Mikroskops müssen unbedingt vermieden werden.
- Beim Nachfokussieren dürfen Sie mit dem Objektiv auf keinen Fall das Deckglas ihrer Probe berühren. Der dadurch erzeugten Druck, würde die Partikel verdrängen und somit die eigentliche Brownsche Bewegung verfälschen. Sollten Sie beim Nachfokussieren eine abrupte Partikelbewegung beobachten, so müssen Sie sich ein anderes, „höher gelegenes“ Partikel suchen, dessen Position Sie ohne Berührung des Deckglases scharf stellen können.
- Die Probe muss sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Ist dies nicht der Fall, so treten Konvektionsströme auf, die wiederum die Brownsche Bewegung verfälschen. Zudem ist es möglich, dass die Probe schlecht präpariert wurde: Ist die Suspension nicht vollständig mit dem Klebeband abgedichtet, so können durch Verdunstungsprozesse ebenfalls ungewünschte Strömungen in der Probe auftreten. **Warten Sie daher zur Temperierung der Probe zwei Minuten ab, bevor Sie mit der Messung beginnen.** Sollte dann immer noch eine Strömungsbewegung erkennbar sein, so müssen Sie gegebenenfalls eine neue Probe vorbereiten. Wenden Sie sich in diesem Fall an Ihren Betreuer. Auch die Mikroskopbeleuchtung kann die Probe erwärmen. Stellen Sie deshalb die Helligkeit auf ein notwendiges Minimum, damit die Helligkeit des Kamerabildes hoch genug für eine zufriedenstellende Beobachtung eines Partikels ist.

Software

Das Messprogramm ist in python geschrieben. Am Anfang müssen Sie einen Gruppennamen eingeben. Das Programm erzeugt automatisch einen Ordner mit diesem Namen und speichert darin alle aufgenommenen Bilder und Messdaten. Sollte das Programm einmal neugestartet werden, müssen Sie denselben Gruppennamen nochmals eingeben, damit Sie dort weitermachen können, wo Sie vor dem Neustart aufgehört haben.

Das Programm hat drei Tabs, für jede Aufgabe einen eigenen. Im *Caputre*-Tab wird die Bildfolge aufgenommen, im *Calibration*-Tab wird mit Hilfe eines Mikrometermaßstabs eine Eichung der Kameraabbildung vorgenommen und im *Tracking*-Tab müssen Sie ein Partikel über alle Bilder der aufgenommenen Bildfolge verfolgen. Dabei wird automatisch die Verschiebung berechnet und in eine

.txt-Datei geschrieben. Auch diese finden Sie anschließend in Ihrem Ordner gespeichert.

Bei der Aufnahme der Bildfolge wird jede Sekunde ein Bild aufgenommen. Den Fehler bzgl. der Zeitmessung können Sie vernachlässigen. Das Programm speichert die Bilder in Ihrem Ordner ab, beginnend mit dem „Bild0.jpg“. Um die Anzahl der aufzunehmenden Bilder festzulegen, tragen Sie einfach die Zahl in das entsprechende Feld der Software ein und starten Sie die Aufnahmeroutine. Um später die Position des Partikels ausmessen zu können, müssen Sie

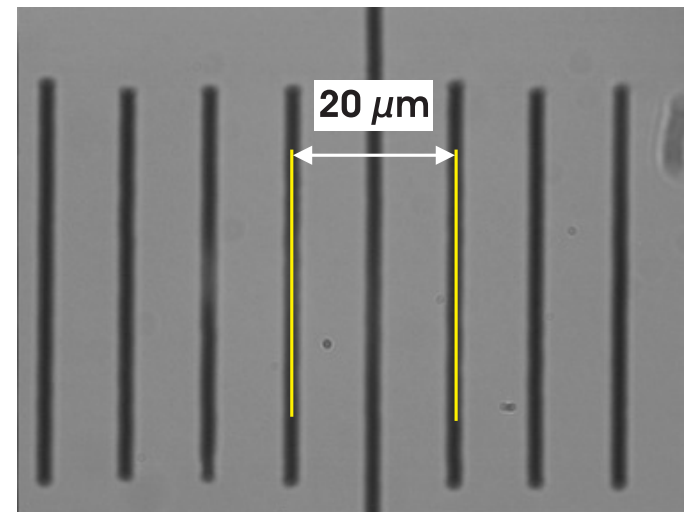


Abbildung 8: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer. Die Distanz zwischen zwei Teilstrichen beträgt $10\ \mu\text{m}$.

den Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmen. Dazu liegen Objektmikrometer aus. Zwischen zwei Skalenteilen des Objektmikrometers liegen $10\ \mu\text{m}$. Um das Objektmikrometer mit dem Immersionsobjektiv verwenden zu können, müssen Sie hier ebenfalls einen Tropfen Immersionsöl vor Gebrauch auftragen. Im *Calibration*-Tab müssen Sie wieder die Kamera starten und dann entsprechend den Bildausschnitt so wählen, dass die Teilstriche des Objektmikrometers möglichst scharf abgebildet werden (siehe Abbildung 8). Mit dem Button „Start Calibration“ wird ein Bild aufgenommen und gespeichert und ein Cursor erscheint. Diesen müssen Sie nun auf einen der Teilstriche verschieben. Mit dem

Drücken der „Enter“-Taste wird die Position gespeichert und ein zweiter Cursor erscheint. Diesen können Sie mit den Pfeiltasten jetzt verschieben. Erneutes Drücken der „Enter“-Taste speichert die Position erneut und der Abbildungsmaßstab wird in $nm/pixel$ in das Bild geschrieben und im Programm als Konstante gespeichert. Für das Ausmessen der Partikelpositionen müssen Sie in

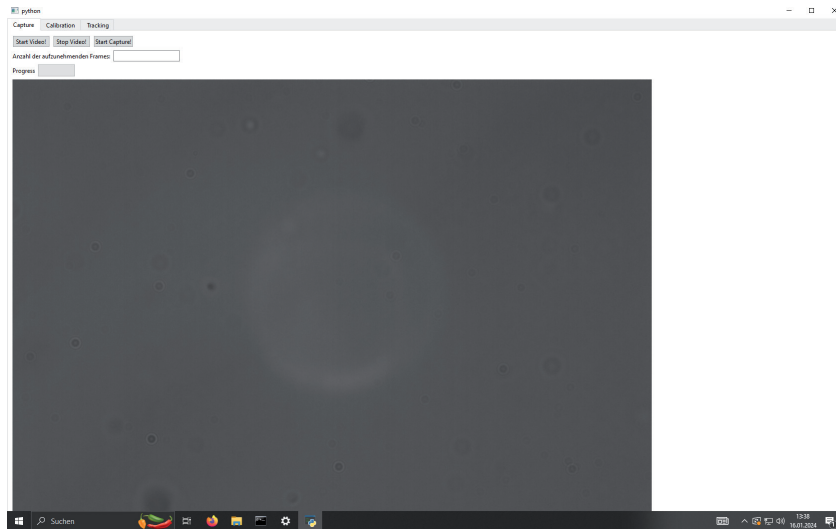


Abbildung 9: Bedienoberfläche des Programms

den *Tracking*-Tab wechseln. Hier können Sie einfach auf den „Start“-Button drücken und es wird automatisch ihr erstes aufgenommenes Bild geladen. Den Cursor können Sie entweder mit einem Mausklick auf die gewünschte Position verschieben oder durch das Drücken der „W,A,S,D“-Tasten. Mit dem Drücken der „Enter“-Taste wird die Position gespeichert und das nächste Bild wird geladen. Der Cursor verbleibt auf der letzten gespeicherten Position. Sollte das Programm im Laufe des Versuch neugestartet werden, werden Sie zu Beginn des Trackingsvorgangs über ein Dialogfenster nach der Anzahl der aufgenommenen Bilder und des Abbildungsmaßstabes gefragt. Diesen können Sie einfach hier eintragen (Bitte beachten Sie, dass python einen `.` statt einem `,` als Dezimaltrennzeichen erwartet). Danach wird automatisch das nächste, nicht bearbeitete Bild geladen mit dem Cursor auf der Position des letzten Bildes, sodass Sie das getrackte Partikel leicht finden sollten.

VII Durchführung

Aufgabe 1: Herstellen der Probe suspendierter Silicananopartikel

Stellen Sie die Probe nach der Anleitung her. **Schütteln Sie die Flasche kräftig, bevor Sie mit der Pinpette Flüssigkeit entnehmen, da sich die Latexpartikel mit der Zeit am Boden absetzen!** Achten Sie auch darauf, die Glasflächen im Bereich des ausgestanzten Lochs möglichst nicht zu berühren. Legen Sie anschließend die Probe in das Mikroskop und stellen Sie entsprechend den Fokus ein, sodass Sie die suspendierten Partikel beobachten können. Drehen Sie dazu **langsam** am Feintrieb des Fokusrades.

Aufgabe 2: Aufnahme einer Bildfolge

Nehmen Sie eine Bildfolge von mindestens 150 Bildern auf. Stellen Sie sicher, dass sich das von Ihnen gewählte Partikel die ganze Zeit sichtbar im Bild befindet. Sollte es zu stark in z-Richtung aus dem Fokus gewandert sein, stellen Sie diesen sehr langsam nach, sodass Sie das Partikel wieder gut sehen können. Achten Sie auch darauf, dass sich möglichst nicht zu viele Partikel im beobachteten Ausschnitt befinden, sodass diese nicht dauernd zusammenstoßen. Wenn Sie die Aufnahme der Bildfolge gestartet haben, müssen Sie warten bis der Progressanzeiger bei 100 % ist. Nachdem die Bildfolge aufgenommen worden ist, notieren Sie die Raumtemperatur.

Aufgabe 3: Eichen des abgebildeten Ausschnitts mit einem Mikrometermaßstab

Nehmen Sie eine Eichung des abgebildeten Ausschnitts mittels des *Calibration*-Tabs vor. Um den Maßstab im vergrößerten Bildausschnitt zu finden, können Sie das Objektiv mit 10facher Vergrößerung benutzen und dann auf das 100fach vergrößernde Objektiv wechseln. Vergessen Sie nicht den Tropfen Immersionsöl! **Werfen Sie das Objektmikrometer auf keinen Fall nach Beendigung der Messung in den Müll! Legen Sie es wieder zurück in die Aufbewahrungsschachtel!** Notieren Sie den Abbildungsmaßstab.

Aufgabe 4: Vermessen der Partikelpositionen für jedes Bild der aufgenommenen Folge

Messen Sie die Positionen für das beobachtete Partikel in jedem der aufgenommenen Bilder nacheinander aus. Über den *Tracking*-Tab ist das möglich. Achten Sie darauf, dass Sie immer das gleiche Partikel messen. Nachdem Sie die Position des Partikel in jedem der aufgenommenen Bilder bestimmt haben, können Sie

direkt mit der Auswertung, z.B. in Jupyter Notebook, beginnen. Die Datei mit den gemessenen Positionen wird automatisch nach Beenden in ihrem Ordner gespeichert.

VIII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

VIII.1 Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und binden Sie es in Ihre Ausarbeitung ein. Starten Sie das Programm Jupyter vom Desktop aus. Wir benötigen die folgenden Module:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import curve_fit
```

Die Messdaten sind in der Datei `position_data.txt` in Ihrem Unterordner im Ordner **Messungen** auf dem Desktop gespeichert. Schauen Sie sich die Messdaten an. Die Datei besteht aus 3 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Punkte verwendet.

Zum Importieren verwenden wir die Numpy Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad und Dateiname angeben. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `t,x,y` geschrieben:

```
t,x,y=np.loadtxt('PfadzuIhremMessordner/position_data.txt',
    delimiter=",", dtype="float", unpack=True)
```

Das Array `t` enthält die Zeitdaten und `x, y` die gemessenen Positionen. Verschaffen Sie sich einen grafischen Eindruck von der Wanderung des Partikels. Zeichnen Sie die `x,y`- Daten als Punkt-Liniendiagramm.

```
plt.plot(x, y, marker='s', color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / '+' $\\mu$'+'m')
```

```
plt.ylabel('y / '+' $\\mu$'+'m')
plt.title('Brownian Motion')
plt.show()
plt.savefig('PfadzuIhremMessordner/brown1.pdf', format='PDF')
```

Das Diagramm wird mit dem Befehl `plt.savefig()` im angegebenen Pfad unter dem angegebenen Dateinamen gespeichert. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 10.

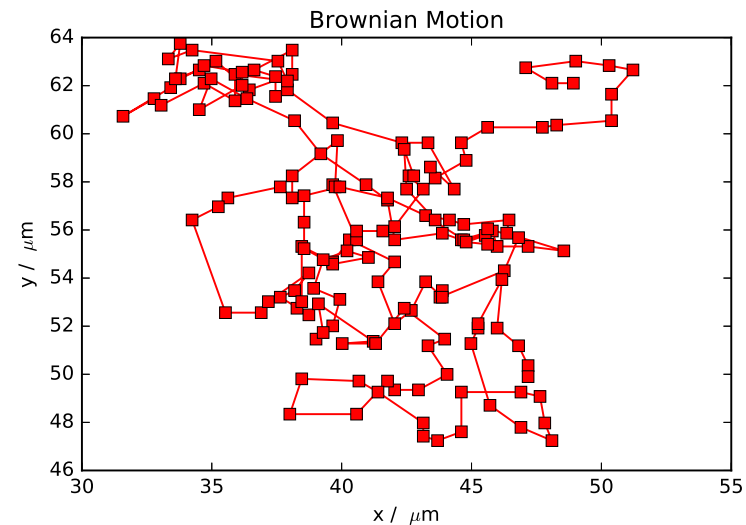


Abbildung 10: Bewegung eines Partikels

VIII.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

Die Messdaten geben die absoluten Koordinaten an, wir brauchen aber die Koordinatenänderungen $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ sowie deren Quadrate:

```
dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])
```



```

i=0
while i < len(t)-1:
    dx=np.append(dx,x[i+1]-x[i])
    dy=np.append(dy,y[i+1]-y[i])
    i = i + 1
r_squared=dx**2+dy**2

```

Wir benötigen die mittlere quadratische Abweichung (`r_squared_mean`) und dessen Fehler (`r_squared_mean_std`):

```

r_squared_mean=np.mean(r_squared)
print("r_squared_mean= ",r_squared_mean)
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared))
print("r_squared_mean_std= ",r_squared_mean_std)

```

Berechnen Sie hieraus mit Hilfe von Gleichung (21) die Boltzmannkonstante und die Diffusionskonstante D mit den jeweiligen Fehlern. Die Viskosität von Wasser finden Sie in Abbildung 13.

VIII.3 Kontrollverteilung

Nach Gleichung 9 ist die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit t innerhalb des Bereichs $[x, x + \Delta x]$ zu finden durch eine Gaußverteilung gegeben. Überprüfen Sie dies, indem Sie die gemessenen Partikelverschiebungen in ein Histogramm eintragen. Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, können Sie sowohl die Verschiebungen dx als auch die Verschiebungen dy gemeinsam in das gleiche Histogramm eintragen. Mit der Funktion `np.append(dx,dy)` werden die Datensätze in das Array `all_data` geschrieben:

```

all_data=np.append(dx,dy)
plt.hist(all_data, bins=range(min(data), max(data) + binwidth,
                               binwidth), density=True)

```

Die Option `density=True` normiert die Fläche des Histogramms auf den Wert Eins. Schauen Sie sich die Parameter von `plt.hist()` an und ändern Sie gegebenenfalls die Binbreite. Optimieren Sie die Formatierung des Diagramms. Fügen Sie Achsenbeschriftungen, Einheiten, Diagrammüberschrift etc. ein. In das Histogramm soll noch die zugrundeliegende Gaußverteilung (`mlab.normpdf()`)

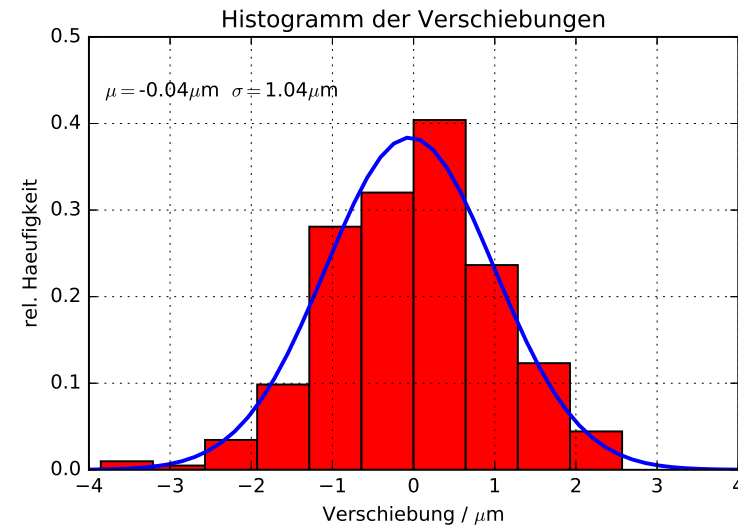


Abbildung 11: *Histogramm der Verschiebungen*

mit eingezeichnet werden. Die Gaußverteilung ist eindeutig durch den Mittelwert (`mu=np.mean(all_data)`) der Verschiebungen sowie deren Standardabweichung (`sigma=np.std(all_data)`) festgelegt. Die Abszissenwerte generieren wir uns mit der Funktion `np.linspace()`:

```

mu=np.mean(all_data)
sigma=np.std(all_data)
gauss = norm.pdf(np.linspace(-4,4), mu , sigma)

plt.plot(np.linspace(-4,4), gauss, 'b-', linewidth=2)
plt.show()
plt.savefig('PfadzuIhremMessordner/brown2.pdf', format='PDF')

```

Fügen Sie mit dem Befehl `plt.text()` den Mittelwert (`mu`) und die Standardabweichung (`sigma`) mit in das Diagramm ein. Sie können auch $\text{\LaTeX}$ -Code eingeben. Z.B. liefert `\mu` den Ausdruck μ und `\sigma` liefert σ . Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollheft ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 11.

VIII.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

Nach Gleichung (13) ist das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ proportional zur Zeit. Stellt man die kumulative Verschiebung als Funktion der Zeit dar, sollte sich ein linearer Zusammenhang gemäß Abbildung 12 ergeben.

```
r_kumm=np.cumsum(r_squared)
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker='.', color='red', linewidth=0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Summe  $r_i^2 / \mu m^2$ ')
plt.title('Kummulative Verschiebung')
plt.savefig('PfadzuIhremMessordner/brown3.pdf', format='PDF')
```

Fitten Sie eine Gerade an die Daten und tragen Sie die Messwerte und die angepasste Funktion in ein Diagramm ein.

```
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
```

```
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)
```

Die gefundenen Fitparameter sind in dem Array `popt` gespeichert. `popt[0]` entspricht der Steigung, `popt[1]` dem Achsenabschnitt. Mit

```
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1],*popt))
plt.savefig('brown3.pdf', format='PDF')
```

können Sie die Funktion in Ihr zuvor erstelltes Diagramm einfügen. `*popt` entpackt die Fitparameter direkt in Ihre Funktion. Passen Sie die Formatierung an und tragen Sie Ihre Fitfunktion und Fitparameter mit in das Diagramm ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 12. Berechnen Sie aus der Steigung wieder die Boltzmann- und Diffusionskonstante. Stimmen die Werte mit den anderen Messungen überein?

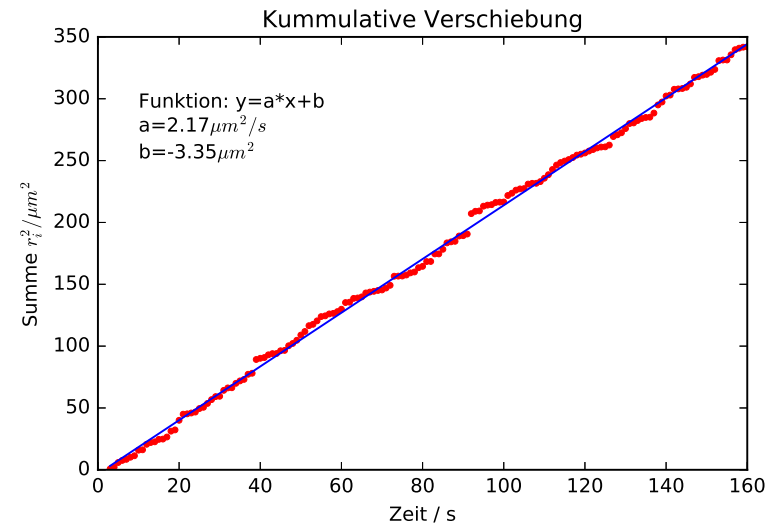


Abbildung 12: Kummulative Verschiebung eines Partikels

Viskosität von Wasser

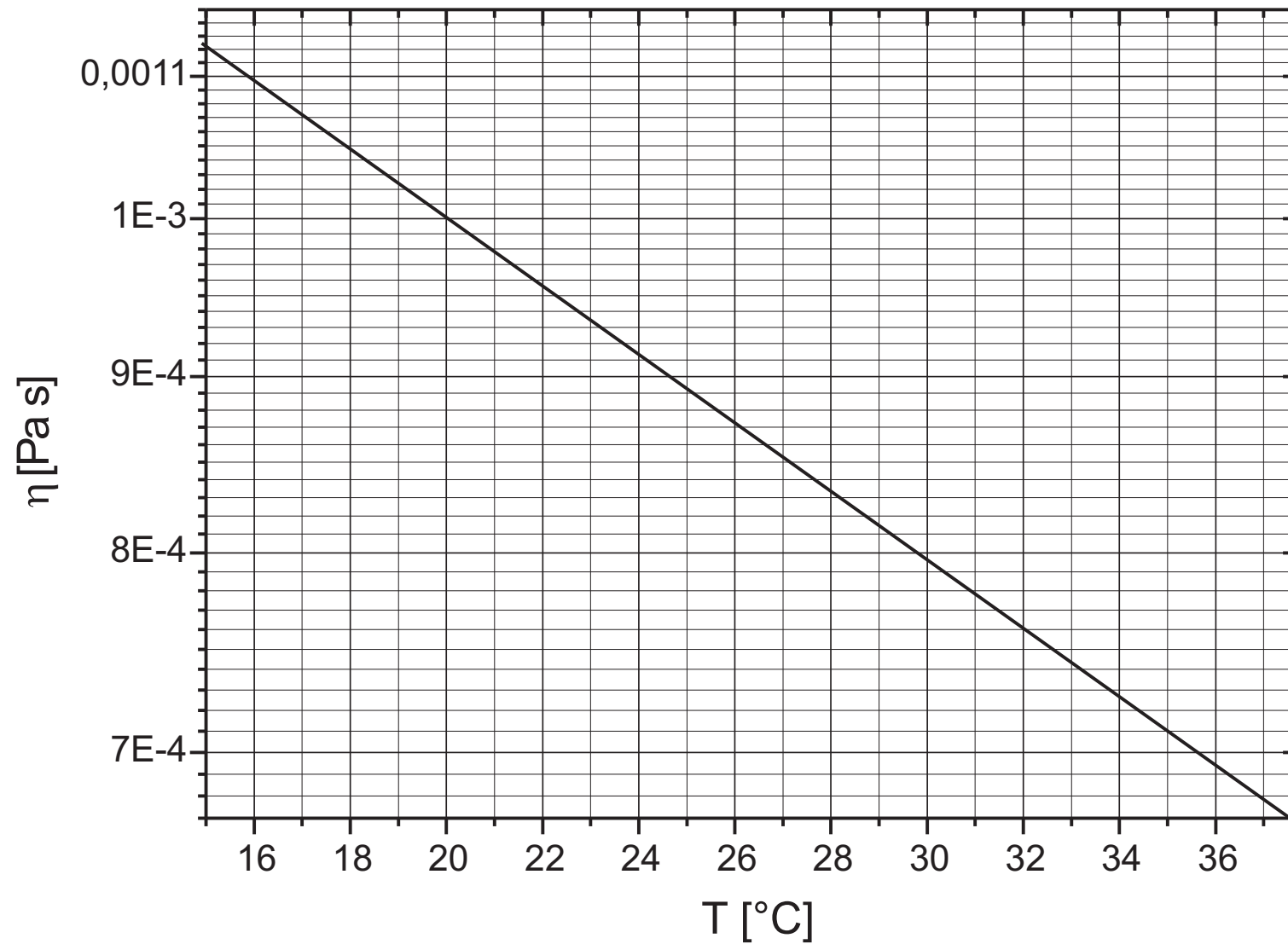


Abbildung 13: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

Versuch 232 Michelsoninterferometer

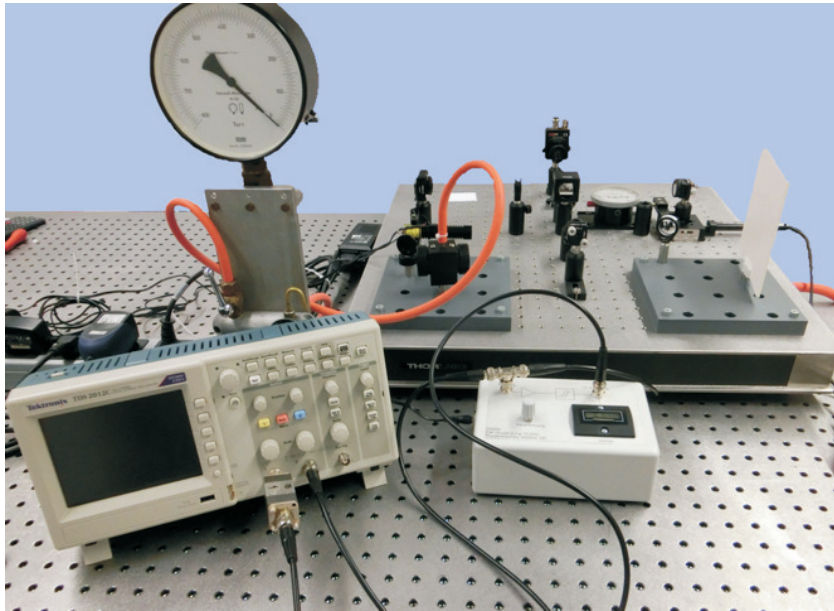


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Michelson Interferometer
- Laser, Leuchtdiode
- Thermometer
- Vakuumpumpe

II Literatur

- Bergmann- Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III*, de Gruyter Berlin.

- R. P. Pohl, *Optik und Atomphysik*, Springer Verlag.
- W. Demtröder, *Experimentalphysik 2*, Springer Verlag.
- Homepage des Praktikums <http://www.physikpraktika.uni-hd.de>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wellenoptik (Hyugens'sches Prinzip, Interferenz, Superpositionsprinzip, Kohärenz). Interferenz gleicher Neigung, Interferenz gleicher Dicke. Aufbau eines Michelson-Interferometers.

Verständnisfragen:

1. Was ist Interferenz? Was besagt das Superpositionsprinzip?
2. Was sind Interferenzmuster und wie kommen sie zustande? Nennen Sie die Bedingungen für die Phasenverschiebung bzw. für den Gangunterschied zweier Wellen, damit die überlagerte Welle eine maximale bzw. eine verschwindende Intensität besitzt. Was ist zu beachten, wenn eine Teilwelle ein Medium mit einem anderem Brechungsindex durchläuft als die andere Teilwelle?
3. Warum kann man bei natürlichem Licht in der Regel keine Interferenzerscheinungen beobachten? Erläutern Sie die Begriffe Kohärenz, Kohärenzzeit und Kohärenzlänge. Wie groß sind die Größenordnungen der Kohärenzlängen einer Glühlampe bzw. eines Lasers?
4. Wie groß ist gemäß Gleichung (8) die Intensität der überlagerten Welle, wenn die interferierenden Wellen inkohärent sind?
5. Was versteht man unter *Interferenz gleicher Neigung* und *Interferenz gleicher Dicke*?
6. Beschreiben Sie den Aufbau eines Michelson-Interferometers. Erklären Sie das Zustandekommen der verschiedenen Interferenzmuster (Kreissystem, Streifensystem).

7. Wie lässt sich mit einem Michelson-Interferometer die Wellenlänge der Lichtquelle bzw. der Brechungsindex eines Mediums bestimmen?
8. Wie muss der bewegliche Spiegel des Interferometers justiert sein, um Interferenzen mit Licht einer sehr kleinen Kohärenzlänge beobachten zu können (Weißlichtinterferenz)?
9. Warum erscheint das an einer rauen Oberfläche reflektierte Licht eines Lasers granuliert (Stichwort: Speckle-Muster)?

IV Aufgaben

1. Messen Sie die Wellenlänge des grünen Lasers.
2. Bestimmen Sie den Brechungsindex von Luft.
3. Messen Sie die Kohärenzlänge einer Leuchtdiode.

V Grundlagen

Interferenz bezeichnet allgemein die Überlagerung von Wellen. Sie haben dieses Phänomen sicherlich schon anhand von Wasserwellen an einem See oder bei Experimenten mit der Wellenwanne in der Vorlesung kennengelernt. Treffen z.B. zwei Wasserwellen aufeinander, so überlagern sich diese zu einer neuen Welle. Die Amplitude der resultierenden Welle hängt von der Phasenverschiebung der beiden Teilwellen ab. Trifft in einem bestimmten Punkt (Abbildung 2) ein „Wellenberg“ der einen Welle auf einen „Wellenberg“ der anderen Welle, so vergrößert sich die Amplitude der resultierenden Welle (konstruktive Interferenz). Trifft dagegen ein „Wellenberg“ auf ein „Wellental“, so verringert sich die Amplitude. Sind die Amplituden gar gleich groß, so löscht sich im letzten Fall die Amplitude der resultierenden Welle aus. Auch Licht lässt sich durch eine Welle beschreiben. Betrachten wir zwei ebene monochromatische Lichtwellen $\vec{E}_1, \vec{E}_2$:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r} + \phi_1)} \quad (1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \phi_2)}$$

Dabei bezeichnen $\vec{E}_{0i}$ die Amplituden, $\vec{k}_i$ die Wellenvektoren, ω die Frequenz und ϕ_i die Phasen der jeweiligen Wellen. Treffen diese aufeinander, so überlagern

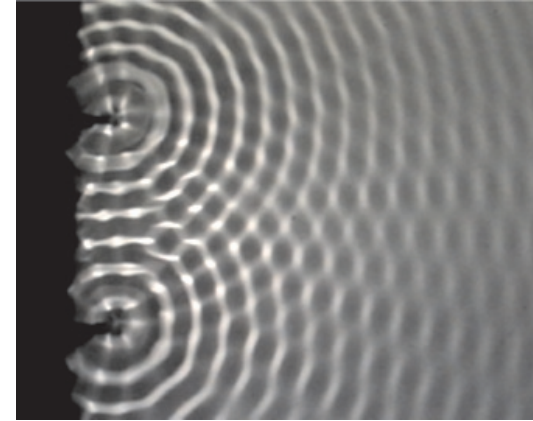


Abbildung 2: Interferenz zweier Wasserwellen

sie sich gemäß des Superpositionsprinzips, d.h. die Wellen addieren sich vektoriell zu einer resultierenden Welle $\vec{E}_S(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}_S(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t). \quad (2)$$

Bei Licht ist aufgrund der hohen Frequenz nicht die Amplitude der Welle beobachtbar, sondern nur die Intensität I , d.h. der zeitliche Energiemittelwert, der auf eine bestimmte Fläche trifft. Dieser ist proportional zum Betragsquadrat der Amplitude:

$$I_S(\vec{r}, t) \propto |\vec{E}_S(\vec{r}, t)|^2. \quad (3)$$

In der hier verwendeten komplexen Notation lässt sich das Betragsquadrat sehr einfach berechnen. Wir müssen lediglich $\vec{E}_S$ mit dem komplex konjugierten $\vec{E}_S^*$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} I_S \propto |\vec{E}_S|^2 &= \vec{E}_S \vec{E}_S^* = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \\ &= \vec{E}_1 \vec{E}_1^* + \vec{E}_2 \vec{E}_2^* + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* \\ &= |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Die ersten beiden Summanden sind die Betragsquadrate der Einzelwellen. Für die beiden anderen Summanden berechnen wir durch Einsetzen von Gleichung (1)

$$\vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* = \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad (5)$$

wobei wir hier die Phasenverschiebung

$$\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r} + \phi_1 - \phi_2 \quad (6)$$

definiert haben. Mit Hilfe der Euler'schen Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (7)$$

erhalten wir schließlich für die Intensität der überlagerten Welle:

$$I_S \propto |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \underbrace{2\vec{E}_{01}\vec{E}_{02} \cos \varphi}_{\text{Interferenzterm}} \quad (8)$$

Die Intensität der überlagerten Welle entspricht demnach nicht der Summe der Intensitäten der Einzelwellen. Es tritt zusätzlich ein Interferenzterm auf, der dazu führt, dass die Intensität der überlagerten Wellen größer (konstruktive Interferenz) oder kleiner (destruktive Interferenz) ist als die Summe der Einzelintensitäten. *Beispiel:* Interferenz zweier linear polarisierten, ebener Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die sich in z -Richtung ausbreiten und gleiche Polarisationsrichtungen (z.B. in x -Richtung) besitzen. Für die x -Komponente der elektrischen Feldstärke gilt:

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_1)} \\ E_2(z, t) &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

und für die Intensität I_S der überlagerten Welle $E_S = E_1 + E_2$:

$$I_S \propto E_S^2 \propto 2I_0 (1 + \cos \varphi), \quad (10)$$

wobei I_0 proportional zur Intensität der Einzelwelle ist und $\varphi = \phi_1 - \phi_2$ die Phasenverschiebung der beiden Wellen darstellt. In Abbildung 3 ist die Intensität als Funktion der Phasenverschiebung φ aufgetragen. Maximale Intensität ergibt sich, wenn die Phasenverschiebung ein Vielfaches von 2π beträgt. Für ein ungerades Vielfaches von π verschwindet dagegen die Intensität der überlagerten Welle:

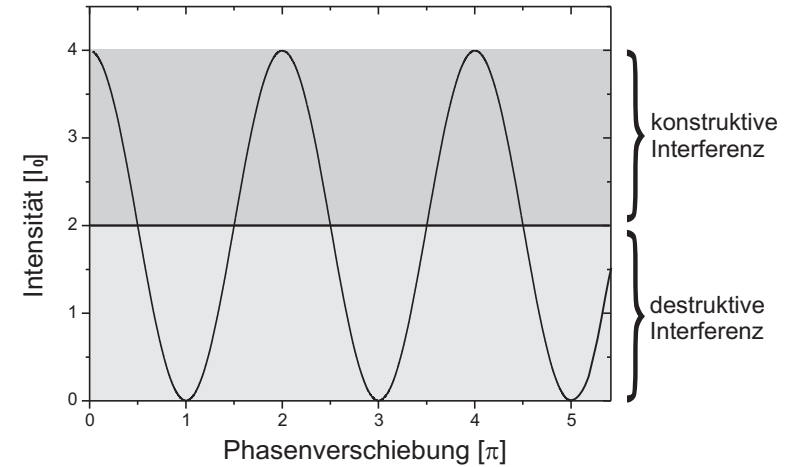


Abbildung 3: Intensität der überlagerten Welle nach Gleichung (10) in Einheiten von I_0 als Funktion der Phasenverschiebung in Einheiten von π .

$$\text{Maximale Intensität für } \varphi = 2m\pi, (m \in \mathbb{Z}) \quad (11)$$

$$\text{Minimale Intensität für } \varphi = (2m + 1)\pi, (m \in \mathbb{Z}) \quad (12)$$

Bei vielen Interferenzversuchen kommt die Phasenverschiebung dadurch zustande, dass die sich überlagernden Wellen zuvor unterschiedliche Weglängen durchlaufen haben. Ein Beispiel ist in Abbildung 4a) dargestellt. Nehmen wir an, dass die beiden Lichtquellen punktförmig sind und Licht mit gleicher Frequenz, Amplitude, Polarisationsrichtung und konstanter Phase aussenden. Die Intensität der überlagerten Welle im Punkt P hängt dann von der Phasenverschiebung ab, die durch den Gangunterschied $\Delta = s_1 - s_2$ der beiden Wellen hervorgerufen wird. Dabei bezeichnen s_1 und s_2 die Weglängen der jeweiligen Teilwellen. Da eine Phasenverschiebung von 2π einem Wegunterschied von λ entspricht, besteht zwischen der Phasenverschiebung φ und dem Gangunterschied Δ die Beziehung:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \quad (13)$$

wobei λ die Wellenlänge der Teilwellen beschreibt. Breitet sich ein Wellenzug nicht im Vakuum aus, sondern durchläuft ein Medium mit dem Brechungsindex n (Abbildung 4b), so tritt eine zusätzliche Phasenverschiebung auf. Da die Wellenlänge im Medium um das n -fache der Vakuumlichtgeschwindigkeit kleiner ist, darf man bei der Berechnung des Gangunterschieds nicht die geometrischen Weglängen s verwenden, sondern muss die optischen Weglängen Λ berücksichtigen. Diese entspricht dem Produkt des Brechungsindex des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet und der geometrischen Weglänge s , die die Welle in dem Medium zurücklegt:

$$\Lambda = n s. \quad (14)$$

Mit Hilfe des Gangunterschieds lassen sich die Gleichungen (11) und (12) auch wie folgt formulieren:

$$\text{Maximale Intensität für } \Delta = m\lambda, (m \in \mathbb{Z}) \quad (15)$$

$$\text{Minimale Intensität für } \Delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, (m \in \mathbb{Z}) \quad (16)$$

Kohärenz

Voraussetzung für die Beobachtung von Interferenzerscheinungen ist die Kohärenz der Lichtquellen. Damit ist gemeint, dass die interferierenden Wellen eine konstante Phasenbeziehung aufweisen müssen. Bei inkohärentem Licht ist die Phasenverschiebung φ in Gleichung (8) statistisch verteilt, so dass der Interferenzterm verschwindet und man daher keine Interferenzen beobachten kann.

Die meisten Lichtquellen, wie z.B. das Licht der Sonne oder einer Glühlampe, erzeugen inkohärentes Licht. Die Atome dieser Lichtquellen senden innerhalb eines sehr kurzen Zeitraums τ unabhängig voneinander Wellenzüge aus, deren einzelnen Phasen statistisch verteilt sind. Das in Abbildung 4a) dargestellte Experiment würde daher bei Verwendung von natürlichem Licht nicht funktionieren. Um dennoch mit natürlichen Lichtquellen Interferenzen beobachten zu können, muss man das Licht einer einzigen Lichtquelle verwenden und dieses in Teilwellen aufspalten. Abbildung 4c) zeigt ein Beispiel, welches auch bei der Verwendung von natürlichem Licht, die Beobachtung von Interferenzerscheinungen ermöglicht. Anstatt zwei Lichtquellen, die statistisch unabhängig voneinander

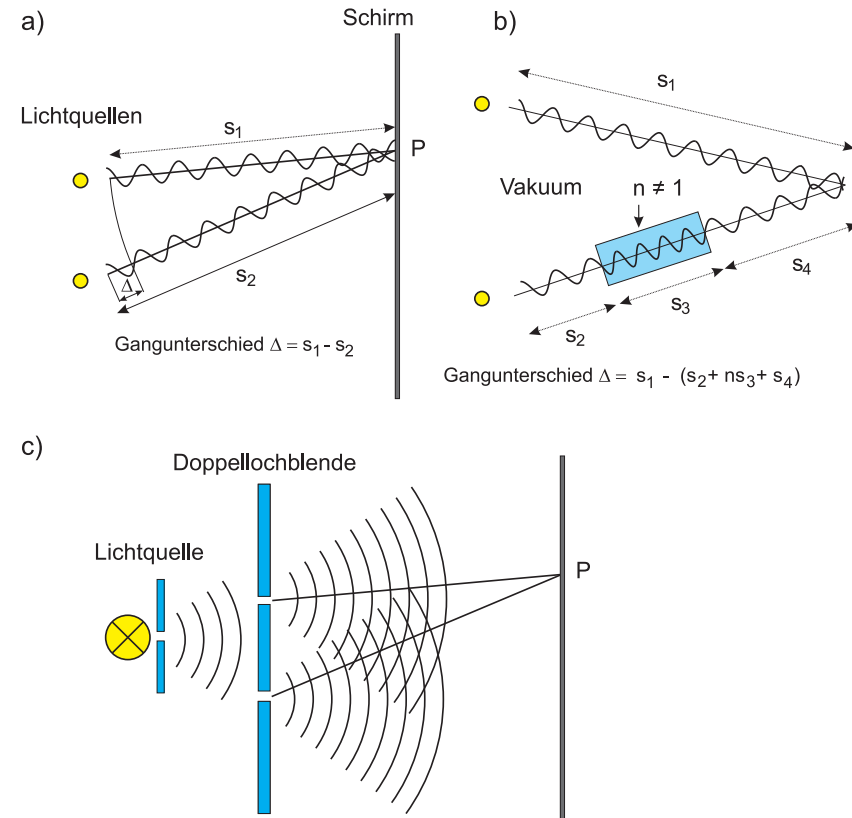


Abbildung 4: a) Gangunterschied Δ zweier Teilwellen nach dem Durchlaufen unterschiedlicher Weglängen. b) Breitet sich eine Teilwelle in einem Medium mit dem Brechungsindex n aus, tritt eine zusätzliche Phasenverschiebung auf. c) Erzeugung von kohärentem Licht durch Teilung der Wellenfront mit einer Doppellochblende.

emittieren, verwenden wir hier eine Lichtquelle, deren Wellenfront mit Hilfe einer Doppellochblende in zwei Teilwellen aufgespalten wird. Da beide Öffnungen von der gleichen Primärwelle angeregt werden, emittieren diese nach dem Huygens'schen Prinzip Sekundärwellen, die die gleiche Phase aufweisen und daher „interferenzfähig“ sind.

Es gibt noch weitere Eigenschaften, die bei der Beobachtung von Interferenzerscheinungen erfüllt sein müssen. So darf der Gangunterschied der Wellen nicht beliebig groß sein. Wie bereits erwähnt wurde, erfolgt die atomare Emission eines Wellenzugs bei natürlichem Licht in einem sehr kurzem Zeitraum τ (Kohärenzzeit). Diese kurze Emissionszeit bedingt schließlich, dass die ausgesendeten Wellenzüge auch nur eine kleine Länge¹ besitzen. Ist c die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich für die Länge L des emittierten Wellenzugs

$$L = c\tau. \quad (17)$$

Die Länge L wird als Kohärenzlänge bezeichnet. Bei Interferenzversuchen ist darauf zu achten, dass der Gangunterschied nicht größer als die Kohärenzlänge wird. Andernfalls stammen die interferierenden Teilwellen nicht aus dem selben „Emissionsakt“ und besitzen daher keine konstante Phasenbeziehung.

Die Kohärenzlängen von Temperaturstrahlern wie z.B. einer Glühlampe oder der Sonne sind sehr klein (einige Wellenlängen $\approx 10 \mu\text{m}$). Bei Gasentladungslampen liegt die Kohärenzlänge bei einigen Millimetern bis Metern und kann sich bei Lasern gar im Bereich von vielen Kilometern bewegen.

Kohärenzlänge und spektrale Bandbreite

Bei unseren bisherigen Betrachtungen sind wir immer davon ausgegangen, dass die Lichtquelle monochromatisch ist. Die Kohärenzbedingung besagt, dass nur dann Interferenzen beobachtbar sind, wenn die sich überlagernden Wellen eine konstante Phasenbeziehung aufweisen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Lichtquelle monochromatisches Licht aussendet. Solch eine Lichtquelle gibt es aber nicht! Auch eine reale, extrem schmalbandige Lichtquelle wie z.B. ein Laser, emittiert nur Licht einer bestimmten Frequenz ω_0 mit einer endlichen spektralen Bandbreite² $\Delta\omega$. Damit ist gemeint, dass das Licht Frequenzanteile im Bereich von $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ enthält.

Betrachten wir eine Lichtquelle mit einem rechteckigen Frequenzspektrum, wie

¹Achtung: Hier ist die geometrische Länge des Wellenzugs gemeint und nicht die Wellenlänge!

²Dies folgt z.B. aus der Heisenberg'schen Energie-Zeit Unschärfe.

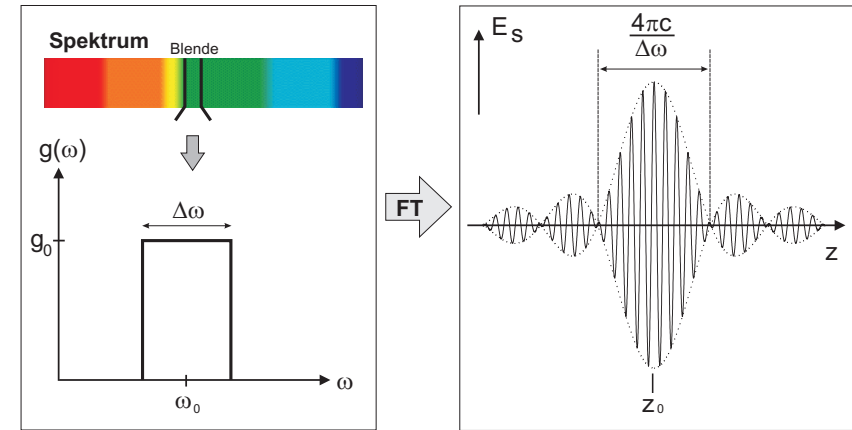


Abbildung 5: Links: Polychromatisches Licht mit rechteckförmigen Spektrum der spektralen Breite $\Delta\omega$. Rechts: Resultierende Wellenform. Der Pfeil mit der Abkürzung FT steht für Fouriertransformation.

es links in Abbildung 5 dargestellt ist. Solch ein Spektrum kann z.B. durch Ausblenden eines bestimmten Spektralbereichs eines kontinuierlichen Spektrums erzeugt werden. Die Amplitude $g(\omega)$ bei der Frequenz ω sei gegeben durch:

$$g(\omega) = \begin{cases} g_0, & |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2. \end{cases} \quad (18)$$

Das von solch einer Lichtquelle ausgesandte Licht entspricht einer Überlagerung von Wellen mit Frequenzen im Bereich von $\omega_0 - \Delta\omega/2$ bis $\omega_0 + \Delta\omega/2$:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(\omega t - k z)} d\omega = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} g_0 e^{i\omega(t - z/c)} d\omega, \quad (19)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für die Phase nehmen wir an, dass diese am Ort $z = ct$ für alle Frequenzen Null ist. Verwenden wir der Übersichtlichkeit wegen die Abkürzungen $\sigma = \omega - \omega_0$, $d\sigma = d\omega$ und $\rho = t - z/c$, so folgt:

$$E_S = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} g_0 e^{i\rho(\omega_0+\sigma)} d\sigma \quad (20)$$

$$= g_0 e^{i\rho\omega_0} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} e^{i\rho\sigma} d\sigma. \quad (21)$$

$$= \frac{g_0}{i\rho} e^{i\rho\omega_0} \left(e^{i\rho\Delta\omega/2} - e^{-i\rho\Delta\omega/2} \right) \quad (22)$$

$$= \frac{2g_0}{\rho} e^{i\rho\omega_0} \sin \rho\Delta\omega/2. \quad (23)$$

Ersetzen wir nun wieder σ und ρ durch die ursprünglichen Größen, so erhalten wir schließlich:

$$E_S = E_0 \frac{\sin(\Delta\omega/2(t - z/c))}{\Delta\omega/2(t - z/c)} e^{i\omega_0(t - z/c)}, \quad (24)$$

wobei hier $E_0 = g_0 \Delta\omega$ definiert wurde. Die Form dieser Welle ist in Abbildung 5 rechts dargestellt. Die Abbildungen 6a) und 6b) zeigen eine Messung die mit dem Michelson- Interferometer durchgeführt wurden. Die von einer Lichtquelle mit einem rechteckigen Frequenzspektrum ausgehende Welle ist amplitudenmoduliert. Die Amplitude ist an der Stelle z_0 maximal. Zudem besitzt der Wellenzug noch weitere Nebenmaxima, deren Amplituden aber schnell abfallen. Man bezeichnet solch einen Wellenzug auch als Wellenpaket.

Die Intensität des Wellenpakets berechnet sich aus dem Quadrat der Amplitude. Eine Rechnung zeigt, dass die Intensität des ersten Nebenmaximums nur 4,7 % der Intensität des Hauptmaximums beträgt. Die Intensitäten der weiteren Nebenmaxima betragen gar nur 1,7 %, 0,8 %, 0,5 % u.s.w. Nahezu die gesamte Intensität des Wellenpakets steckt im Hauptmaximum. Wir können daher annehmen, dass das Wellenpaket eine endliche Breite besitzt, welches der Breite des Hauptmaximums von $4\pi c/\Delta\omega$ entspricht.

Überlagern sich zwei solcher Wellenpakete mit einer relativen Verschiebung von $\Delta z = 2\pi c/\Delta\omega$, so fällt die Maximalamplitude des einen auf die erste Nullstelle des anderen Wellenpakets. Man kann also für Wellenpakete dieser Art die Kohärenzlänge L definieren durch:

$$\text{Kohärenzlänge:} \quad L = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}. \quad (25)$$

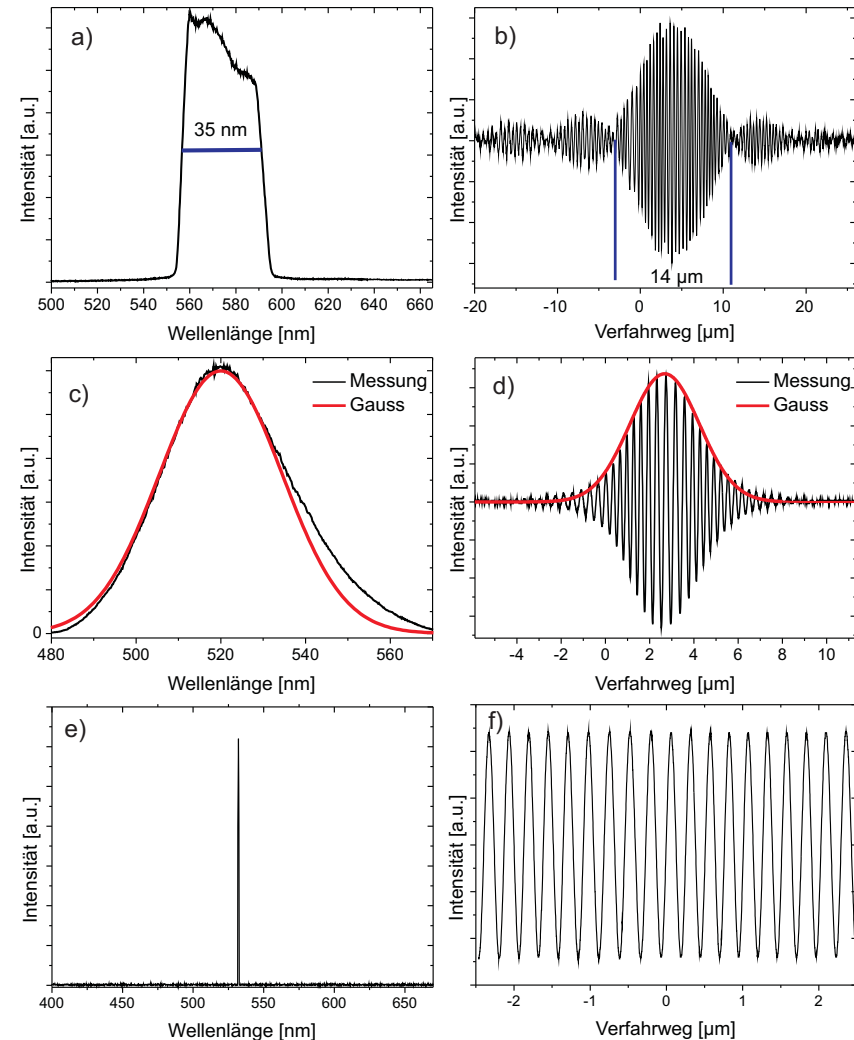


Abbildung 6: a) Modifiziertes, „rechteckförmiges“ Spektrum einer Halogenlampe. b) Gemessenes Interferogramm. c) Spektrum einer LED. d) Interferogramm der LED. e) Spektrum eines Lasers. f) Interferogramm eines Lasers.

Je schmalbandiger die Lichtquelle, desto größer ist die Kohärenzlänge. Damit wird nun auch verständlich, warum die Kohärenzlängen von Temperaturstrahlern so klein sind. Nur streng monochromatisches Licht (d.h. $\Delta\omega \rightarrow 0$) hat unendlich lange Wellenzüge und damit eine unendliche Kohärenzlänge.

Anstatt die Kohärenzlänge durch die Frequenz auszudrücken, können wir diese auch durch die Angabe der Wellenlänge beschreiben. Mit $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$ schreibt sich die Kohärenzlänge

$$\text{Kohärenzlänge: } L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (26)$$

Es soll noch angemerkt werden, dass zwischen der Amplitude E_S und dem Frequenzspektrum $g(\omega)$ in Gleichung (19) ein wichtiger Zusammenhang besteht: $g(\omega)$ ist die Fouriertransformierte von E_S . Im nächsten Praktikumsversuch *Fourieroptik* werden Sie sich mit dieser Thematik noch genauer beschäftigen.

In Abbildung 6c) ist das Spektrum einer grünen Leuchtdiode (LED) dargestellt. In Abbildung 6d) das resultierende mit dem Michelson-Interferometer gemessene Wellenpaket (Interferogramm). Das Spektrum lässt sich durch eine Gauß-Verteilung approximieren. Die Fouriertransformation einer Gaußfunktion ist ebenfalls eine Gaußfunktion. Das Interferogramm ist daher gaußförmig moduliert. Diese Methode findet Anwendung in der Fourier-Transform-Infrarotspektroskopie (FTIR-Spektroskopie). Dabei werden mit dem Michelson-Interferometer Interferogramme von Infrarot-Lichtquellen aufgenommen. Die dazugehörigen Spektren können danach einfach durch eine Fouriertransformation berechnet werden. Abbildung 6e) zeigt das Spektrum eines Lasers. Da dieses sehr schmalbandig ist, sieht man im Interferogramm auch über einen sehr großen Verfahrensweg keine Modulation. Das erklärt die große Kohärenzlänge gegenüber anderen Lichtquellen.

V.1 Interferenzen an dünnen Schichten

In den beiden folgenden Abschnitten, werden zwei Spezialfälle, die *Interferenzen gleicher Neigung* und die *Interferenzen gleicher Dicke* behandelt, die für das Verständnis des Michelson-Interferometers sehr wichtig sind.

Interferenzen gleicher Neigung

Interferenzen gleicher Neigung treten dann auf, wenn ein Lichtbündel auf eine transparente, planparallele Platte trifft. Abbildung 7a) verdeutlicht das Prinzip. Das von einer Lichtquelle ausgehende Lichtbündel fällt unter dem Winkel α auf

eine Platte der Dicke d und mit dem Brechungsindex n . Ein Teil der Intensität wird an der Oberfläche reflektiert, der andere Teil wird im Medium nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz gebrochen. Beim Austritt des Lichtbündels aus dem Medium tritt erneut eine Reflexion bzw. Transmission auf. Durch die Platte wird das einfallende Lichtbündel in mehrere reflektierte und transmittierte Lichtbündel aufgespalten, wobei benachbarte Teilbündel einen Gangunterschied entsprechend des optischen Wegunterschieds besitzen. In Abbildung 7b) ist dies für zwei benachbarte reflektierte Teilbündel dargestellt. Für den Gangunterschied Δ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \Delta &= n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} \\ &= \frac{2nd}{\cos\beta} - 2d \tan\beta \sin\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Mit Hilfe des Snellius'schen Brechungsgesetzes ergibt sich:

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos\beta} - \frac{2nd \sin^2\beta}{\cos\beta} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= 2nd \cos\beta \\ &= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}. \end{aligned} \quad (29)$$

Berücksichtigen wir noch zusätzlich, dass bei Reflexion am optisch dichteren Medium ein Phasensprung von π (bzw. ein Gangunterschied von $\lambda/2$) auftritt, so erhalten wir schließlich für den Gangunterschied:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (30)$$

Bringt man in den Strahlengang eine Sammellinse, so interferieren die Teilbündel im Punkt P in der Brennebene der Linse. Dabei tritt maximale Intensität auf, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Für den Fall, dass der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, löschen sich die Teilwellen aus.

Der Gangunterschied benachbarter Teilbündel hängt vom Einfallswinkel α (Neigungswinkel) des einfallenden Lichts ab. Ist das einfallende Licht nicht parallel, so dass mehrere Lichtbündel mit unterschiedlichen Einfallswinkel auf die Platte treffen (Abbildung 7c), so interferieren alle Teilbündel, die unter dem gleichen Neigungswinkel einfallen im selben Punkt. Daher spricht man von Interferenz gleicher Neigung.

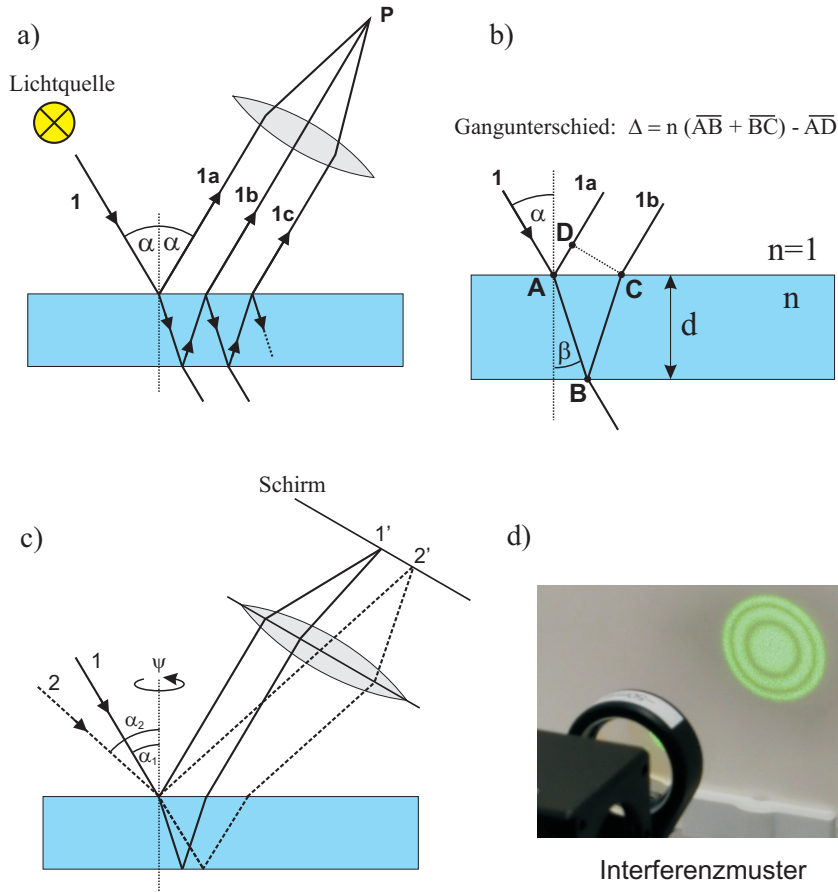


Abbildung 7: a) Interferenz gleicher Neigung. b) Berechnung des Gangunterschieds benachbarter Teilbündel. c) Strahlengang für zwei Lichtbündel mit unterschiedlichem Einfallswinkel. d) Interferenzmuster: Haidinger'sche Ringe.

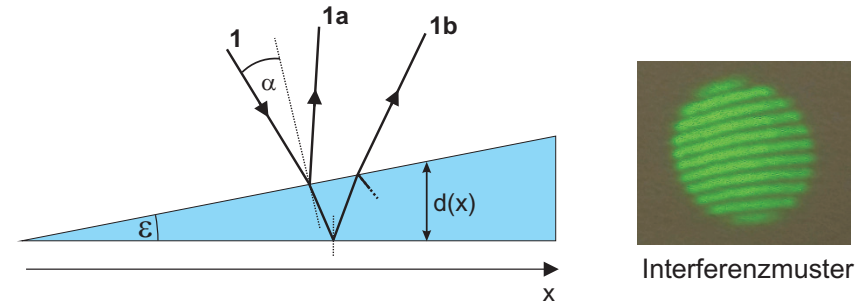


Abbildung 8: Interferenz gleicher Dicke

Abbildung 7c) zeigt nur einen zweidimensionalen Spezialfall, bei dem die Wellenbündel in der gleichen Einfallsebene auf die Platte treffen. Im Dreidimensionalen, bei dem die Wellenbündel auch unter unterschiedlichen Winkel ψ zum Einfallslot einfallen, interferieren alle Teilwellen, die den gleichen Neigungswinkel α besitzen, nicht in einem Punkt, sondern innerhalb eines Kreistrings in der Brennebene der Linse. Als Interferenzmuster beobachtet man daher ein konzentrisches Ringsystem, die als Haidinger'sche Ringe bezeichnet werden (Abbildung 7d).

Interferenzen gleicher Dicke

Fällt paralleles Licht auf eine keilförmige Platte, so verlaufen die reflektierten Lichtbündel nicht mehr parallel zueinander (Abbildung 8). Falls der Keilwinkel ϵ sehr klein ist, gilt für den Gangunterschied der Teilbündel 1a und 1b

$$\Delta \approx 2d(x)\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (31)$$

Fällt das Licht zudem fast senkrecht auf den Keil, so gilt $\sin \alpha \approx 0$ und somit

$$\Delta \approx 2d(x)n - \frac{\lambda}{2}. \quad (32)$$

Der Gangunterschied ändert sich mit der Keildicke $d(x)$. Nur in einem Streifen parallel zur Keilkante, d.h. für $d(x) = \text{konstant}$, ist der Gangunterschied gleich groß. Blickt man von oben auf den Keil, so beobachtet man daher ein Streifenmuster (Fizeau-Streifen).

V.2 Das Michelson-Interferometer

Der Aufbau eines Michelson-Interferometers ist in Abbildung 9a) skizziert. Die von einer Lichtquelle ausgehenden Wellenzüge treffen auf einen Strahlteiler, der das einfallende Licht in zwei Teilwellen gleicher Intensität aufteilt. Der eine Teil wird senkrecht zur Einfallsrichtung „nach oben“ abgelenkt, der andere Teil wird nicht abgelenkt und läuft weiter in den „linken“ Schenkel. Nach dem Durchlaufen einer Wegstrecke s treffen die Teilwellen jeweils auf einen weiteren Endspiegel, der das Licht zurückreflektiert. Der Endspiegel im linken Schenkel des Interferometers (beweglicher Spiegel) ist zudem um eine Distanz Δx verschiebbar. Der kippbare Spiegel im oberen Schenkel lässt sich um einen kleinen Winkel ϵ verkippen. Die reflektierten Wellenbündel treffen wieder auf den Strahlteiler und verlassen diesen in gleicher Richtung. Schließlich treffen beide Wellenbündel auf einem Schirm oder Detektor, an dem sich die entstehenden Interferenzmuster beobachten lassen. Die optischen Lichtwege in den jeweiligen Schenkeln

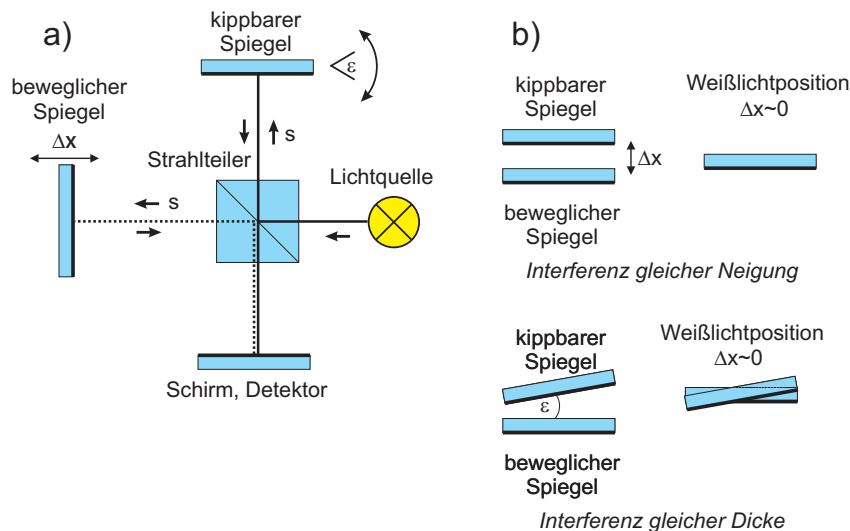


Abbildung 9: a) Aufbau eines Michelson-Interferometers. b) Die beiden Endspiegel bilden eine „Luftplatte“, so dass je nach Spiegelstellung entweder Interferenz gleicher Neigung oder Interferenz gleicher Dicke auftritt.

sind je nach Position des beweglichen Spiegels unterschiedlich groß. Zum besse-

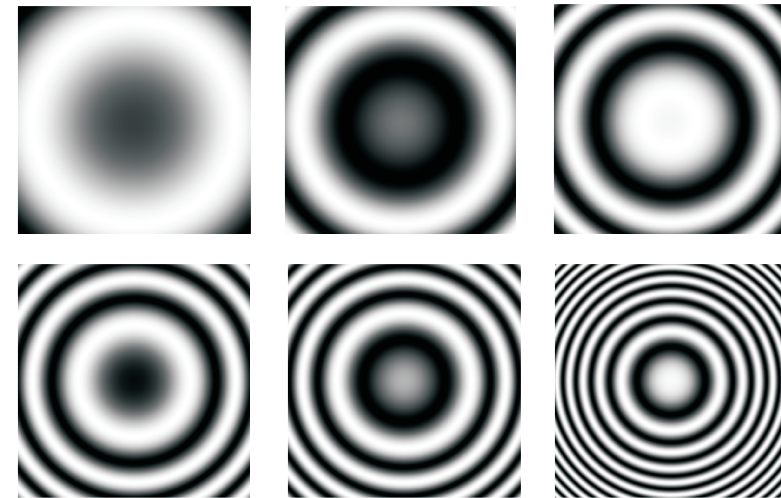


Abbildung 10: Interferenzmuster bei unterschiedlichen Spiegelabständen.

ren Verständnis können wir uns die jeweiligen Lichtwege in der gleichen Richtung vorstellen, indem wir uns z.B. den linken Schenkel um 90° auf den oberen Schenkel geklappt denken. Dadurch ändern sich nicht die tatsächlich durchlaufenen Lichtwege. Es wird aber ersichtlich, dass die beiden Spiegel eine Luftplatte der Dicke Δx bilden und je nach Orientierung des kippbaren Spiegels, entweder Interferenz gleicher Neigung oder Interferenz gleicher Dicke auftritt (Abbildung 9b).

Bei parallelen Spiegeln (Interferenz gleicher Neigung) beträgt der Gangunterschied in Richtung des Winkels α gemäß Gleichung (30):

$$\Delta = 2\Delta x \cos \alpha - \frac{\lambda}{2}, \quad (33)$$

wobei wir hier für den Brechungsindex $n = 1$ angenommen haben. Als Interferenzmuster beobachtet man ein Ringsystem wie es in Abbildung 10 für unterschiedliche Spiegelabstände Δx dargestellt ist. Die Interpretation dieses Musters ist besonders einfach, wenn wir uns nur auf das Zentrum, d.h. $\alpha = 0$,

beschränken. Hierfür folgt aus (33):

$$\Delta|_{\alpha=0} = 2\Delta x - \frac{\lambda}{2}. \quad (34)$$

Für $\Delta x = \lambda/2$ beträgt der Gangunterschied $\lambda/2$, so dass im Zentrum das Minimum 0-ter Ordnung liegt. Sind die Spiegel um $\Delta x = 3\lambda/4$ verschoben, beträgt der Gangunterschied λ . Im Zentrum liegt dann das Maximum 1-ter Ordnung. Verändert man den Spiegelabstand kontinuierlich, so quillt bei jeder Wegänderung um $\lambda/2$ eine neue Interferenzordnung aus dem Zentrum hervor und die niedrigeren Ordnungen bewegen sich radial nach außen.

Wird der kippbare Spiegel um einen kleinen Winkel geneigt, so geht das kreisförmige Interferenzmuster in ein Streifenmuster über (Interferenz gleicher Dicke). Auch in diesem Fall führt eine Vergrößerung von Δx um $\lambda/2$ dazu, dass eine neue Interferenzordnung entsteht. Wird der bewegliche Spiegel kontinuierlich verschoben, so wandern die Interferenzstreifen gleichmäßig in eine bestimmte Richtung.

Dieses Prinzip lässt sich zur Bestimmung der Wellenlänge der Lichtquelle verwenden. Der bewegliche Spiegel kann mit Hilfe eines Motors messbar verschoben werden. Wird der Spiegel um die Strecke Δx verschoben, so wandern Δm Interferenzstreifen an einer Markierung vorbei. Durch Messung von Δx und Zählung der dabei vorbeigelaufenen Interferenzstreifen Δm kann die Wellenlänge berechnet werden. Da jeder gezählte Streifen einer Änderung von Δx um $\lambda/2$ entspricht, folgt für die Wellenlänge:

$$\lambda = 2 \frac{\Delta x}{\Delta m}. \quad (35)$$

Des Weiteren sollen Sie interferometrisch den Brechungsindex von Luft bestimmen. Dazu wird in einem Interferometerschenkel eine Glasküvette eingebaut. Der Luftdruck in der Küvette kann mit Hilfe einer Pumpe und einem Nadelventil variiert werden. Ändert sich der Druck in der Küvette, so ändert sich der Brechungsindex Δn und damit die optische Weglänge. Auf einem Schirm kann man dann wieder Δm Interferenzstreifen an einer Markierung vorbeilaufen sehen. Ist a die Länge der Küvette, so folgt für die Änderung des Gangunterschieds

$$\Delta = 2a\Delta n. \quad (36)$$

Die Zwei berücksichtigt, dass die Küvette von dem Lichtbündel zweimal durch-

laufen wird. Mit $\Delta = \lambda\Delta m$ folgt:

$$\Delta m = \frac{\Delta}{\lambda} = 2a \frac{\Delta n}{\lambda} \rightarrow \Delta n = \frac{\lambda}{2a} \Delta m. \quad (37)$$

Der Brechungsindex wird über den ganzen verfügbaren Bereich $\Delta n = n(\text{Luft}) - n(\text{Vakuum}) = n - 1$ variiert, indem der Druck in der Küvette von $p = 0$ bis $p = b$ (b : Luftdruck) verändert wird und man dabei die am Marker vorbeilaufenden Interferenzstreifen Δm zählt. Dann ist

$$n(\lambda, T, b) - 1 = \frac{\lambda}{2a} \Delta m(b). \quad (38)$$

Mit dem Michelson-Interferometer lassen sich auch Interferenzen mit Lichtquellen beobachten, die eine sehr kleine Kohärenzlänge besitzen (z.B. Leuchtdiode, Glühbirne). Voraussetzung dafür ist, dass der Gangunterschied in den beiden Interferometerarmen nicht größer ist als die Kohärenzlänge. Daher müssen zur Beobachtung dieser sogenannten „Weißlichtinterferenzen“ die Lichtwege in den beiden Schenkeln nahezu gleich groß sein. Diese Einstellung, bei der der bewegliche Spiegel so justiert ist, dass $\Delta x \approx 0$ gilt, bezeichnet man als Weißlichtposition (Abbildung 9b).

V.3 Bedienung des Versuchsaufbaus

Im Folgenden wird kurz auf die Justierung des Michelson Interferometers und die Bedienung des Oszilloskops eingegangen.

Justierung des Interferometers

Der Aufbau des im Praktikum verwendeten Michelson-Interferometers ist in Abbildung 11 dargestellt. Der Aufbau entspricht im wesentlichen der Skizze in Abbildung 9a). Auf der rechten Seite können zwei verschiedene Lichtquellen (Laser oder Leuchtdiode) montiert werden. Das Licht trifft auf einen fest justierten Strahlteilerwürfel. Ein Teilstrahl wird nach links zum beweglichen Spiegel geleitet, der andere nach oben zu dem festen Spiegel. Die Interferenz der Teilstrahlen lassen sich auf einem Schirm beobachten und können zusätzlich mit einer Fotodiode elektronisch detektiert werden. Im oberen Schenkel auf Position 3 kann zur Messung des Brechungsindex von Luft noch eine evakuierbare Glasküvette eingesetzt werden. Die Position des beweglichen Endspiegels im linken Interferometerschenkel kann mit Hilfe eines Motors eingestellt werden. Die Bedienelemente der Motorsteuerung sind in Abbildung 11 unten dargestellt. Mit

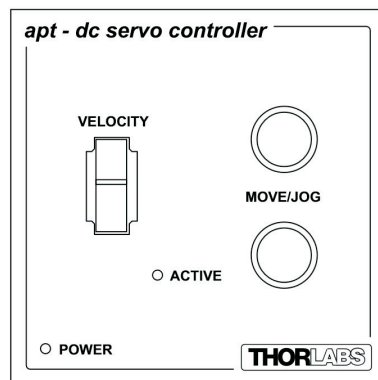
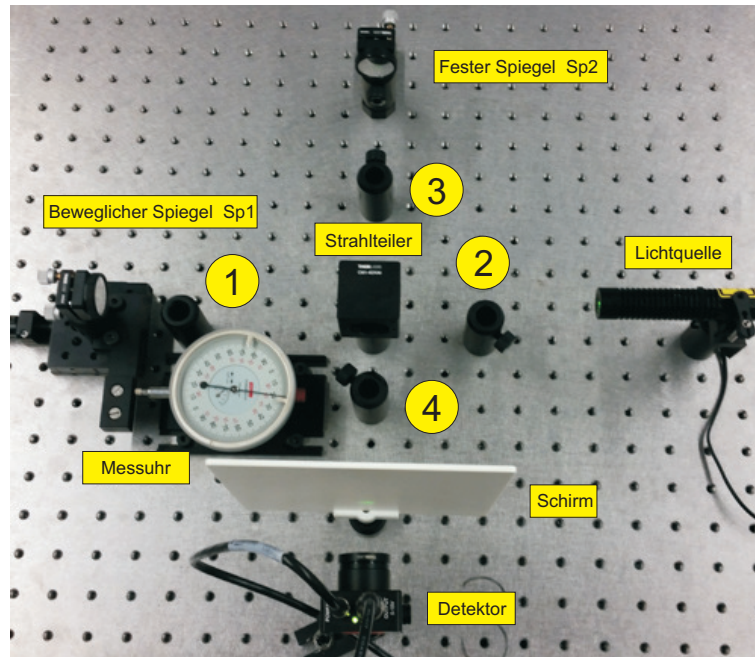


Abbildung 11: Oben: Aufbau des im Praktikum verwendeten Michelson-Interferometers
Unten: Bedienoberfläche der Motorsteuerung

dem linken Wipptaster (VELOCITY) kann der Spiegel kontinuierlich verfahrend werden. Wird der Taster nach vorne gedrückt, so bewegt sich der Spiegel in Richtung des Strahlteilers. Die beiden Taster (MOVE/JOG) rechts bewegen den Spiegel um eine feste Distanz. Der obere Taster verschiebt den Spiegel um 3 mm in Richtung des Strahlteilers, der untere Taster entsprechend 3 mm vom Strahlteiler weg. Die Position des Spiegels kann mit einer Messuhr gemessen werden.

Entfernen Sie die evakuierbare Küvette falls sich diese im Strahlengang befindet. Der bewegliche Spiegel sollte sich zunächst nicht im Bereich der Weißlichtposition befinden. Um dies sicherzustellen, verfahren Sie den Spiegel am einfachsten auf die Nullposition der Messuhr. Die Arbeitshöhe wird durch eine Irisblende festgelegt. Platzieren Sie diese in der Halterung 1 (Abbildung 11) und stellen Sie den Durchmesser der Öffnung auf etwa 0,5 mm ein. Platzieren Sie den grünen Diodenlaser in der Halterung ganz rechts und justieren Sie diesen so, dass er zentrisch auf die Irisblende trifft. Anschließend die Iris in den Halter bei Position 2 stecken. Blenden Sie den vertikalen Strahl aus, indem Sie den Schirm in den Halter bei Position 3 stecken. Justieren Sie den linken, beweglichen Spiegel so, dass der reflektierte Strahl zentrisch auf die Irisblende des Detektors trifft. Dazu befinden sich auf der Rückseite der Spiegelhalterung zwei Mikrometerschrauben mit denen Sie den reflektierten Strahl in horizontaler und vertikaler Richtung verschieben können. Die Mikrometerschrauben vorsichtig einstellen und auf keinen Fall überdrehen.

Analog verfahren Sie mit dem festen Spiegel. Blenden Sie den horizontalen Strahl aus (Schirm auf Position 1) und justieren Sie den festen Spiegel so, dass der Strahl zentrisch auf die Irisblende des Detektors trifft. Entfernen Sie danach die Irisblende aus dem Aufbau und stellen Sie den Schirm auf den Halter vor dem Detektor. Eventuell sehen Sie jetzt schon ein Interferenzmuster. Weiten Sie den Laser etwas auf. Montieren Sie dazu die -50 mm Linse in den Halter auf Position 4. Nun sollten Sie Interferenzen beobachten können. Falls die Streifen sehr eng beieinander liegen, können Sie diese durch vorsichtiges Nachjustieren einer der Spiegel auseinander schieben. Um ein Ringsystem beobachten zu können brauchen wir divergentes Licht. Platzieren Sie daher auf Position 2 die Linse +200 mm und richten Sie diese symmetrisch aus. Nun sollten Sie ein Ringsystem beobachten. Mit den Mikrometerschrauben an den Spiegeln können Sie das Interferenzmuster symmetrisch auf den Detektor ausrichten.

Bedienung des Oszilloskops

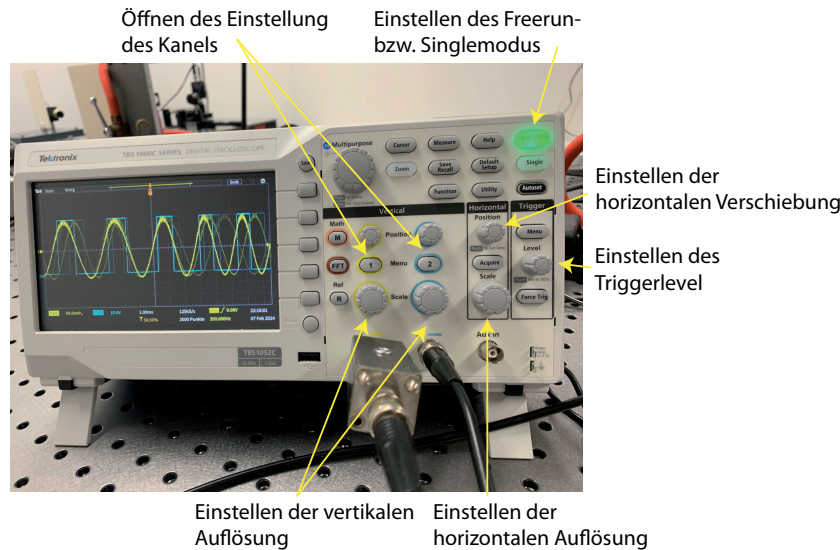


Abbildung 12: Bedienelemente des Oszilloskops

Abbildung 12 zeigt die wichtigsten Bedienelemente des Oszilloskops. Für die Messung der Wellenlänge und des Brechungsindex von Luft werden beide Eingänge des Oszilloskops genutzt. Es ist sinnvoll, das Signal des Detektors auf Channel 1 zu legen und das Signal des Diskriminators auf Channel 2. Die Kopplung von Channel 1 sollte auf „AC“ eingestellt sein. Über einen Druck auf den im Bild markierten Button, kann das Menü für die Channeleinstellungen geöffnet und die Kopplungsart eingestellt werden. Auch die horizontale Auflösung sollte so eingestellt werden, dass genügend Perioden des Signal dargestellt werden. Dies kann über den Drehregler „Scale“ im Bereich „Horizontal“ eingestellt werden. Sollte das Scopebild in horizontaler Richtung verschoben sein, kann über einen Druck auf den Button „Position“ das Bild wieder zentriert werden. Man erkennt das am dem kleinen Marker mit einem T, der dann oben in der Bildschirmmitte zu sehen ist. Für die Messung der Kohärenzwellenlänge einer LED muss das Scope im Singlemodus arbeiten. Dies ist über einen Druck auf den entsprechenden Button umstellbar. Ebenfalls muss für diese Messung der Triggerlevel so eingestellt werden, dass die zu messende Interferenz den Trigger auslöst, nicht aber das Rauschen. Über den „Save“-Button wird das Speicher-

menü aufgerufen. Hier besteht die Möglichkeit das gemessene Signal sowohl als Bild oder als .csv-Datei zu speichern. Sollten während des Versuch noch Fragen bzgl. der Bedienung des Oszilloskops entstehen, kann Ihnen Ihr Tutor weiterhelfen.

VI Durchführung des Versuchs

Achtung:

Optische Elemente wie Linsen und Spiegel sind äußerst empfindlich. Nicht benötigte Elemente in der Lochplatte aufbewahren. Die Oberflächen niemals mit den Fingern berühren. Nicht direkt in den Laser und die Leuchtdiode blicken. Schalten Sie diese aus falls sie nicht benötigt werden.

Aufgabe 1: Messung der Wellenlänge des Lasers

Verstellen Sie den festen Spiegel so, dass Sie etwa 2 bis 3 Interferenzringe auf dem Detektor beobachten. Die Öffnung der Irisblende am Detektor auf einen Durchmesser von etwa 1 mm einstellen (Abbildung 13 links). Schalten Sie das Oszilloskop ein. An Kanal 1 ist direkt das Detektorsignal angeschlossen. Dieses Signal wird zusätzlich auf den Eingang eines Diskriminators gegeben. Die Elektronik bewirkt, dass das Signal nochmals verstärkt wird und in ein Rechtecksignal umgewandelt wird (Abbildung 13 rechts). Jeder Impuls entspricht einem Interferenzmaximum. Die Maxima werden mit dem integrierten Zähler gezählt. Das Ausgangssignal des Diskriminators wird am Oszilloskop an den Eingang des Channel 2 angeschlossen. Bei der Messung der Wellenlänge ist es wichtig, dass tatsächlich jeder Interferenzstreifen detektiert und gezählt wird. Verfahren Sie dazu mit dem Wipptaster der Motorsteuerung den beweglichen Spiegel und beobachten Sie das Oszilloskopbild. Bei jedem Maximum des Sinussignals muss der Diskriminator einen Rechteckpuls ausgeben. Falls dies nicht der Fall ist, können Sie folgendes optimieren:

- Variierung des Durchmessers der Irisblende am Detektor.
- Verstärkung des Detektors (Drehesalter am Detektorgehäuse auf 60 dB bzw. 70 dB stellen).
- Verstärkung des Diskriminators.

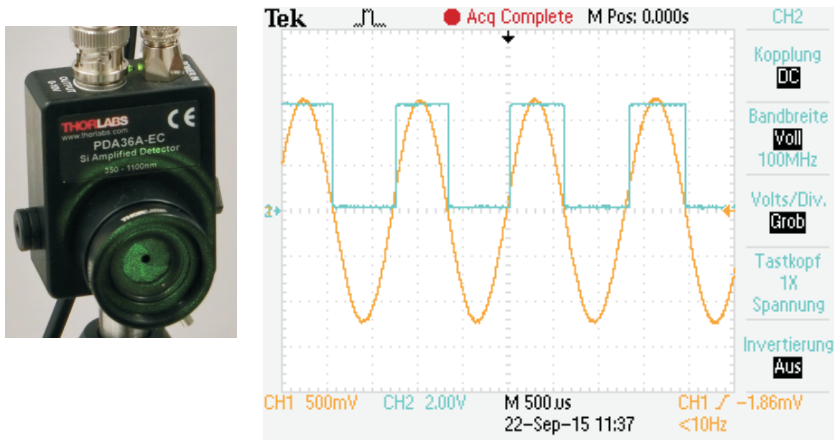


Abbildung 13: Links: Einstellung des Interferometers und des Detektors zur Messung der Wellenlänge. Rechts: Messung der Signale mit einem Oszilloskop.

Die Irisblende sollte nicht zu groß eingestellt werden, sonst mitteln Sie über das Interferenzmuster. In der Regel reicht es aus die Verstärkung am Diskriminator zu optimieren. Die Verstärkung sollte aber auch nicht zu groß gewählt werden, sonst wird der Aufbau zu empfindlich und anfällig gegen kleinste Erschütterungen.

Machen Sie sich mit der Messuhr vertraut. Ein Teilstrich entspricht $1\text{ }\mu\text{m}$, eine volle Zeigerumdrehung $0,2\text{ mm}$. Fahren Sie den Spiegel in Richtung Messuhr und stellen Sie die Position auf einen Startwert s_a z.B. $s_a=0$. Es ist völlig egal ob der Startwert 0 oder etwa 0,1 ist. Wichtig ist, dass Sie beim Einnehmen der Startposition nicht die Verfahrrichtung des Motors ändern. Falls Sie die Verfahrrichtung ändern, zeigt die Messuhr solange nichts an, bis das Spiel der Getriebespindel ausgeglichen ist. Notieren Sie den Startwert s_a . Ab jetzt sind alle Erschütterungen zu vermeiden. Drücken Sie die Resettaste am Zähler und starten Sie den Motor indem Sie den rechten oberen Knopf am Motorcontroller vorsichtig drücken. Der Spiegel bewegt sich nun ca. 3 mm und die dabei durchlaufenden Interferenzmaxima werden vom Zähler registriert. Notieren Sie sobald der Spiegel angehalten hat sofort die gemessenen Impulse. Danach notieren Sie die Endposition s_e der Messuhr.

Diese Messung ist insgesamt fünfmal mit jeweils anderen Werten für s_0 durch-

zuführen. Da die Messuhr maximal 5 mm aufnehmen kann, muss die Startposition kleiner als 2 mm sein. Für die Wellenlänge gilt dann

$$\lambda = 2 \frac{s_e - s_a}{m}, \quad (39)$$

wobei m die gezählten Impulse sind. Die Genauigkeit der Messuhr können Sie aus dem ausliegenden Datenblatt entnehmen.

Aufgabe 2: Messung des Brechungsindex von Luft

Als Lichtquelle wird weiterhin der grüne Laser benutzt. Platzieren Sie vor dem Detektor den Schirm und vor dem festen Spiegel auf Position 3 die Küvette. Stellen Sie den festen Spiegel so ein, dass Sie auf dem Schirm 2-3 Interferenzringe sehen. Schließen Sie das Nadelventil indem Sie den Einstellknopf ganz nach rechts drehen. Schalten Sie die Vakuumpumpe ein und öffnen Sie den Absperrhebel solange, bis sich der Druck in der Küvette nicht mehr ändert. Danach den Absperrhebel wieder schließen und die Pumpe ausschalten. Mittels des Nadelventils lässt man in die evakuierte Gaszelle langsam Luft einströmen. Dabei quellen aus dem Zentrum neue Interferenzringe hervor. Lesen Sie nach je 5 Interferenzringen das Manometer ab ($p_0, p_5, p_{10}, \dots$). Falls Sie allein arbeiten, müssen Sie bei der Ablesung des Manometerwertes das Nadelventil schließen und anschließend wieder öffnen. Führen Sie die Messung dreimal durch und notieren Sie die Zimmertemperatur.

Aufgabe 3: Messung der Kohärenzlänge einer Leuchtdiode

Entfernen Sie die Küvette aus dem Strahlengang. Verfahren Sie den beweglichen Spiegel in den Bereich der Weißlichtposition. Der ungefähre Wert ist auf dem Interferometer angegeben. Stellen Sie den festen Spiegel so ein, dass Sie Interferenzstrukturen mit möglichst großem Abstand zueinander sehen, d.h. möglichst nur einen Interferenzstreifen (siehe Abbildung 14).

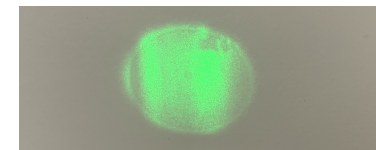


Abbildung 14: Weit ausgedehnte Interferenzstruktur

Anstatt des Lasers bauen Sie nun die Leuchtdiode ein. Entfernen Sie die -50 mm Linse vor dem Detektor und richten Sie die Leuchtdiode so aus, dass Sie den

Schatten des Strahlteilers zentrisch auf dem Detektor sehen. Die Öffnung der Irisblende am Detektor sollte etwa 1-2 cm betragen. Stellen Sie die Verstärkung des Detektors auf das Maximum von 70 db ein.

Da die Kohärenzlänge der Leuchtdiode sehr klein ist, sind Interferenzen nur über einen sehr kleinen Verfahrweg beobachtbar. Um diese mit dem Oszilloskop darzustellen, muss das Oszilloskop im Single- Modus betrieben werden. In diesem Modus „wartet“ das Oszilloskop auf ein Signal einer gewissen Größe, welches Sie mit dem Triggerlevel einstellen können. Sobald ein Signal anliegt welches den Level übersteigt, beginnt das Oszilloskop mit der Aufzeichnung und speichert den Signalverlauf. Eine Anleitung zur Einstellung des Single-Modus liegt aus.

Stellen Sie die vertikale Auflösung von Kanal 1 auf 50 mV, die Zeitbasis auf 10 ms und legen Sie den Triggerlevel gerade etwas über den Rauschpegel, so dass das Oszilloskop im Single-Modus nicht auslöst. Aktivieren Sie den Singlemodus am Oszilloskop und verfahren Sie den beweglichen Spiegel in Richtung Strahlteiler. Dazu den Wippschalter des Motorcontrollers ganz nach oben drücken und halten. Sobald Sie auf die Weißlichtposition kommen löst das Oszilloskop aus und speichert das Signal. Lassen Sie dann sofort den Wippschalter los und stellen Sie den Schirm vor den Detektor. Fahren Sie den Spiegel **sehr langsam** in die entgegengesetzte Richtung bis Interferenzen sichtbar werden. Nun können Sie durch vorsichtiges Verstellen der Mikrometer- schrauben des festen Spiegels den Kontrast der Interferenzstreifen noch etwas optimieren. So erhalten Sie ein noch deutlicheres Interferenzmuster am Oszilloskop.

Entfernen Sie den Schirm und wiederholen Sie die Messung mit optimierten Oszilloskopeinstellungen. Durch die Optimierung des Kontrastes könnte es notwendig werden, die vertikale Auflösung des Oszilloskops zu verringern, sodass das Interferenzmuster nicht oben „abgeschnitten“ wird. Entfernen Sie sich etwa eine Umdrehung der Messuhr von der Weißlichtposition und fahren Sie dann mit maximaler Geschwindigkeit zurück durch die Weißlichtposition (Wippschalter ganz durchdrücken). Sie sollten ein Signalverlauf bekommen, wie in Abbildungen 6d) dargestellt. Speichern Sie den Signalverlauf auf einen USB-Stick, eine Anleitung dafür liegt aus.

VII Auswertung

Zu Aufgabe 1: Berechnen Sie die Wellenlänge des grünen Lasers unter Berücksichtigung des statistischen Fehlers (Messreihe) und des systematischen Fehlers (Messuhr). Vergleichen Sie diesen Wert mit den Herstellerangaben:

$$\lambda = (532 \pm 1) \text{ nm.}$$

Zu Aufgabe 2: Berechnen Sie den Brechungsindex von Luft für Normalbedingungen. Ist n_0 der Brechungsindex bei Normalbedingungen, dann gilt:

$$\frac{n_0 - 1}{n(p) - 1} = \frac{p_0 T}{p T_0}. \quad (40)$$

Mit Hilfe von Gleichung (38) folgt dann:

$$(n_0 - 1) = (n - 1) \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} = \frac{\lambda}{2a} \frac{\Delta m}{p} \frac{p_0 T}{T_0}, \quad (41)$$

wobei T die Temperatur während der Messung ist und die mit 0 indizierte Größen sich auf Normalbedingungen beziehen ($T_0=273,15 \text{ K}$, $p_0=101325 \text{ Pa}$).

Tragen Sie in einem Diagramm Δm über den Druck p auf und bestimmen Sie Steigung $\Delta m/p$. Damit können Sie aus Gleichung (41) n_0 bestimmen. Für die Wellenlänge setzen Sie entweder den Literaturwert ein oder den von Ihnen zuvor bestimmten Wert. Das Innenmaß der Küvette beträgt $a = (50 \pm 0,05) \text{ mm}$.

Das Manometer besitzt eine Güteklasse von 0,6. Eine beliebige Ablesung kann um maximal 0,6% vom Skalenendwert (800 Torr) falsch sein, also um knapp 5 Torr. Dieser systematische Fehler der Absolutanzeige sollte sich bei Differenzmessungen zwar weitgehend herausheben, es muss jedoch damit gerechnet werden, dass auch die relative Teilungsgenauigkeit der Skala nicht viel besser als 0,6% ist (d.h. 1 Teilstrich 5 Torr $\pm 0,6\%$). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert $n_0=1,00028$ (trockene Luft bei Normatmosphäre nach *David R. Lide (Hrsg.): CRC Handbook of Chemistry and Physics. 90. Auflage*).

Zu Aufgabe 3: Berechnen Sie aus dem gemessenen Interferenzverlauf der grünen LED die Kohärenzwellenlänge. Die Verfahrensgeschwindigkeit des Motors beträgt bei maximaler Aussteuerung 0.1 mm/s.

VIII Anhang: Auswertung mit Jupyter Notebook

Stellen Sie zunächst den gemessenen Signalverlauf grafisch als matplotlib-plot dar. Die vom Oszilloskop erzeugte Datei besitzt 18 Headerzeilen und besteht aus 2 Spalten (Zeit und Spannung).

Wir benötigen die folgenden Module:


```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy-Funktion `np.loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname der Messung angeben. Benutzen Sie anstatt 'TEK0000.CSV' den Namen Ihrer Datei. Desweiteren werden die erste 18 Headerzeilen übersprungen.

```
t,U=np.loadtxt('TEK0000.CSV',delimiter=",",skiprows=18, unpack=True)

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t,U, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED')
plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8]) # hier die Achsenbereiche
                                   # anpassen
plt.savefig('interferogramm_1.pdf',format='pdf')
```

In der Zeile `plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8])` müssen Sie die Achsenbereiche auf Ihre Werte anpassen. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 15 aussehen.

Legen Sie als nächstes eine Gaußkurve als Einhüllende an die Daten. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Methode 1: Sie zeichnen die Gaußkurve indem Sie die Parameter von Hand variieren.
- Methode 2: Sie bestimmen die Einhüllende und fitten eine Gaußkurve an.

Entscheiden Sie sich für eine dieser Methoden.

Methode 1:

```
a=0.062      # Flaeche Gauss
mu=0.011     # Lage des Maximums
```

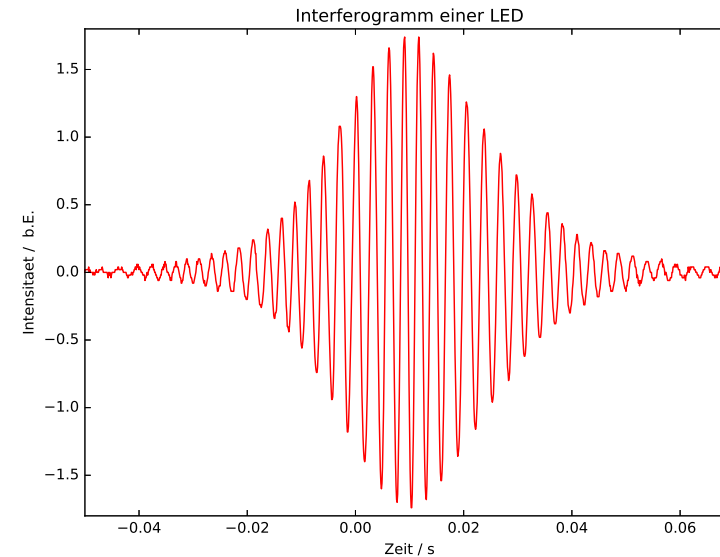


Abbildung 15: Interferogramm einer grünen LED

```
sig=0.0148 # Sigtabreite
```

```
def gauss(t):
    return a/np.sqrt(2*np.pi)/sig*np.exp(-(t-mu)**2/(2*sig**2))

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t,U, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED')
plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8])
plt.plot(t,gauss(t), color='blue', linewidth=1)
plt.savefig('interferogramm_2.pdf',format='pdf')
```

Variieren Sie die Parameter a, mu, sig bis die Gaußkurve als Einhüllende an

den Daten liegt (Abbildung 16). Aus der Breite der Gaußverteilung (σ oder Halbwertsbreite) können Sie die Kohärenzlänge der Leuchtdiode abschätzen. Die Verfahrensgeschwindigkeit beträgt 0,1 mm/s.

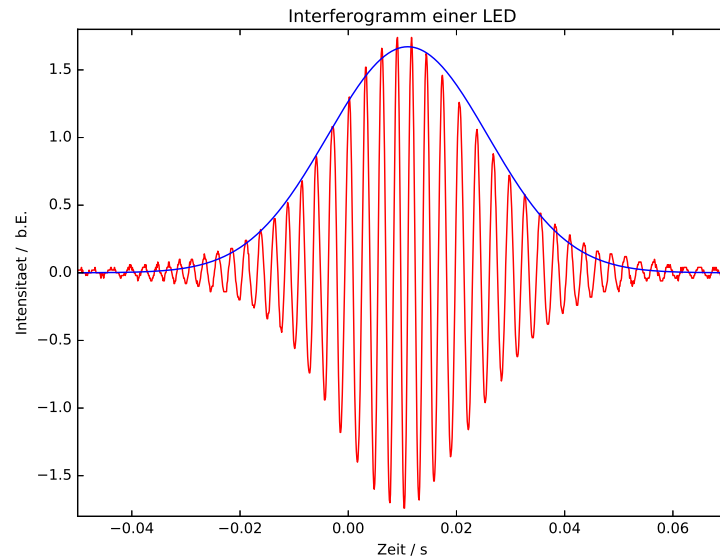


Abbildung 16: *Interferogramm mit Gaußkurve*

Methode 2:

Um die Einhüllende zu erhalten bestimmen wir die Maxima des Interferogramms. Dies geht z.B. mit der Funktion `find_peaks_cwt()`.

```
from scipy import signal
peakind = signal.find_peaks_cwt(U, np.arange(1,30),noise_perc=20)
```

Die gefundenen Maxima befinden sich im Array `peakind`. Stellen Sie diese grafisch zusammen mit dem Interferogramm dar (Abbildung 17). Falls nicht alle Maxima gefunden wurden, variieren Sie den Wert von `noise_perc=20`.

```
plt.plot(t[peakind], U[peakind],marker='o',linewidth=0)
```

```
plt.plot(t,U, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED')
plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8])
```

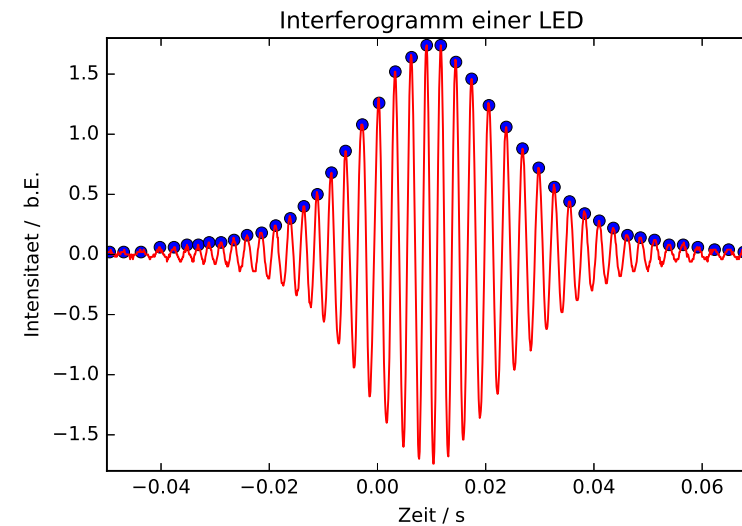


Abbildung 17: *Interferogramm mit Maxima*

An die gefundenen Maxima können wir nun eine Gaußkurve fitten.

```
#Fitfunktion Gauss
def fitFunc(t, a, mu, sig):
    return a/np.sqrt(2*np.pi)/sig*np.exp(-(t-mu)**2/(2*sig**2))
```

```
from scipy.optimize import curve_fit
popt, pcov= curve_fit(fitFunc, t[peakind], U[peakind])
```

```
x=np.linspace(-0.05,0.1,100) #x-Werte fuer die Fitfunktion
plt.plot(x, fitFunc(x, *popt))
```

```
plt.plot(t[peakind], U[peakind], marker='*', linewidth=0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED (Gau{\ss}fit)')
plt.axis([-0.05, 0.07, -0.1, 1.8])
print(*popt)
plt.savefig('interferogramm_3.pdf', format='pdf')
```

Die x-Werte die hier in der ersten Zeile generiert werden müssen Sie auf Ihren Bereich anpassen (linspace(start,ende,100 Werte)). Mit `*popt` werden die Fitparameter automatisch in Ihre zuvor definierte Funktion entpackt. Das Ergebnis ist in Abbildung 18 dargestellt. Aus der Breite der Gaußverteilung (σ

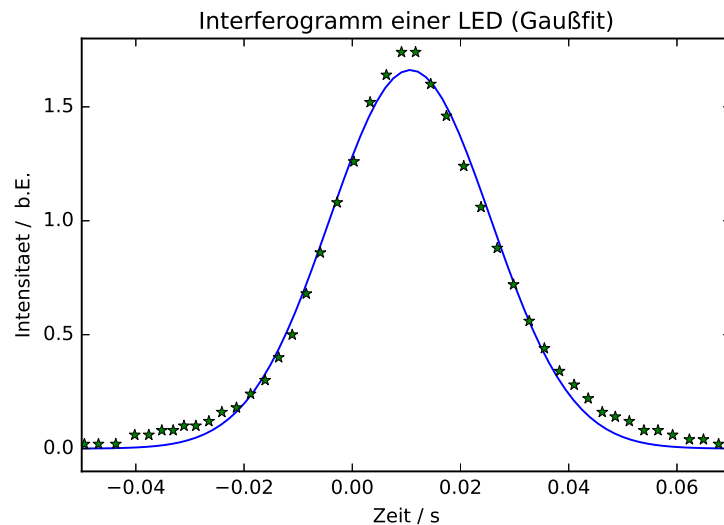


Abbildung 18: *Einhüllende des Interferogramms mit Gaußfit*

oder Halbwertsbreite) können Sie die wieder die Kohärenzlänge der Leuchtdiode abschätzen. Die Verfahrensgeschwindigkeit beträgt 0,1 mm/s.

Versuch 233 Fourieroptik

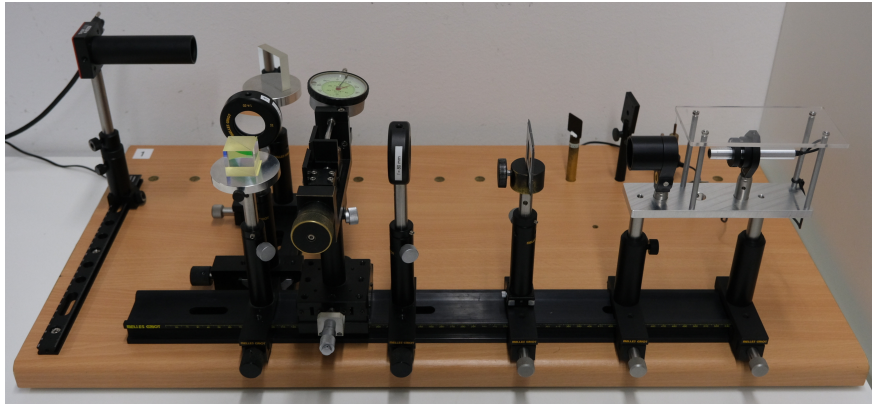


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Diodenlaser 532 nm
- Ein Satz Beugungsobjekte: Einstellbarer und rotierbarer Einfachspalt, Doppelspalt, Gitter, Kreuzgitter, Spalt mit gaussförmigem Transmissionsprofil
- Verschiedene sphärische Linsen
- Strahlteiler
- Graufilter
- Spiegel
- Symmetrisch öffnender Analysierspalt
- Modenblende
- CMOS-Kamera zur Aufnahme von Beugungsbildern und „Objektbildern“

II Literatur

- Hecht, „Optics“, Addison-Wesley Publishing Company
- Klein-Furtak, „Optik“, Springer Verlag
- Demtröder, „Experimentalphysik 2“, Springer Verlag
- Homepage des Praktikums <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Software.php>

III Motivation

Der vorliegende Versuch soll zu einem vertieften Verständnis der Theorie der optischen Abbildung beitragen. Es wird dabei die Rolle der Beugung am Objekt, also des abzubildenden Gegenstandes, beim Zustandekommen des Objektbildes untersucht. Das Beugungsbild des Objektes entsteht zum ersten Mal in der Brennebene einer Linse, die hinter dem Objekt aufgestellt ist. Es heißt – aus Gründen, die im Lauf der Lektüre verständlich werden sollen – auch „Fourierbild“. Die Brennebene, in der es entsteht, nennt man „Fourierebene“. Ernst Abbe, der Jenaer Physiker, der sich 1873 mit den Fragen der prinzipiellen Auflösung eines Mikroskopes befasste, nannte das Beugungsbild das „primäre Bild“ und das übliche Bild des Objektes das „sekundäre Bild“. In der Betrachtungsweise der Fourieroptik ist ein Bild, das von einer Linse entworfen wird, die Summe – das Integral – aller am Objekt gebeugten Teillichtbündel. Die Linse erfüllt dabei nur die Funktion, diese Teilbündel im Endlichen – der Bildebene – zusammenzuführen. Um zu untersuchen, welchen Beitrag die verschiedenen Beugungsordnungen zum entstehenden Bild liefern – also dessen Helligkeitsverteilung – erlaubt es der Aufbau, u.a. gezielt in der Fourierebene einzelne Beugungsordnungen auszublenden bzw. zuzulassen und am Bild zu verfolgen, wie sich dabei dessen Struktur ändert.

An dem formal besonders einfach zu behandelnden aber auch als Modell besonders wichtigen Objekt „Spalt“ wird zunächst die Intensitätsverteilung über die Spaltbreite bei Zulassung einer zunehmenden Zahl von Beugungsordnungen zum Spaltbild mit einer empfindlichen CMOS Kamera gemessen. Die jeweils beobachtbaren charakteristischen Bildstrukturen können mit den Ergebnissen einer theoretischen Analyse verglichen werden. Diese theoretische Analyse wird mit

Hilfe von Python durchgeführt, wobei mit wenigen Programmzeilen Fourierintegrale bestimmt und damit errechnete Spaltbilder geplottet werden können. An dem Doppelspalt werden analoge Untersuchungen durchgeführt. Darüberhinaus wird an diesem Modellobjekt das Problem der Auflösung der Doppelstruktur experimentell sowie durch Simulationsrechnungen mit Python untersucht.

IV Vorbereitung

Machen Sie sich vertraut mit den Themen der geometrischen Optik, der optischen Abbildung (Linsenformel, Abbildungsmaßstab), der Fraunhoferbeugung und den mathematischen Regeln der Fouriertransformation.

V Aufgaben

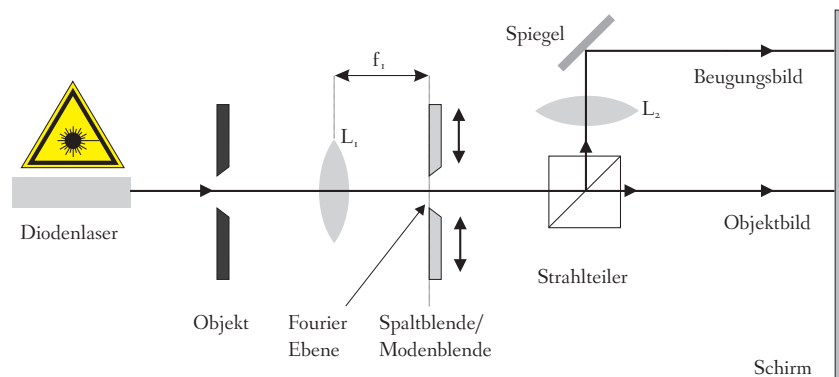


Abbildung 2: Schematische Darstellung des optischen Aufbaus

Ein einfacher optischer Aufbau mit wenigen Linsen, einem Strahlteiler sowie einem kleinen Diodenlaser als spektral schmale, intensive Parallellichtquelle ermöglicht es, simultan sowohl das Beugungsbild des Objektes (hier Spalte, Gitter, Kreuzgitter etc.) als auch das übliche Bild des Objektes selbst darzustellen. Durch Eingriffe in der „Fourierebene“ – das ist die Ebene, in der die Beugungsstruktur erstmals auftritt – werden gezielt die Beiträge der einzelnen Beugungsordnungen zum Objektbild sichtbar gemacht und können quantitativ verfolgt werden.

Folgende Aufgaben sollen bearbeitet werden:

1. Justieren des optischen Aufbaus.
2. Registrierung und Ausmessung der Beugungsfigur eines Einfachspaltes mit einer CMOS-Kamera.
3. Registrierung und Ausmessung des Spaltbildes mit der CMOS-Kamera bei gezielten Manipulationen (Ausblenden/Zulassen verschiedener Beugungsmaxima) in der „Fourier-Ebene“ (Fouriersynthese).
4. Zu Aufgabe 2 und 3 analoge Untersuchungen an einem Doppelspalt. Aufsuchen von Beugungsfigur und Objektbild, zunächst mit dem Auge, dann mit der Kamera. Messungen zur Grenze der Auflösung der Doppelstruktur.
5. Quantitativer Vergleich der bei 2.) bis 4.) gemessenen Strukturen mit den theoretisch zu erwartenden Intensitätsprofilen. Simulation des Grenzfalles „Verschwinden der Doppelstruktur“ beim Doppelspalt mit Hilfe von Python und Vergleich mit dem Experiment.
6. Qualitative Beobachtung verschiedener Beugungsobjekte bei Manipulationen in der Fourierebene (Liniengitter, Kreuzgitter, beugungsfreier Spalt).

VI Grundlagen

VI.1 Die „klassische“ Theorie der Beugung

Prinzipiell gibt es zwei Versuchsanordnungen, mit denen sich Beugungserscheinungen untersuchen lassen. Bei der Fresnelschen Beugung (Abbildung 3a), die den allgemeinen Fall der Beugung beschreibt, befinden sich die Lichtquelle und die Beobachtungsebene in einem endlichen Abstand zum beugenden Objekt. Diese Anordnung führt dazu, dass die im Punkt A interferierenden Lichtbündel unter verschiedenen Winkeln gebeugt werden. Die mathematische Behandlung dieser Beugungserscheinung ist daher äußerst kompliziert. Einfacher gestaltet sich der Fall, wenn nur parallele Lichtbündel vorhanden sind. Bei dieser sogenannten Fraunhoferschen Beugung (Abbildung 3b) befindet sich die Lichtquelle im Unendlichen, so dass das beugende Objekt von parallelem Licht beleuchtet wird. Da alle Lichtbündel parallel sind, interferieren diese im Unendlichen. Will man die Intensitätsverteilung in einem endlichen Abstand beobachten, so ist dies mit einer Sammellinse hinter dem beugenden Objekt möglich. Die Beugungsstrukturen lassen sich dann in der Brennebene der Linse beobachten (Denken

Sie an die elementaren Linsengesetze: Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen). Die Größe der Beugungsstruktur hängt von der Brennweite der verwendeten Linse ab.

Wir wollen hier nur auf die Fraunhofersche Beugung eingehen und als Beispiel die Beugung an einem Spalt untersuchen.

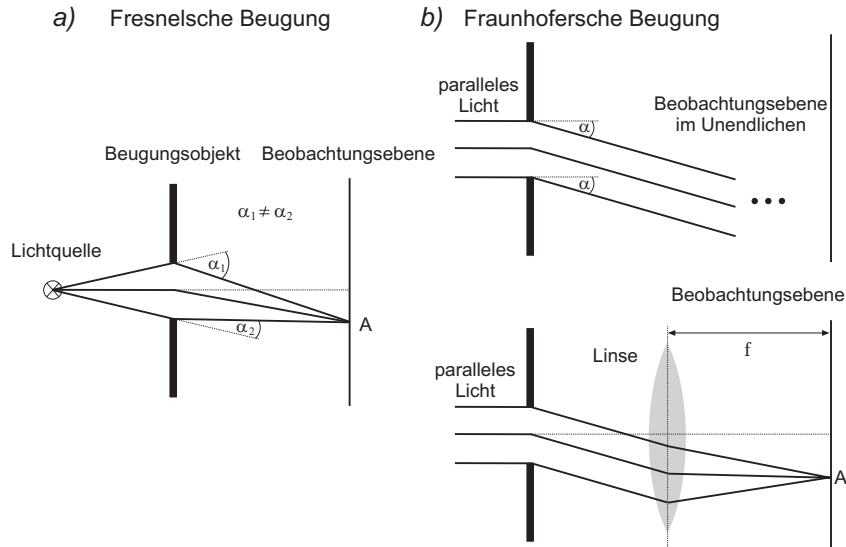


Abbildung 3: a) Fresnelsche Beugung. b) Fraunhofersche Beugung. Die Beobachtungsebene lässt sich mit Hilfe einer Linse aus dem Unendlichen auf einen endlichen Abstand verlegen.

Ein Spalt (Abbildung 4) wird von einem parallelen und monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge λ beleuchtet. Wir können infolgedessen sagen, dass alle Punkte des Spaltes mit gleicher Amplitude E_0 und Phase $\varphi = \omega t$ erregt werden:

$$E(\text{Spalt}) = E(y) = E_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

Die Breite des Spaltes d werde in y -Richtung gemessen, der Nullpunkt liege in der Mitte des Spaltes. Zudem soll die Länge sehr groß gegenüber der Breite sein, so dass das einfallende Lichtbündel nur in einer Dimension begrenzt wird.

Gemäß dem Huygens- Fermat'schen Prinzip geht von jedem Punkt des Spaltes eine Elementarwelle aus, deren Überlagerung zu einer bestimmten Inten-

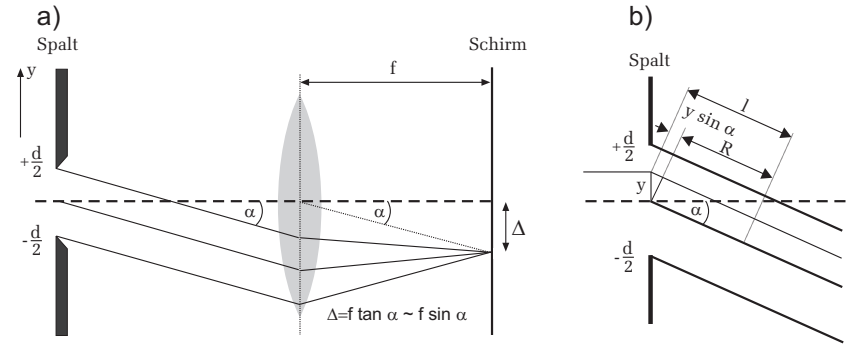


Abbildung 4: a) Fraunhofersche Beugung am Spalt. Das in Richtung α gebeugte Parallellichtbündel wird auf einen Punkt in der Brennebene der Linse, im Abstand Δ von der optischen Achse abgebildet. b) Detailansicht zur Ermittlung des Gangunterschiedes eines von y ausgehenden Lichtbündels.

sitätsverteilung im Unendlichen, bzw. in der Brennebene einer Linse, führt. Wir müssen dazu alle Teilbündel untersuchen, die parallel zueinander in einer bestimmten Richtung α laufen. Mathematisch bedeutet dies die Aufintegration ebener Wellen aus den Quellpunkten des Spaltes:

$$E_{\infty}(\alpha) = \int_{-d/2}^{+d/2} E_0 e^{i(\omega t - kl)} dy. \quad (2)$$

Hierbei ist $k = 2\pi/\lambda$ der Betrag des Wellenvektors. Aus Abbildung 4b ist zu erkennen, dass ein bei y ausgehendes Lichtbündel gegenüber einem vom Mittelpunkt des Spaltes ausgehenden Lichtbündel einen Gangunterschied von $y \sin \alpha$ aufweist. Für die Weglänge l gilt dann:

$$l = R + y \sin \alpha. \quad (3)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung (2) und Ausführen des Integrals ergibt:

$$E_{\infty}(\alpha) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{-ik \sin \alpha d/2} - e^{ik \sin \alpha d/2}}{-ik \sin \alpha} \quad (4)$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin(\pi d \sin \alpha / \lambda)}{\pi \sin \alpha / \lambda}, \quad (5)$$

wobei wir die Beziehung

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta$$

benutzt haben. Setzen wir zur Abkürzung

$$x = \frac{d}{\lambda} \pi \sin \alpha$$

so erhalten wir

$$E_{\infty}(x) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin x}{x} d.$$

Zur Bestimmung der Intensität muss Gleichung (8) noch quadriert werden:

$$I_{\infty}(x) \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} d^2 \propto I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad (9)$$

wobei $I_0 \propto d^2$ ist.

Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 dargestellt.

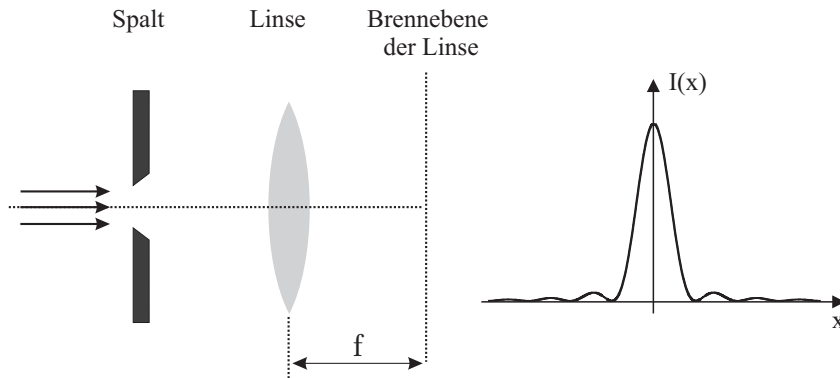


Abbildung 5: Intensitätsverteilung $I(x) = I_0 \sin^2(x)/x^2$ der Beugungsstruktur eines Spalts in der Brennebene der Linse (Fourier- Ebene).

VI.2 Fourierreihen und Fourierintegrale

Aus der linearen Algebra ist Ihnen bekannt, dass ein Vektor durch eine Linearkombination von Basisvektoren dargestellt werden kann. Ähnliches ist Ihnen sicherlich auch schon in der Analysis begegnet. Auch hier gibt es Basissysteme,

(6) in denen sich Funktionen durch Linearkombination von „Basisfunktionen“ darstellen lassen. Am bekanntesten ist wohl die Taylorreihe. Dabei handelt es sich um eine Potenzreihe, die eine Funktion $f(x)$ um einen bestimmten x -Wert approximiert. Die Basisfunktionen sind in diesem Fall die Potenzfunktionen x^n .

(7) Ein weiteres Basissystem stellen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus dar. Nach dem Fourier-Theorem lassen sich **periodische Funktionen** durch eine Linearkombination dieser trigonometrischen Basisfunktionen in einer Fourierreihe entwickeln. Man bezeichnet dies als Fourierzerlegung, Fourieranalyse oder auch als harmonische Analyse.

Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode L , d.h. $f(x+L) = f(x)$. Für die Fourierdarstellung dieser Funktion gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \quad (10)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx \quad (11)$$

und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx. \quad (12)$$

Wir wollen hier nicht auf die Herleitung dieser Gleichungen eingehen, sondern deren Aussagen an einem konkreten Beispiel diskutieren. Betrachten wir dazu eine Rechteckfunktion mit der Periode L , wie sie in Abbildung 6 a) dargestellt ist. Die Funktion $f(x)$ ist definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -l/2 < x < l/2 \\ 0, & l/2 > |x| > L/2. \end{cases} \quad (13)$$

Um diese Funktion in einer Fourierreihe gemäß Gleichung (10) darzustellen, müssen wir die Fourierkoeffizienten berechnen. Da die Rechteckfunktion gerade ist, d.h. $f(x) = f(-x)$, verschwinden, wie Sie leicht nachrechnen können, alle Koeffizienten b_n . Wir müssen daher nur die Koeffizienten a_n bestimmen. Für a_0 berechnen wir:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{2l}{L}. \quad (14)$$

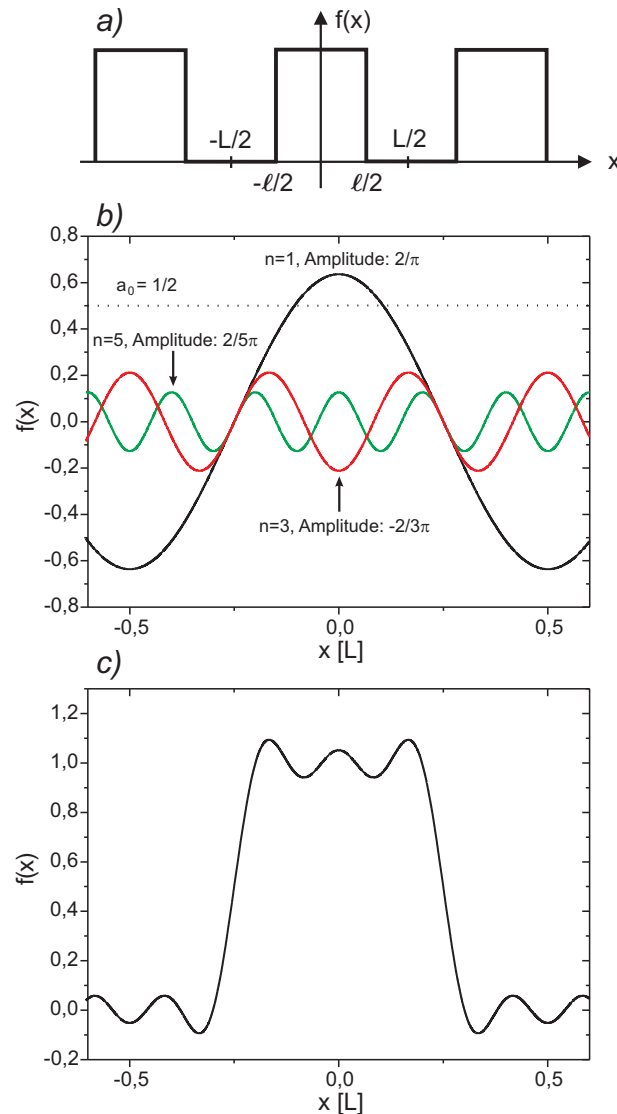


Abbildung 6: a): Rechteckfunktion mit der Periode L . b): Gleichanteil $a_0/2$, sowie die ersten drei Fourierterme. c): Summe aus Gleichanteil und den ersten drei Gliedern.

Für die restlichen Koeffizienten a_n gilt:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\pi n \frac{l}{L}\right) \quad (15)$$

Betrachten wir als konkretes Beispiel eine Rechteckfunktion mit einem Tastverhältnis von $L : l = 2 : 1$ (Abbildung 6 a). Aus Gleichung (10) und den oben berechneten Koeffizienten folgt dann für die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi}{L} x\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{10\pi}{L} x\right) - \dots \quad (16)$$

In Abbildung 6 b) sind die ersten drei Glieder der Fourierreihe sowie der Gleichanteil $a_0/2$ grafisch dargestellt, darunter im Teilbild 6 c) die Summe dieser Terme. Zusätzlich zeigt Abbildung 7 noch die Fourierreihen bis hin zu $n = 27$. Je mehr Summanden (Ordnungen) in der Fourierreihe „mitgenommen“ werden, desto genauer nähert sich die Reihe der Rechteckfunktion an.

Die Fourieranalyse ist von außerordentlicher Bedeutung in vielen Bereichen der Physik. Ein anschauliches Beispiel findet sich für Funktionen, die ein zeitperiodisches Signal beschreiben, z.B. einen akustischen Ton oder ein elektrisches Signal. Ersetzen wir in Gleichung (10) die Variable x durch die Zeit t und wählen für die Periode L , die Periodendauer T , wobei gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (17)$$

so ergibt sich für die Fourierreihe einer periodischen, zeitabhängigen Funktion:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (18)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen **Frequenzen** und **Amplituden** dar. Die Fourieranalyse gibt somit Auskunft über das Frequenzspektrum, aus dem sich ein zeitperiodisches Signal zusammensetzt. In Abbildung 8 ist das Spektrum eines zeitperiodischen Rechtecksignals dargestellt. Entlang der Abszisse ist die Frequenz aufgetragen. Die jeweiligen Amplituden entsprechen den Koeffizienten a_n .

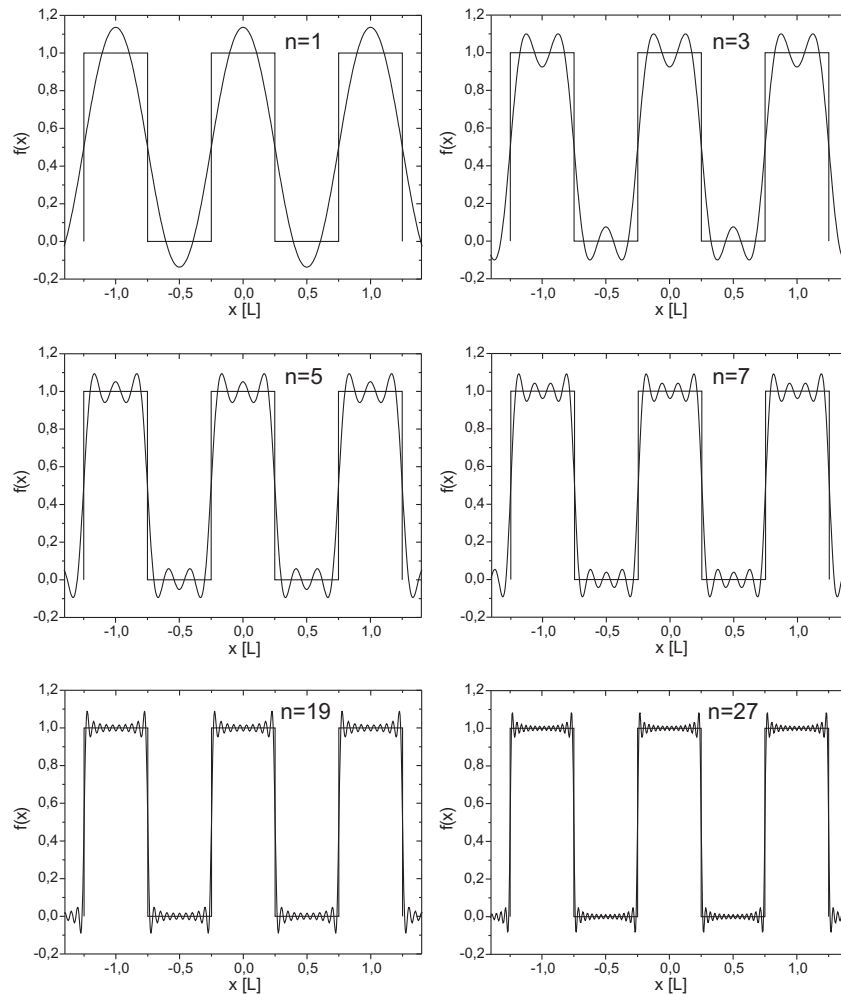


Abbildung 7: Fourierentwicklung eines Rechtecksignals

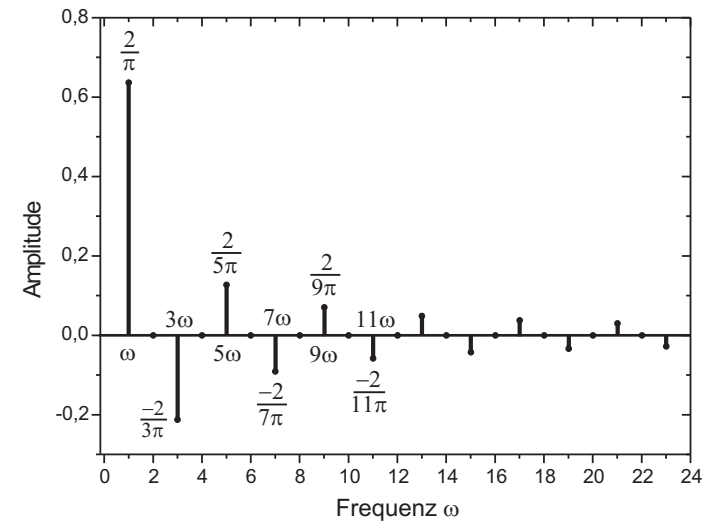


Abbildung 8: Frequenzspektrum eines Rechtecksignals. Bei den ersten sechs Moden sind die Frequenzen und Amplituden mit angegeben.

Das Spektrum eines periodischen Signals ist stets diskret. Neben der Grundfrequenz ω (Grundton) treten auch Vielfache $n\omega$ auf, die als Obertöne oder n -te Harmonische bezeichnet werden.

In einer Fourierreihe lassen sich **nur** periodische Funktionen entwickeln. Aber auch nichtperiodische Funktionen lassen sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen darstellen. Eine nichtperiodische Funktion erhält man aus einer periodischen Funktion für den Grenzfalle, dass die Periode gegen unendlich geht. In Abbildung 9 ist dies für einen Rechteckpuls, der sich aus einer periodischen Rechteckfunktion ableiten lässt, dargestellt. Bild a) zeigt das Spektrum bei einem Tastverhältnis von $L : l = 2 : 1$. Vergrößert man die Periode L bei gleich bleibender Pulsbreite l , so treten im Spektrum zusätzliche Moden auf. Die Teilbilder b) und c) zeigen dies für ein Tastverhältnis von $4 : 1$ bzw. $8 : 1$.

Für den Grenzfalle $L \rightarrow \infty$ geht die Anzahl der Moden gegen unendlich und sind unendlich dicht gepackt (Abbildung 9 d). Es ist einleuchtend, dass in diesem Fall die Fourierreihe in ein Integral übergeht und die Fourierkoeffizienten nicht mehr diskret sind, sondern durch eine kontinuierliche Funktion beschrieben wer-

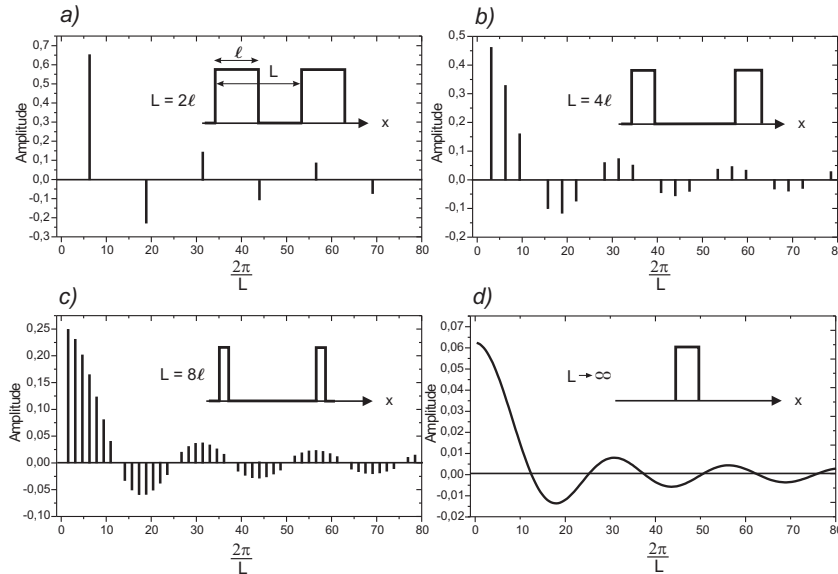


Abbildung 9: Veranschaulichung des Übergangs zur Fouriertransformation einer nichtperiodischen Funktion.

den. Dies führt zur sogenannten Fouriertransformation eines nichtperiodischen Signals.

Die kontinuierliche Fouriertransformation¹ ist definiert durch:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (19)$$

Wegen

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx) \quad (20)$$

stellt auch die Fouriertransformation die Entwicklung einer Funktion nach trigonometrischen Funktionen dar. $F(k)$ heißt **Fouriertransformierte** der Funktion $f(x)$.

¹In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen der Fouriertransformation, die sich durch einen Normierungsfaktor unterscheiden.

Für die Rücktransformation gilt:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (21)$$

Handelt es sich bei $f(t)$ um eine Funktion, die von der Zeit abhängt, so stellt die Fouriertransformierte $F(\omega)$ (wir schreiben nun ω anstatt k) das kontinuierliche Frequenzspektrum dieser Funktion dar. Für den Fall, dass x eine Ortsvariable ist, schreiben wir für die Fouriertransformierte $F(k)$ und bezeichnen k als Raumfrequenz (Ortsfrequenz). Wir werden im nächsten Abschnitt ausführlich darauf eingehen.

VI.3 Herleitung der Fourierdarstellung der Fraunhoferschen Beugung

Wir wollen im Folgenden das Thema der Fraunhoferschen Beugung in etwas allgemeinerer Gestalt formulieren, um den Übergang zu der hier interessierenden Beschreibung mit Hilfe der Fouriertheorie vorzubereiten.

Wir betrachten nach Abbildung 10 eine Öffnung S von willkürlicher Gestalt in der yz -Ebene, die mit monochromatischem Licht bestrahlt werde und wollen die elektrische Feldstärke im Aufpunkt P bestimmen.

Dazu greifen wir ein differentielles Flächenelement $dS(x=0, y, z)$ heraus und betrachten eine davon ausgehende Kugelwelle (Elementarwelle) e^{ikr}/r . Mit ϵ als Quellstärke pro Einheitsfläche, die zunächst als konstant über der Fläche S angenommen wird, ist die elektrische Feldstärke am Ort P durch

$$dE = \epsilon \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (22)$$

gegeben.

Für den Abstand von dS zu $P(X,Y,Z)$ erhalten wir

$$r = \sqrt{[X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]}. \quad (23)$$

Wenn die beugende Öffnung klein gegenüber dem Abstand OP ist, so kann man im Amplitudenterm ϵ_A/r statt r den Abstand $OP=R$ verwenden. Diese Näherung für r darf im Phasenterm hingegen nicht ohne weiteres angewendet

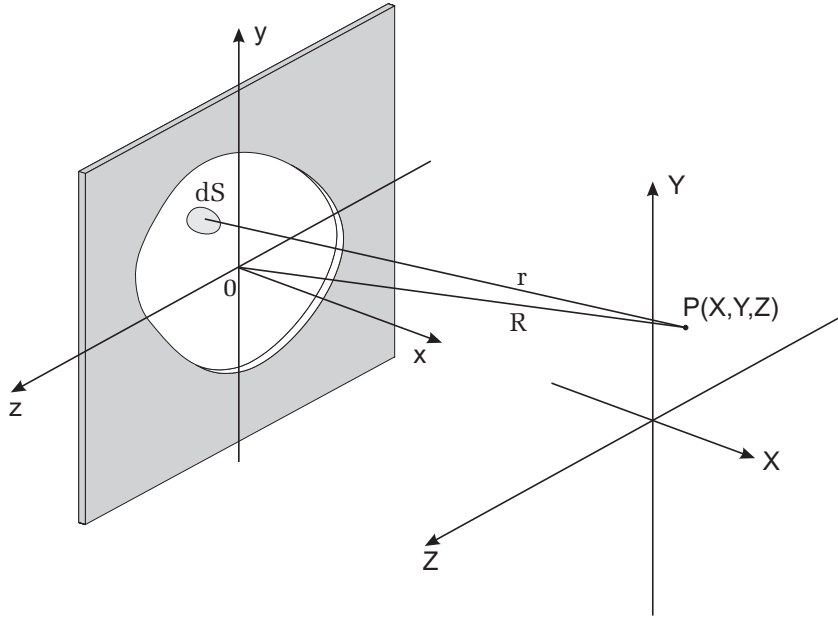


Abbildung 10: Zur Geometrie bei der Beugung an einer beliebigen Öffnung.

werden, da $kr = (2\pi/\lambda)r$ eine große Zahl darstellt. (Sie entspricht dem Abstand OP in Wellenlängen ausgedrückt). Mit Hilfe von

$$R = \sqrt{[X^2 + Y^2 + Z^2]} \quad (24)$$

erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (23) und einigen Umformungen:

$$r = R\sqrt{[1 + (y^2 + z^2)/R^2 - 2(Yy + Zz)/R^2]}. \quad (25)$$

Im Fernfeld ist R groß gegenüber den Dimensionen der Öffnung, so dass der Term

$$(y^2 + z^2)/R^2 \ll 1 \quad (26)$$

vernachlässigbar wird. Es verbleibt:

$$r = R\sqrt{[1 - 2(Yy + Zz)/R^2]}. \quad (27)$$

Auch der Ausdruck in der eckigen Klammer kann mit Hilfe der Relation

$$\sqrt{1 - \xi} = 1 - \xi/2. \quad (28)$$

für $\xi \ll 1$ vereinfacht werden:

$$r = R[1 - (Yy + Zz)/R^2]. \quad (29)$$

Setzen wir nun diese Näherung für r in den Phasenterm in Gleichung (22) ein und integrieren über die gesamte Öffnung S , so erhalten wir für die elektrische Feldstärke am Ort P :

$$E(R) = \epsilon \frac{e^{ikR}}{R} \iint_S e^{-\frac{ik}{R}(Yy + Zz)} dy dz. \quad (30)$$

Beschränken wir nun unsere Betrachtung auf einen kleinen Bereich um R . Wir können dann davon ausgehen, dass der Term e^{ikR}/R vor dem Integral eine Konstante darstellt. Auch ϵ wurde bisher als konstant angesehen. Das entspricht aber nicht dem allgemeinen Fall! Denken Sie an eine Öffnung, die z.B. von einem etwas schmutzigen und zusätzlich nicht sehr gleichmäßig dickem Glas überdeckt wird. Die daraus resultierende „Inhomogenität der Transmission“ führt dazu, dass das elektrische Feld sowohl vom Betrag als auch von der Phase vom Ort (y, z) abhängen wird. Wir berücksichtigen dies, in dem wir eine explizite Orts- und Phasenabhängigkeit der Quellstärke ϵ einführen:

$$\epsilon(y, z) = A(y, z) = A_0(y, z)e^{i\varphi(y, z)}. \quad (31)$$

$A(y, z)$ wird in der Literatur auch als Öffnungsfunktion (engl. aperture function) bezeichnet. $A(y, z)dydz$ ist dann proportional zu dem Feld der vom Flächenelement $dydz$ ausgehenden Welle. Entsprechend können wir dann das elektrische Feld im Aufpunkt (X, Y, Z) als Integral über die gesamte emittierende Öffnung S darstellen als

$$E(Y, Z) = \iint_S A(y, z)e^{-\frac{ik}{R}(Yy + Zz)} dy dz. \quad (32)$$

wobei der Vorfaktor e^{ikR}/R wie oben erwähnt als Konstante und damit unwesentlich für das Folgende weggelassen wird.

Das Differential

$$dE(Y, Z) = A(y, z)e^{-\frac{ik}{R}(Yy + Zz)} dy dz \quad (33)$$

stellt den Beitrag der vom Flächenelement $dydz$ ausgehenden ebenen Welle zum elektrischen Feld am Ort P dar, die sich in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ ausbreitet. Wir definieren die *Raumfrequenzen* (Abbildung 11):

$$k_y = k \frac{Y}{R} = k \sin \phi \quad (34)$$

$$k_z = k \frac{Z}{R} = k \sin \theta. \quad (35)$$

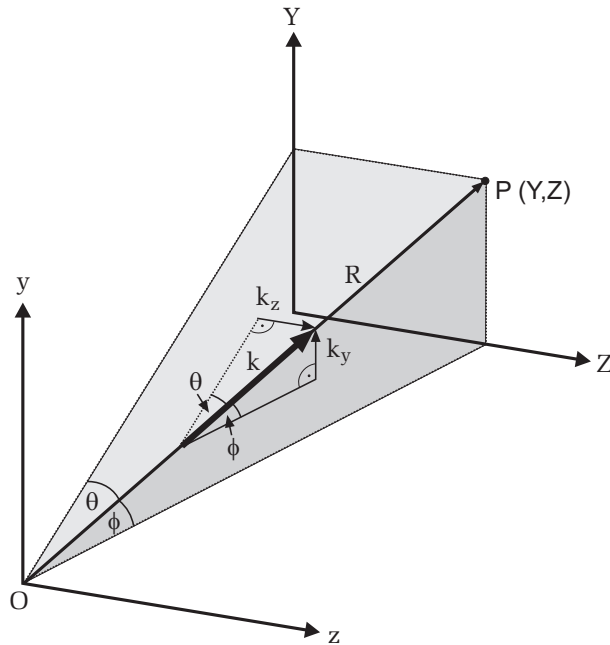


Abbildung 11: Erläuterung zur Definition der Raumfrequenzen k_y, k_z .

Es ist für das Verständnis nützlich, anzumerken, dass im Photonenbild die hier eingeführten „Raumfrequenzen“ bis auf den Faktor $\hbar$ den durch die Beugung erzeugten Transversalimpulsen

$$p_y = \hbar k_y \quad (36)$$

$$p_z = \hbar k_z \quad (37)$$

der Photonen entsprechen! Besitzen die Photonen ursprünglich nur einen Impuls in x -Richtung, so erhalten Sie bei Durchgang durch die Öffnung eine zusätzliche transversale Komponente in y - und z -Richtung!

Jedem Punkt (Y, Z) in der Bildebene wird also eine Raumfrequenz zugeordnet. Gleichung (32) lässt sich dann umschreiben gemäß

$$E(k_y, k_z) = \iint_S A(y, z) e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz. \quad (38)$$

Dieser Ausdruck stellt nichts anderes dar, als die zweidimensionale Fouriertransformation (vergleiche Gleichung (21)) der Öffnungsfunktion $A(y, z)$. Damit lässt sich das wichtige Ergebnis dieser Analyse wie folgt formulieren:

Die Feldverteilung der Beugungsstruktur bei der Fraunhofer-Beugung an einer Öffnung ist die Fouriertransformierte der Feldverteilung über die beugende Öffnung.

Zur Vertiefung dieser Aussage werden wir in den nächsten Kapiteln zwei Spezialfälle, nämlich die Beugung am Spalt und am Doppelspalt, detailliert untersuchen.

VI.4 Das Beugungsbild des Spaltes als Fouriertransformierte der Spaltöffnung

Wir wollen im Folgenden diese Betrachtungsweise anwenden, um die Beugung am Spalt nunmehr im Rahmen der Fouriertheorie zu behandeln.

Ein Spalt wird durch folgende Spaltfunktion (aperture function, hier eindimensional: $A(y, z) \rightarrow f(y)$, $E(k_y, k_z \rightarrow F(k_y))$) beschrieben (Abbildung 12):

$$f(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq d/2 \\ 0, & |y| > d/2. \end{cases} \quad (39)$$

Die Fouriertransformierte (wir schreiben nun F statt E , um den Aspekt zu betonen, dass das elektrische Feld der Beugungsfigur nun einfach als Fourier-

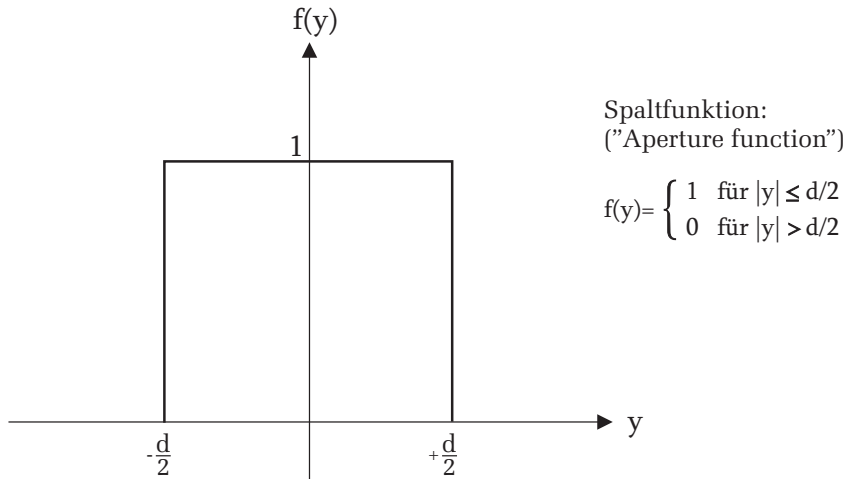


Abbildung 12: Spaltfunktion eines einfachen Spalts

transformierte berechnet werden kann) ergibt sich zu:

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (40)$$

Einsetzen obiger Spaltfunktion ergibt:

$$F(k_y) = \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{ik_y} \left(e^{ik_y d/2} - e^{-ik_y d/2} \right). \quad (41)$$

Unter Berücksichtigung der Eulerschen Formel

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta, \quad (42)$$

erhalten wir

$$F(k_y) = d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \equiv \text{sinc}(k_y d/2) d \quad (43)$$

mit den Nullstellen

$$k_y = 2\pi n/d.$$

Gemäß dem Fouriertheorem erhält man mit dieser Funktion rückwärts wieder die Spaltfunktion durch Bildung des Integrals (Fouriersynthese):

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_y) e^{ik_y y} dk_y. \quad (45)$$

Einsetzen des von oben berechneten $F(k_y)$ und Verwendung der Symmetrie der Funktion bezüglich des Vorzeichens ($F(k_y) = F(-k_y)$) führt zu

$$f(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{+\infty} [\sin(k_y d/2)/(k_y d/2)] \cos(k_y y) dk_y. \quad (46)$$

Dieses Integral ist analytisch nicht lösbar, so dass eine numerische Integration notwendig wird. Mit der oberen Grenze $+\infty$ führt dies Integral wieder zurück zur Spaltfunktion, d.h. zu dem unverfälschten rechteckigen Spaltbild.

Es stellt sich die Frage, wie anhand der Formel $F(k_y)$ für die Fouriertransformierte der Spaltfunktion die gesuchte Beugungsstruktur, also Intensität in Richtung α , abgelesen werden kann. Dazu muss man sich lediglich vergegenwärtigen, dass ja über $k_y = k_0 \sin \alpha$ unmittelbar die gewünschte Winkelabhängigkeit der Beugungsstruktur sichtbar wird.

Will man nun untersuchen, wie die- nun rudimentäre- Spaltfunktion aussieht, wenn man gezielt nur eine kleinere Zahl von gebeugten Teilstrahlen durch Ausblenden in der Fourierebene zur Abbildung zulässt (unser Experiment), so ist als obere Integrationsgrenze nun offenbar der k_y -Wert zu wählen, der gerade noch zur Abbildung zugelassen wird (Abbildung 13).

Die obere Integrationsgrenze sei die n -te Nullstelle von $F(k_y)$:

$$k_{y,n} = k_0 \sin \alpha_n = k_0 n \lambda / d = 2n\pi/d \quad (47)$$

Für das Fourierintegral folgt damit dann:

$$f_{\text{modifiziert}}(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} [\sin(k_y d/2)/(k_y d/2)] \cos(k_y y) dk_y \quad (48)$$

Damit kann obiges Integral für unterschiedliche k_y -Werte an z.B. jeweils 200 Stellen von y zwischen $y_i = -d$ bis $+d$, also 100 Punkte pro Spaltbreite, berech-

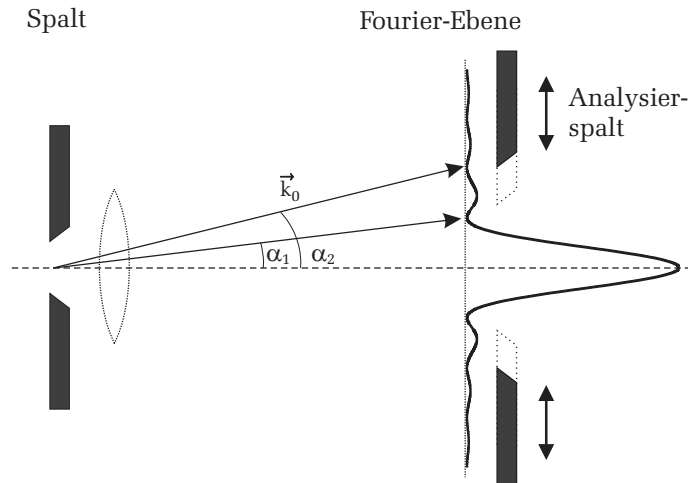


Abbildung 13: Manipulation der Beugungsstruktur durch Ausblenden von Beugungsordnungen mit Hilfe eines Analysierspaltes.

net werden. Um die Berechnungen mit den beobachteten Spaltbildern vergleichen zu können, müssen die Ergebnisse noch quadriert werden². Das Ergebnis können Sie ausdrucken und den beobachteten Strukturen gegenüberstellen. Die nachfolgende Bilderserie (Abbildung 14) zeigt Ihnen, was Sie erwarten sollten, wenn Sie, jeweils von links nach rechts gezählt, nur das zentrale Hauptmaximum bzw. die Beugungsordnungen bis zum 1./2./6./10./14. Nebenmaximum zur Abbildung des Spaltes verwenden.

VI.5 Die Fouriertransformierte des Doppelspaltes

Mit den oben gewonnenen Ergebnissen zur Fouriertransformation des Einfachspaltes bzw. zur Rücktransformation (Fouriersynthese) gelangt man in einfacher Weise zu den entsprechenden Ausdrücken für den Doppelspalt.

Die Öffnungsfunktion $f(y)$ ist in Abbildung 15 dargestellt:

Die zugehörige Fouriertransformierte hat wieder die Gestalt

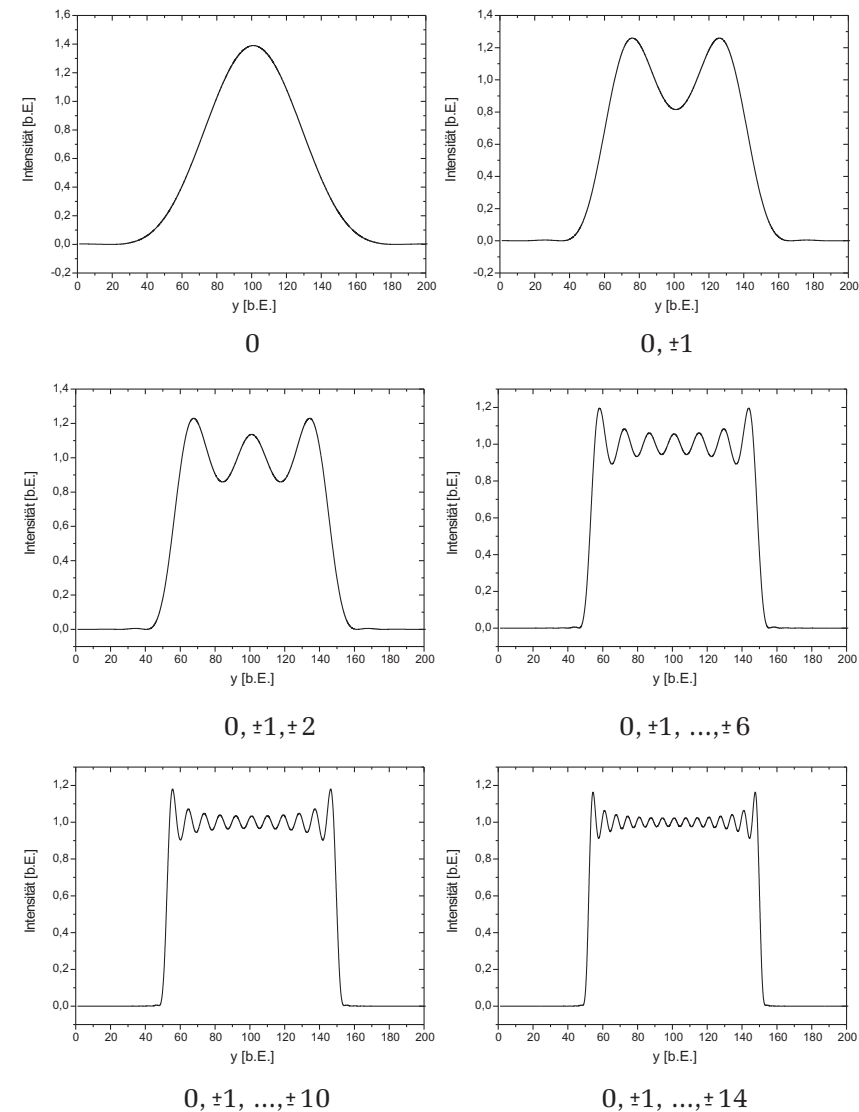


Abbildung 14: Spaltfunktion unter Berücksichtigung unterschiedlicher Beugungsordnungen

²Berechnet wird die Feldstärke. Um die Intensität zu erhalten muss diese quadriert werden.

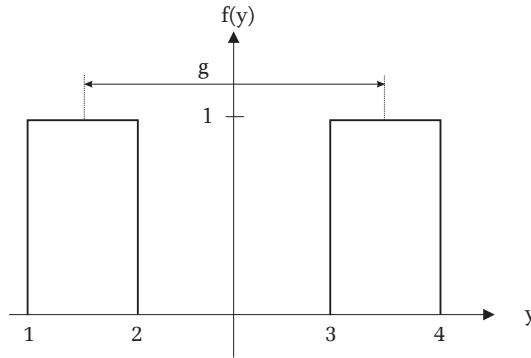


Abbildung 15: Spaltfunktion eines Doppelspaltes. Die Größe g beschreibt den Spaltabstand.

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (49)$$

wobei Beiträge nur von den Integrationswegen $1 \rightarrow 2$ sowie $3 \rightarrow 4$ herrühren können. Berechnen wir obiges Integral zunächst über den nach rechts verschobenen Einzelspalt. Aus der Abbildung erhält man:

$$F(k_y, \text{rechts}) = \int_3^4 f(y) e^{ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_3^4 = e^{-ik_y g/2} d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)}, \quad (50)$$

wobei g den Spaltabstand beschreibt. Entsprechend ergibt sich für den nach links verschobenen Einzelspalt:

$$F(k_y, \text{links}) = \int_1^2 f(y) e^{ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_1^2 = e^{ik_y g/2} d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \quad (51)$$

Damit ergibt sich schließlich für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes:

$$F = F(k_y, \text{rechts}) + F(k_y, \text{links}) = 2 \cos(k_y g/2) d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \quad (52)$$

Wir erkennen in dem rechts stehenden Term dieses Ausdrucks wieder die Fouriertransformierte des Einzelspaltes, der Vorfaktor beschreibt die Interferenz der von beiden Spalten ausgehenden Wellen. Führen wir wieder wie beim Einzelspalt die Substitution $k_y = k_0 \sin \alpha = 2\pi/\lambda \sin \alpha$ durch und quadrieren den Ausdruck, so erhalten wir als **Beugungsfigur des Doppelspaltes** schließlich

$$I = 4 \cos^2(k_y g/2) d^2 \frac{\sin^2(k_y d/2)}{(k_y d/2)^2} = 4 \cos^2(\pi g/\lambda \sin \alpha) d^2 \frac{\sin^2(\pi d/\lambda \sin \alpha)}{(\pi d/\lambda \sin \alpha)^2}. \quad (53)$$

Der Ausdruck entspricht dem Produkt der Gitterfunktion $\cos^2(\pi g/\lambda \sin \alpha)$ und der Spaltfunktion, die wir bereits beim Einzelspalt abgeleitet haben. Abbildung 16 zeigt die hiermit berechnete Beugungsfigur für den von uns verwendeten Doppelspalt zusammen mit der Beugungsstruktur, wie sie nur einer der Spalte ergibt.

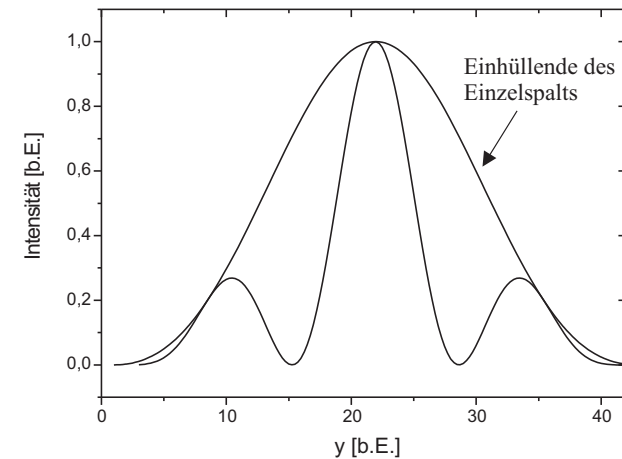


Abbildung 16: Beugungsfigur eines Spaltes und eines Doppelspaltes im Vergleich

Mit dem oben stehenden Ausdruck für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes können wir dann auch leicht wieder angeben, wie das „modifizierte“ Bild $F_{\text{modifiziert}}$ des Doppelspaltes aussieht, wenn man in der Fourierebene mit dem Analyserspalt wieder die Zahl der zur Abbildung zugelassenen Fourierkompo-

nenten gezielt begrenzt:

$$F_{\text{modifiz.}}(y) \propto [f_{\text{modifiz.}}(y)]^2 = \left[2d/\pi \int_0^{k_{y,n}} \cos(k_y g/2) \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \cos(k_y y) dk_y \right]^2. \quad (54)$$

Ausführung dieser Integrale $F_{\text{modifiziert}}(y)$ ergibt (obere Integrationsgrenze $k_{y,n} = 2\pi n/d$) für $n = 1, 2, 3, 6$ die nachfolgend wiedergegebenen Spaltbilder (Abbildung 17). Der Bezug zu den analogen Bildern des Einzelspaltbes ist offensichtlich.

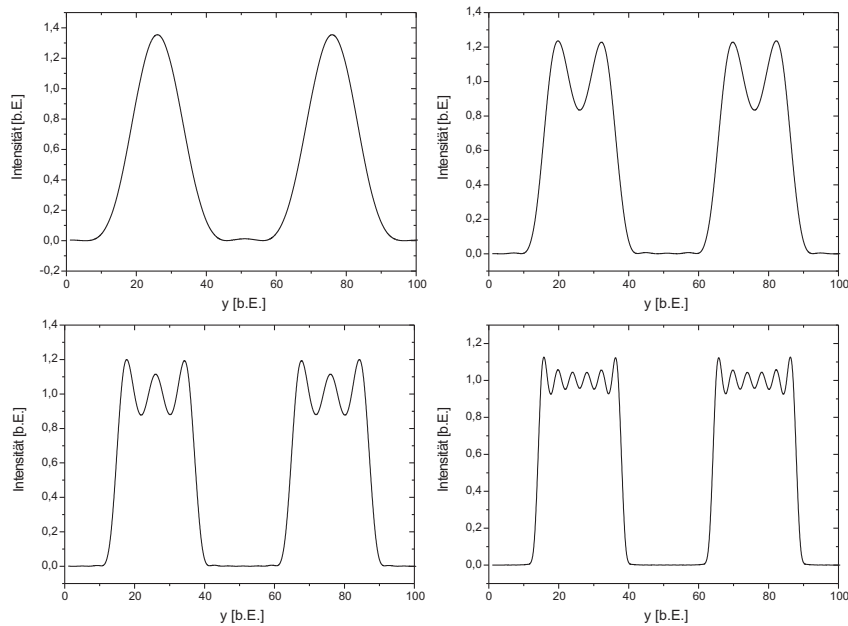


Abbildung 17: Spaltbild eines Doppelspaltbes unter Berücksichtigung unterschiedlicher Beugungsordnungen.

Ein weiterer, auch experimentell von uns untersuchter Aspekt, kann an diesen Formeln untersucht werden, nämlich die Frage nach der Auflösung:

„Welcher Anteil der Fourierkomponenten des Beugungsbildes ist notwendig, um noch die Doppelstruktur unseres Objektes im modifizierten Bild zu sehen?“ Für

das Experiment bedeutet dies: „Bei welcher Spaltweite des Analyserspaltbes verschwindet die Doppelstruktur?“

Für die Auflösung der Doppelstruktur ist nun der Spaltabstand g maßgebend. Das Maximum 1. Ordnung erscheint unter $\sin \alpha = \lambda/g$. Diese Beugungsordnung muss mindestens noch zur Abbildung zugelassen werden, um die Doppelstruktur zu erkennen. Wenn Sie also den zugehörigen Wert $k_0 \sin \alpha = k_0 \lambda/g$ als Obergrenze für die Integration verwenden und kontinuierlich verkleinern, werden Sie zu Bildern kommen, wie sie nachstehend gezeigt sind (Abbildung 18). Der „Dunkelbereich“ zwischen den Einzelspaltbes verbindet sich schließlich nur noch ein flaches Plateau die ursprünglichen Einzelspaltbes verbindet: Die Doppelstruktur ist verschwunden!

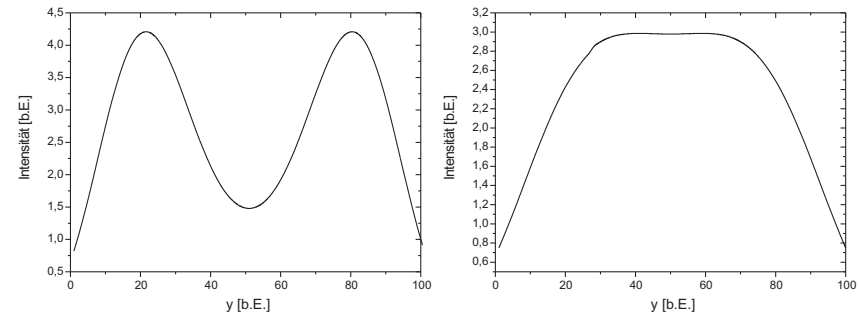


Abbildung 18: Auflösung eines Doppelspaltbes bei Beschneidung des Maximum 1. Ordnung.

VII Bedienung des Versuchsaufbaus

VII.1 Übersicht der Komponenten

Im Folgenden soll kurz auf die einzelnen Geräte des Versuchsaufbaus eingegangen und deren Bedienung erläutert werden.

Lasereinheit

Die Lasereinheit besteht aus einem Diodenlaser (532 nm, 1 mW) und einem einschwenkbaren Graufilter. Wird dieser vor den Laser geschwenkt, wird die Laserleistung um den Faktor 100 reduziert. Das ist notwendig, um die Kamera nicht zu übersteuern.

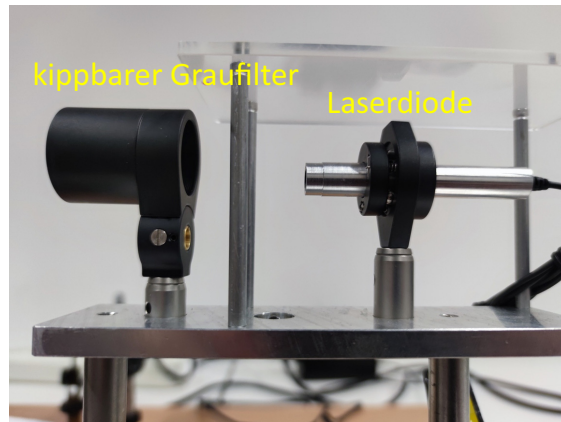


Abbildung 19: Aufbau der Lasereinheit

Objekthalter

Der Objekthalter ist auf einer Schiene montiert. Um diesen entlang der Schiene zu verschieben, ist die Schraube **S** zu lösen und der Objekthalter an der gewünschten Position zu platzieren. Danach zum Fixieren der Position die Schraube **S** festziehen. Den Objekthalter kann mit der Mikrometerschraube **M** senkrecht zur optischen Achse verfahren werden. Das Objekt ist immer so zu positionieren, dass es sich zentrisch im Laserstrahl befindet.

Es stehen verschiedene Objekte zur Verfügung: Doppelspalt und Kreuzgitter.

Variabler und rotierbarer Einzelspalt

Der variable Einzelspalt kann über die die „Mikrometerschraube Spaltbreite“ in seiner Spaltbreite variiert werden. An der Mikrometerschraube können Sie die Spaltbreite ablesen. Die Unterteilung ist in $10\ \mu\text{m}$ je Teilstrich angegeben. Eine komplette Umdrehung entspricht einer Veränderung der Spaltbreite um $0,5\ \text{mm}$. Die Wiederholbarkeit des eingestellten Spaltdurchmesser liegt bei $20\ \mu\text{m}$. Im geschlossenen Zustand kann der Offset der Mikrometerschraube abgelesen werden. Der rotierbar gelagerte Spaltrahmen ermöglicht es zudem, den Spalt komplett zu drehen. Für die spätere Vermessung der Beugungsordnungen muss der Spalt vertikal ausgerichtet werden. Da jede Spaltbreitenänderung auch zu einer kleinen Rotation führt, sollten Sie zuerst die gewünschte Spaltbreite einstellen und dann den Spalt vertikal ausrichten. Mit der „Mikrometerschraube horizontale

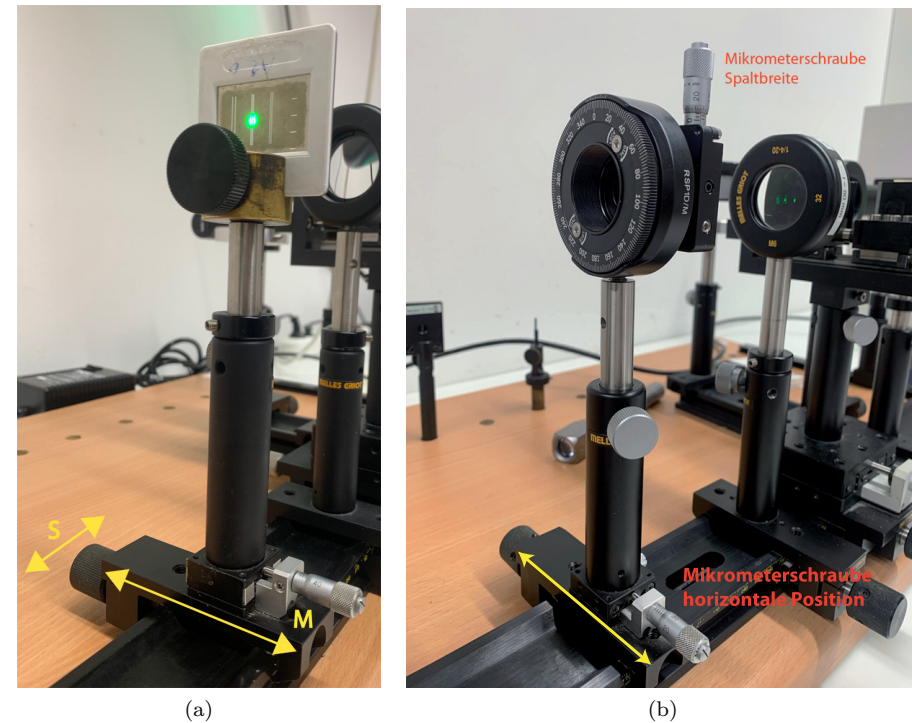


Abbildung 20: Links: Einstellbarer Objekthalter mit Doppelspalt – Rechts: Variabler und rotierbarer Einzelspalt

Position“ kann der Spalt genau in der optischen Achse positioniert werden.

Analysierspalt

Um den Analysierspalt entlang der Schiene zu verschieben, ist ebenfalls die Schraube **S** zu lösen und der Analysierspalt an der gewünschten Position zu positionieren. Danach zum Fixieren die Schraube **S** wieder festziehen. Der Abstand des Analysierspaltes zur Linse L1 muss im Verlauf des Versuchs auf exakt $80\ \text{mm}$ eingestellt werden. Mit dem seitlichen Einstellrad kann die Spaltbreite variiert werden. Die halbe Spaltbreite kann an der Messuhr abgelesen werden. Den Mittelpunkt des Spaltes kann mit der Mikrometerschraube **M** quer zur

optischen Achse verschoben werden. Dieser muss exakt auf die optische Achse justiert werden. Der Analyserspalt darf nicht überdreht werden. Ist der Spalt komplett geschlossen, darf nicht kraftvoll weitergedreht werden, sonst könnten die Flanken des Spaltes verbogen werden.

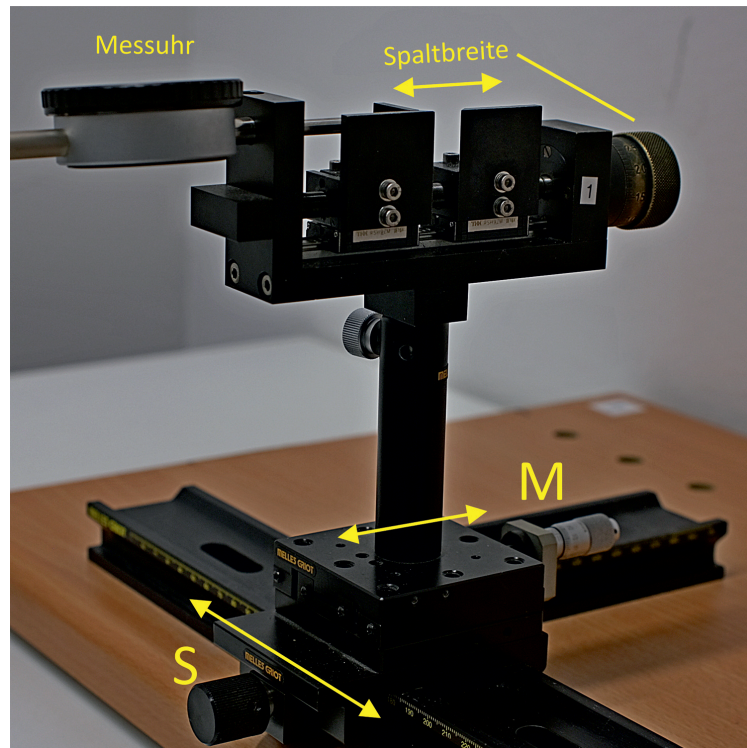


Abbildung 21: Analysespalt

Messuhr

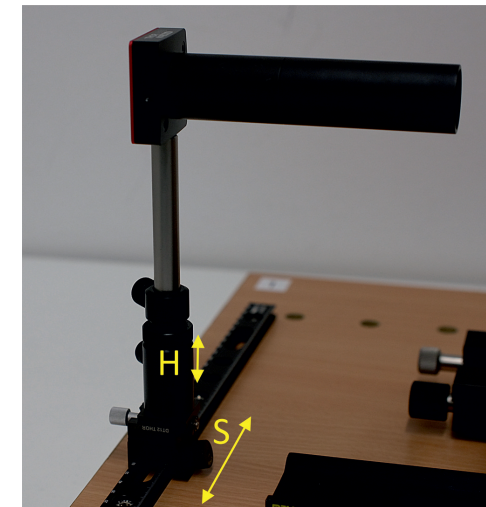
Die Messuhr besitzt zwei Skalen. Lesen Sie zunächst die innere Skala ab. Diese ist in Millimeter geeicht. Im Bild rechts steht der Zeiger etwas vor 5. Der Ablesewert wäre also 4. Die Nachkommastellen entnehmen Sie der äußeren Skala. Im Beispiel rechts steht der Zeiger bei etwa 86,3. Der eingestellte Wert beträgt daher 4,863 mm. Überprüfen Sie zu Beginn ob der Nullpunkt der Messuhr richtig eingestellt ist. Schließen Sie dazu vollständig aber vorsichtig den Analyserspalt. Die Messuhr sollte exakt auf null stehen. Falls nicht, können Sie dies durch verdrehen des Gehäuses (äußerer Ring) einstellen.



Abbildung 22: Messuhr



(a)



(b)

Abbildung 23: Links: Modenblende zum Ausblenden der Nullten Beugungsordnung – Rechts: Kamera

Modenblende

Die Modenblende wird anstelle des Analysespalttes auf dessen Aufnameteller platziert. Durch die Modenblende ist es möglich, die Auswirkung der Ausblendung des zentralen Beugungsmaximum (Nullte Beugungsordnung) auf das Spaltbild zu untersuchen.

Kamera

Die Kamera können Sie entlang einer Schiene verschieben und somit auf das Beugungsbild oder das Objektbild ausrichten. Lösen Sie dazu die Schraube **S** und platzieren Sie die Kamera an der gewünschten Position. Danach die Kamera durch Anziehen der Schraube **S** fixieren. Mit der Rändelschraube **H** können Sie die Kamera in der Höhe einstellen. Der Sensor ist 4,968 mm x 3,726 mm groß und besteht aus 1440 x 1080 Pixeln. Jedes Pixel misst 3,45 μm x 3,45 μm .

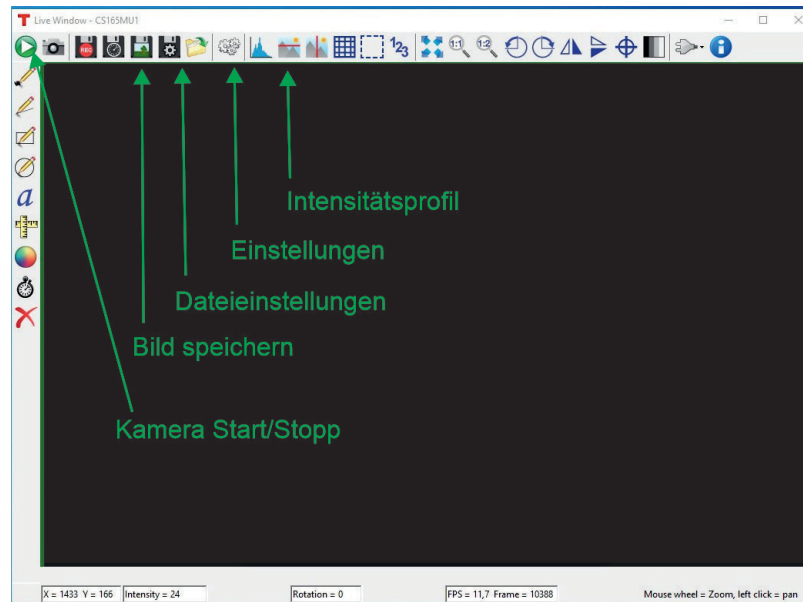


Abbildung 24: Thorcam Software

VII.2 Thorcam

Das Programm Thorcam dient zur Anzeige und Aufnahme der Kamerabilder. Beim Start des Programms muss eine Kamera aus einer Liste ausgewählt werden. Da pro Versuchsaufbau nur eine Kamera vorhanden ist, kann diese direkt ausgewählt werden. Anschließend öffnet sich ein Fenster, dass sowohl das Livekamerabild zeigt als auch alle Einstellungen über Button ermöglicht. In Abbildung 24 sind die wichtigsten Buttons gekennzeichnet. Im folgenden wird kurz deren Funktion erklärt:

Bevor ein Bild gespeichert wird, muss über die Dateieinstellung das richtige Format eingestellt werden. Als Format ist „16-bit TIFF without Annotations“ auszuwählen. Im entsprechenden Dialogfenster ist auch die Eingabe eines Pfades möglich, unter dem alle aufgenommenen Bilder gespeichert werden können. Die Option „Quick Save“ sollte ebenfalls aktiviert werden.

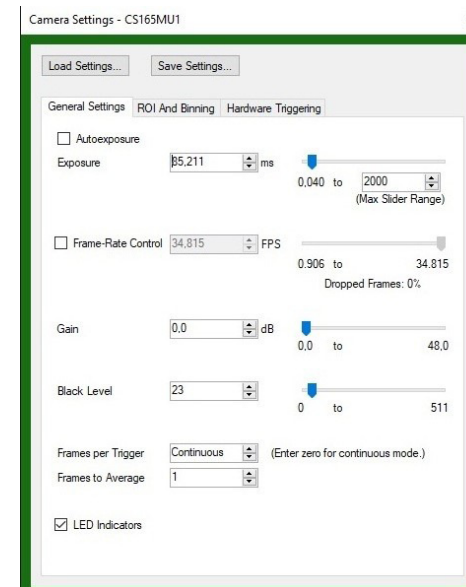


Abbildung 25: Kameraeinstellungen

Über den Button „Einstellungen“ lassen sich die wichtigsten Kameraparameter anpassen. Hier ist es möglich die Belichtungszeit und den Schwarzlevel zu

ändern. Um vorhandenes Bildrauschen zu minimieren, bietet sich das Mitteln über mehrere Bilder an. Über eine Eingabe im Feld „Frames to Average“ können Sie ausprobieren, welche Einstellung die besten Ergebnisse liefert. Sie müssen aber jedes Mal vor Ändern einer Einstellung die Kamera stoppen. Die Einstellung „Gain“ sollte auf 0 stehen.

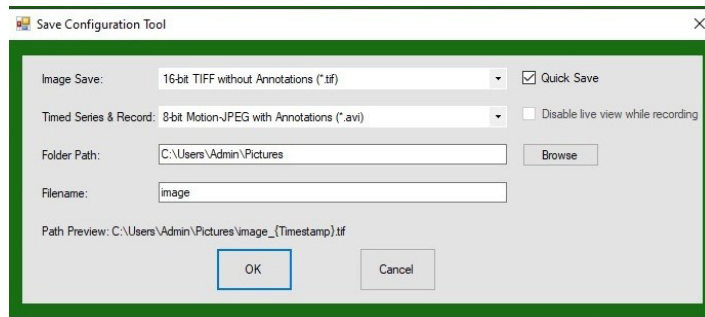


Abbildung 26: Dateieinstellungen

Über den Button „Intensitätsprofil“ lässt sich die Intensität jedes Pixels auf einer horizontalen Linie über das entsprechende Bild als Graph anzeigen. Die horizontale Linie wird dort durch das Bild gezogen, wo sich vor dem Linksklick der Mauscurser befand. Es öffnet sich ein neues Fenster mit dem Intensitätsprofil. Sollte das Intensitätsprofil nicht symmetrisch sein, liegt die Ursache meist darin, dass das Objekt nicht senkrecht steht. Das können Sie am rotierbaren Einzelspalt direkt durch eine leichte Rotation beheben. Für den Doppelspalt ist dies nicht so einfach. Sie können versuchen den Doppelspalt durch vorsichtiges Rotieren des Diaphragmas senkrecht zu stellen. Sollte dies nicht gelingen, können Sie in der Bildauswertungssoftware Gwyddion später auch ein Intensitätsprofil über eine leicht diagonale Linie bestimmen. Abbildung 27 zeigt ein Bild in dem alle Maxima ab der ersten Ordnung untersucht werden sollen.

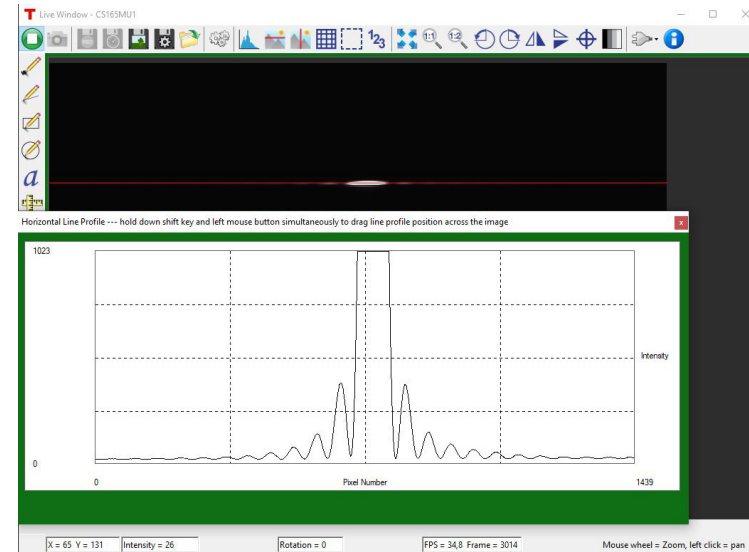


Abbildung 27: Intensitätsprofil

VII.3 Justage des Versuchsaufbau

Um den Versuchsaufbau zu justieren, muss der schwenkbare Graufilter aus dem Strahlengang gekippt werden, da sonst keine Beobachtung mit dem Auge möglich ist. Für die Justage wird der Einfachspalt im Strahlengang so positioniert, dass er möglichst zentrisch vom Laser ausgeleuchtet wird. Hinter dem Einfachspalt wird Linse L1 und der Analyserspalt positioniert. Der Abstand zwischen Linse und der Spaltebene des Analyserspales muss 80mm betragen. Zur Überprüfung liegen Metermaßstäbe aus (siehe Abbildung 29). Eine weitere Möglichkeit den Abstand einzustellen kann durch das Scharfstellen der Beugungsstruktur in der Analysespaltebene durchgeführt werden. Dazu liegen kleine, weiße Papierstücke aus, die direkt in die Ebene des Analyserspals gehalten werden können. Durch Verändern des Abstandes der Linse L1 zum Analysespalt kann die Schärfe eingestellt und so der richtige Abstand gefunden werden.

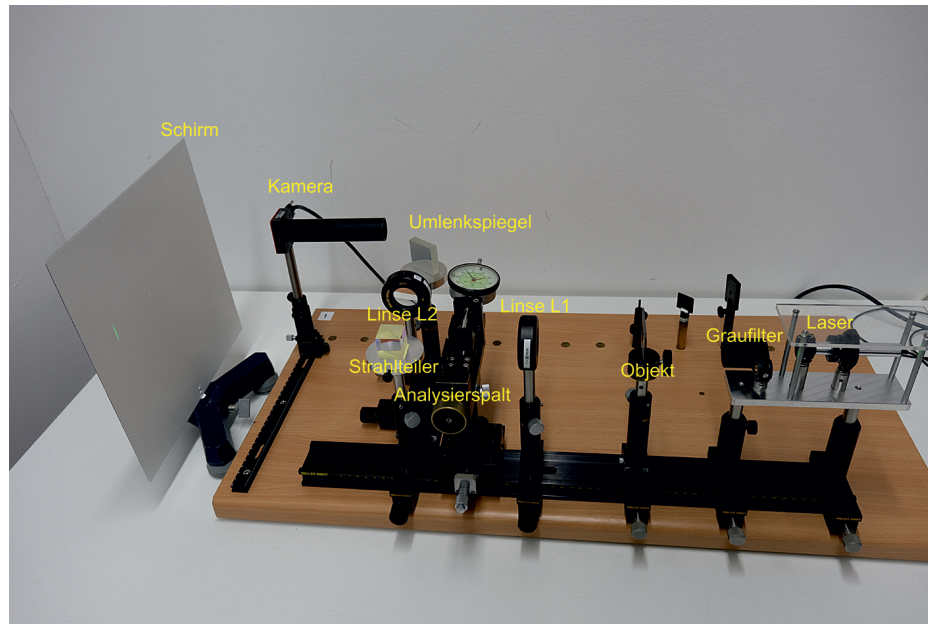


Abbildung 28: Einzelne Elemente des Versuchsaufbaus

Hinter dem Analysespalt befindet sich ein Strahlteiler. In gerader Fortführung vom Laser ist die Abbildung des Spaltes zu beobachten. Im zur Seite abgelenkten Strahl folgt Linse L2 und ein Umlenkspiegel, um das Beugungsbild nach hinten umzulenken.

Ist der Abstand zwischen Linse L1 und Analysespalt richtig eingestellt, muss nun sowohl die Abbildung des Einzelspaltes als auch das Beugungsbildes auf dem Schirm scharf gestellt werden. **Um das Spaltbild scharf zu stellen, muss der Objektträger (Spalt) entsprechend zur Linse L1 verschoben werden. Eine scharfe Abbildung ist an den „scharfen Kanten“ des Spaltes zu erkennen. Durch das Verschieben der Linse L2 kann hingegen das Beugungsbild scharf auf den Beobachtungsschirm abgebildet werden.** Dies ist an der minimalen vertikalen Ausdehnung der Nebenmaxima zu erkennen. Ein Beispiel für eine gute und eine schlechte Justage zeigt Abbildung 31.

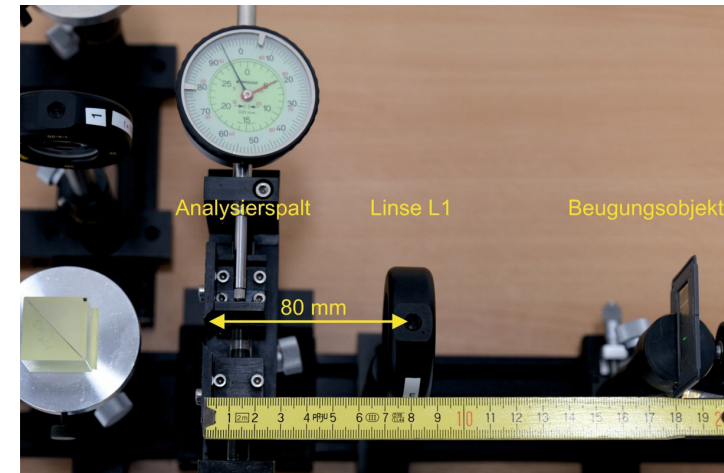


Abbildung 29: Justieren der Fourierebene

Abschließend ist der Analysierspalt zu zentrieren. Das ist am einfachsten über das Beugungsbild möglich. Dazu wird der Analysierspalt soweit geschlossen, dass nun noch jeweils die ersten Nebenmaxima zu sehen sind. Schließ man den Spalt nun etwas weiter, dass eines der beiden Nebenmaxima teilweise abgeschnitten wird, kann man über die Mikrometerschraube **M** quer zur optischen Achse verschieben. Abbildung 32 zeigt das Beugungsbild einer unsymmetrischen und einer symmetrischen Einstellung des Analysierspaltes.

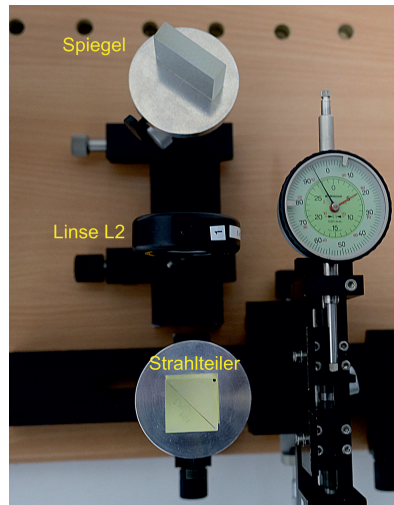


Abbildung 30: Strahlteiler, Linse L2 und Umlenkspiegel

VIII Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Quantitative Beobachtungen am Einfachspalt

Montieren Sie zunächst den variablen Einfachspalt als Objekt vor dem Diodenlaser. In dieser Aufgabe geht es um den grundsätzlichen Einfluss verschiedener Parameter auf die Abbildung des Einfachspaltes und deren Auswirkungen auf das Beugungsbild. Nachdem Sie den variablen Einfachspalt als Objekt eingesetzt haben, justieren Sie den optischen Aufbau entsprechend der vorherigen Beschreibung. Verwenden Sie für diesen Versuchsteil den Schirm zur Beobachtung mit dem Auge, die Kamera können Sie zwischen das Beugungsbild und die Abbildung schieben oder ganz aus dem Aufbau entfernen. Den Graufilter müssen Sie für eine ausreichende Intensität der Bilder aus dem Strahlengang klappen. Platzieren Sie zuerst die Fourierebene in die Ebene des Analysespalt durch das Verschieben der Linse L1 auf einen Abstand von 80 mm vom Analysespalt entfernt. Anschließend können Sie durch Verschieben des Objektes das Objektbild bzw. durch Verschieben der Linse L2 das Beugungsbild scharf auf dem Beobachtungsschirm abbilden. Wenn die Justage abgeschlossen ist, können Sie etw. „rumporbieren“. Stellen Sie verschiedene Spaltbreiten am Objekt ein,

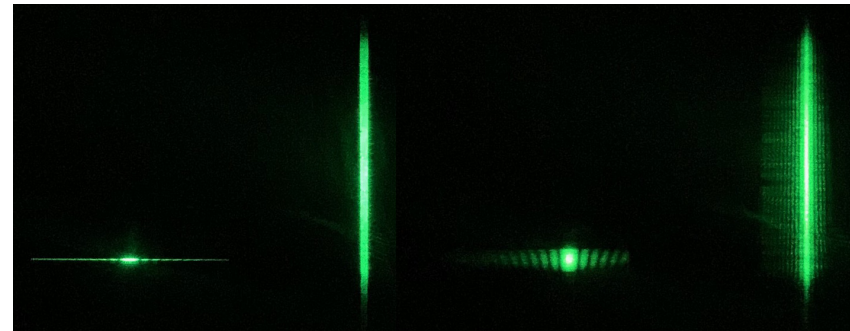


Abbildung 31: *Links: Justage korrekt. Rechts: Justage falsch, Fokusebene sowohl des Beugungs- als auch des Objektbild falsch eingestellt.*

rotieren Sie das Objekt und ändern Sie auch die Spaltbreite Analysespalt. Montieren Sie auch die Modenblende anstelle des Analysespalt und blenden Sie die 0. Ordnung aus. Notieren Sie sich jeweils, welchen Einfluss die geänderten Parameter auf das Beugungs- und Objektbild haben. Montieren Sie abschließend wieder den Analysespalt und vergewissern Sie sich, dass die Fourierebene noch in der Spaltebene liegt.

Aufgabe 2: Vermessen der Beugungsstruktur des Einfachspaltes

Öffnen Sie zunächst ThorCam und starten Sie den Liveview. Verschieben Sie anschließend die Kamera so, dass Sie das Beugungsbild auf dem Bildschirm erkennen können. Stellen Sie für diese Aufgabe die Spaltbreite des variablen Einzelspaltes so ein, dass das Hauptmaximum und min. 5 Nebenmaxima in der Beugungsstruktur vom Kamerasensor erfasst werden. Zur einfachen Ausrichtung können Sie zunächst den Graufilter aus dem Strahlengang gekippt belassen und mit einem Blatt Papier vor dem Streulichtschutz der Kamera das Beugungsbild ungefähr zentrisch ausrichten. Anschließend den Graufilter in den Strahlengang kippen. Auf dem Bildschirm sollte das Beugungsbild sichtbar sein. Falls Sie den Graufilter nicht im Strahlengang haben, übersteuert die Kamera und Sie sehen „wilde“ Spikes. Verstellen Sie die Kamera entsprechend in der Höhe, dass das Beugungsbild ungefähr mittig im Bild liegt. Anschließend müssen Sie durch Verschieben der Linse L2 das Beugungsbild scharf stellen. Justieren Sie abschließend noch die Achse des Analysespalt mit der optischen Achse, indem Sie den Analysespalt so weit schließen, dass die Maxima der ersten Ordnung

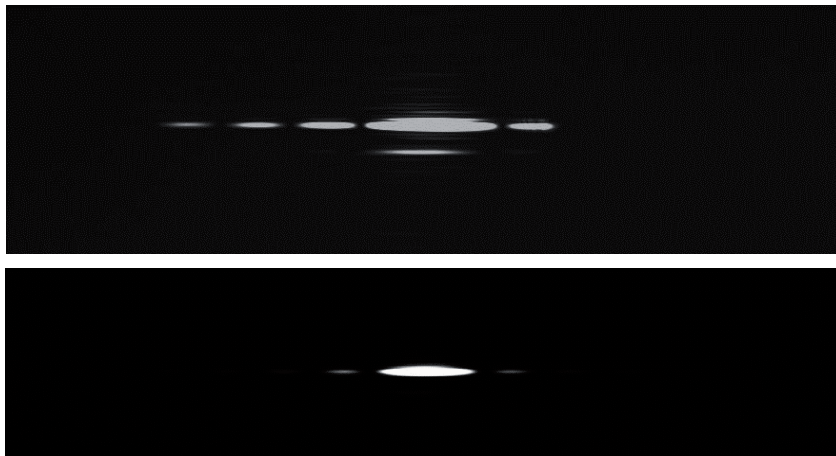


Abbildung 32: Oben: Beugungsbild bei nicht mittig eingestelltem Analyserspalt
Unten: Beugungsbild bei richtig eingestelltem Analyserspalt

leicht beschnitten werden. Über die Mikrometerschraube können Sie nun den Analysespalt exakt mittig ausrichten. Öffnen Sie anschließend den Analysespalt wieder, sodass alle Beugungsordnungen sichtbar sind.

Über das Menüpunkt „Intensitätsprofil“ können Sie sich nun die Intensitätsverteilung des Beugungsbildes anzeigen lassen. Klicken Sie dazu einfach auf das Hauptmaximum, um die Linie des Intensitätsprofil durch das Hauptmaximum zu legen. Diese Linie wird als rote, horizontale Linie im Bild angezeigt. Sollte das Beugungsbild verkippt sein, können Sie das durch Rotieren des Objektpaltes korrigieren. Stellen Sie die Belichtungszeit so ein, dass das Hauptmaximum nicht in Sättigung ist. Speichern Sie das Bild anschließend als 16-bit TIFF ab. Anschließend können Sie die Belichtungszeit so einstellen, dass die Maxima erster Ordnung gerade noch nicht in Sättigung sind. So sind Maxima höherer Ordnung ausreichend sichtbar. Speichern Sie auch hier ein Bild als 16-bit TIFF ab. Abbildung 33 zeigt jeweils beispielhaft die Intensitätsverteilung aus ThorCam.

Abschließend ist noch die Abszisse des Kamerabildes zu eichen. Das funktioniert am besten durch Vermessung der einzelnen Minima. Stellen Sie in der Fourierebene den Analyserspalt auf verschiedene Spaltbreiten ein und lesen Sie die Position anhand der abgeschnittenen Maxima in Pixeln in Thorcam. Die Able-

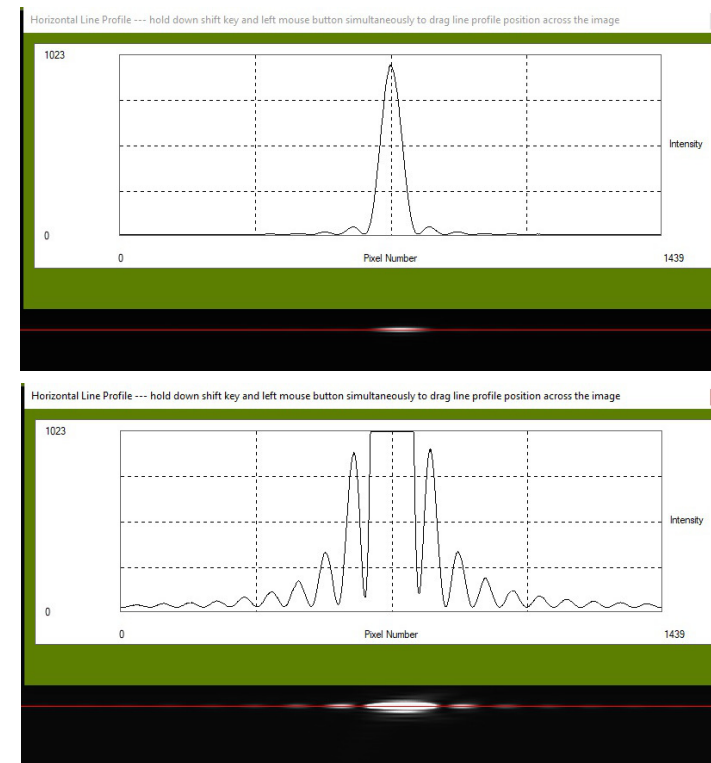


Abbildung 33: Oben: Maximum nullter Ordnung in maximaler vertikaler Auflösung – Unten: Maxima erster Ordnung in maximaler vertikaler Auflösung

sung der Spaltbreite erfolgt mit dem integrierten Messfühler. Markieren Sie z.B. mit dem Cursor ein Beugungsminimum und notieren Sie den Pixelwert an der Cursorposition. Schließen Sie nun den Analyserspalt bis die Spaltschneide die Cursorposition erreicht und notieren Sie den Wert der Messuhr. Wiederholen Sie dies für fünf gut ablesbare Punkte (Beugungsminima) des Beugungsbildes und protokollieren Sie die Daten (siehe Abbildung 34).

Öffnen Sie anschließend das Programm Gwyddion und erstellen Sie dort für beide gespeicherte Bilder ein Intensitätsprofil und speichern Sie sich dieses als Textdatei ab (Eine Anleitung ist im Anhang XII zu finden).

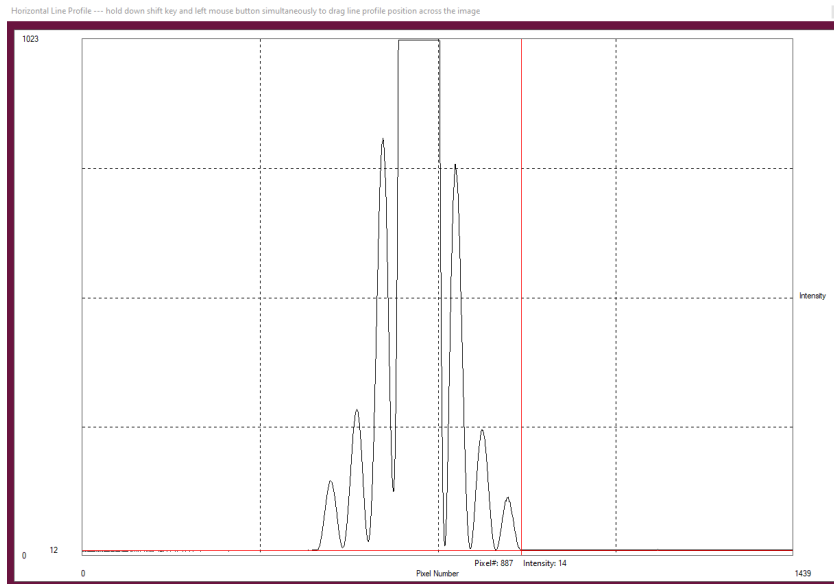


Abbildung 34: Eichung der Abszisse am Minimum dritter Ordnung

Nach Bearbeitung dieser Aufgabe müssen Sie folgendes gespeichert haben:

- Ein Bild der Beugungsstruktur des Einfachspaltes mit dem Hauptmaximum in maximaler vertikaler Auflösung
- Ein Bild der Beugungsstruktur des Einfachspaltes mit den Maxima 1. Ordnung in maximaler vertikaler Auflösung
- Fünf Wertepaare für die Position des Analysespaltes in mm zur Position auf dem Kamerachip in Pixel
- Für beide aufgenommene Bilder ein Intensitätsprofil entlang der Beugungsstruktur als Textdatei

Aufgabe 3: Vermessen der Beugungsstruktur des Doppelspaltes

Ersetzen Sie den variablen Einfachspalt durch den Objekthalter und spannen Sie in diesen den Diarahmen mit den Doppelspalten. Schauen Sie sich zunächst

die Beugungsstruktur auf dem Schirm an. Durch das Drehen an der horizontalen Positionsschraube können Sie sich alle drei Doppelspaltkonfigurationen nacheinander ansehen. Skizzieren Sie die Beugungsstruktur und versuchen Sie die Strukturen zu interpretieren. Versuchen Sie aus den beobachteten Maxima und Minima die Beugungsordnungen der Spalt- und Gitterfunktion zuzuordnen. Für die quantitative Beobachtung des Doppelspaltes wird der mittlere Doppelspalt verwendet und Sie müssen die Kamera anstelle des Schirmes hinter dem Umlenkspiegel platzieren. Stellen Sie auch hier wieder das Beugungsbild in der Ebene des Kamerasensors durch Verschieben der Linse **L2** scharf. Wie bei der vorherigen Aufgabe ist der mittlere Doppelspalt wieder exakt mittig im Strahlengang zu positionieren. Die Eichung der Abszisse auf dem Monitorbild können Sie von der entsprechenden Messung am Einzelspalt übernehmen.

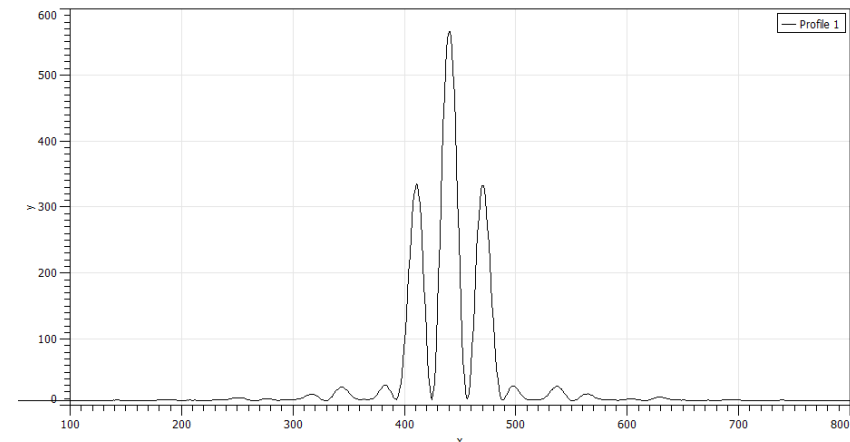


Abbildung 35: Beugungsstruktur des Doppelspaltes

Speichern Sie für den Doppelspalt ein Bild als TIFF-Datei ab, auf dem das Hauptmaximum gerade noch nicht in Sättigung ist. (Abbildung 35). Bestimmen Sie wieder mit Gwyddion aus dem gespeicherten Bild ein Intensitätsprofil und speichern es als Textdatei ab. Vermessen Sie zusätzlich die Intensitätsunterschiede zwischen den Maxima rechts und links bis zum 1. Minimum der Einfachspaltfunktion.

Nach Bearbeitung dieser Aufgabe müssen Sie folgende Daten gespeichert haben:

- Ein Bild der Beugungsstruktur des des Doppelspaltes mit dem Hauptmaximum in maximaler vertikaler Auflösung
- Ein Intensitätsprofil entlang der Beugungsstruktur als Textdatei
- Die relativen Intensitätswerte aller Maxima im Hauptmaximum der Einfachspaltfunktion

Aufgabe 4: Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Einfachspaltes

Platzieren Sie zu Beginn dieser Aufgabe den variablen Einfachspalt statt des u.U. noch eingesetzten Objekthalters zwischen Linse L1 und Lasereinheit. Das Beugungsbild soll möglichst groß abgebildet werden. Stellen Sie deswegen den Schirm mit etwas Entfernung hinter den Umlenkspiegel. Überprüfen Sie die Lage der Fourierebene. Stellen Sie durch das Verschieben der Linse L2 die Abbildung der Beugungsstruktur auf dem Beobachtungsschirm scharf. Sollte das nicht möglich sein, müssen Sie den Analysespalt näher an den Strahlteiler schieben und anschließend den Aufbau neu justieren. Dadurch sollte eine scharfe Abbildung der Beugungsstruktur auch in etwas größerer Entfernung auf dem Beobachtungsschirm möglich sein. Damit sie mit dem Auge die Struktur beobachten können, müssen Sie den Graufilter zunächst noch aus dem Strahlengang herauskippen, um die Struktur scharfstellen zu können. Diese Abbildung dient dazu, dass Sie später die noch zur Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen durch das Einstellen des Analysespalt bestimmen können.

Die Intensitätsverteilung des Objektbildes können Sie sich wieder direkt in ThorCam anzeigen lassen. Verfahren Sie diese auf der Schiene so dass das Objektbild mittig auf den Sensor abgebildet wird. Bestimmen Sie in Thorlab wieder die Intensitätsverteilung einer horizontalen Linie im Livebild. Stellen Sie die Belichtungszeit so ein, dass keine Sättigung auftritt. Hierzu müssen Sie den Graufilter wieder in den Strahlengang schwenken. Im weiteren Verlauf der Aufgabe müssen Sie jeweils für die Bestimmung der zur Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen den Graufilter umklappen und zum Aufnahmen der Spaltbilder diesen wieder in den Strahlengang klappen.

Man beobachtet eine zunächst mehr oder weniger gut ausgeprägte Rechteckfunktion mit einer großen Zahl von „wiggles“. Um eine möglichst steile Rechteckfunktion zu sehen, muss der Aufbau nachjustiert werden. Zum scharfstellen

des Spaltbilds dürfen Sie aber nicht die Linse L₁ verschieben, da der Abstand von L₁ zum Analyserspalt genau die Brennweite von 80 mm der Linse L1 betragen muss. Vielmehr muss man den Abstand zwischen dem Objekt (der variable Einfachspalt) selbst bzgl. zur Linse L1 verändern, bis dessen Bild in der Ebene des Kamerasensors scharf erscheint. Letzteres wird dadurch kenntlich, dass Sie nun eine zunehmend ideale Rechteckfunktion auf dem Monitor beobachten können. Stellen Sie auf **größtmögliche Steilheit der Kanten** des Spaltbildes ein. Dazu müssen Sie den Spalt sehr feinfühlig entlang der Schiene verrücken, es geht um Bruchteile eines Millimeters! Bei diesem Vorgehen bleibt die Lage der Fourierebene und damit das Beugungsbild auf dem Schirm unverändert.

Um sich zunächst einen Überblick über die sukzessiv auftretenden Strukturen zu verschaffen, drehen Sie den Analyserspalt nun langsam zu und beobachten die Veränderungen der Beugungsstruktur auf dem Schirm und danach des Spaltbildes auf dem Monitor. Die einfachste Struktur des Spaltbildes erhalten Sie offenbar, nachdem Sie bis auf das zentrale Maximum alle Nebenmaxima ausgeblendet haben. Symmetrisieren Sie das Fourierbild gleichzeitig durch Nachjustieren der Position des Analysespalt quer zum Strahlengang wie dies im Abschnitt Justage beschrieben ist.

Mit dieser Einstellung beginnend suchen Sie nun der Reihe nach bei **größer werdender Öffnung des Spaltes** die charakteristischen Bildstrukturen auf, die sich einstellen, wenn Sie der Reihe nach genau die 0-te, ± 1 -te, ± 2 -te Ordnung etc. zur Abbildung zulassen. Bis zu welcher Ordnung können Sie deutliche Strukturen beobachten? Auch hier können Sie nochmals auf die genaue Justierung der Abbildung achten.

Nehmen Sie insgesamt vier Bilder auf. Beim ersten Bild lassen Sie nur die 0. Beugungsordnung zur Abbildung zu, beim nächsten Bild die 0. und ± 1 . Ordnungen, beim dritten Bild die 0., ± 1 . und ± 2 . Ordnungen sowie schließlich die 0., ± 1 ., ± 2 . und ± 3 . Ordnungen. Bestimmen Sie sofort die Intensitätsprofile mit dem Programm Gwyddion. Falls Sie nicht zufrieden sind, justieren Sie nach und nehmen erneut Bilder auf. Hinweis: Den Bildern sind störende Strukturen überlagert. Diese können in Gwyddion über die Anwendung eines Filters auf die Fouriertransformierte des Bildes und das anschließende Mitteln über mehrere Pixelzeilen herausgerechnet werden (siehe Anhang XII).

Nehmen Sie zusätzlich noch ein Bild bei weit geöffneten Analyserspalt auf. Entfernen Sie in Gwyddion auch für dieses Bild die störenden Strukturen und vermessen Sie das Intensitätsprofil und speichern es als Textdatei ab. Bestim-

men Sie die Spaltbreite in Pixeln mit der Cursorfunktion. Ein Pixel hat eine Breite von $3.45 \mu\text{m}$. Aus der gemessenen Spaltbreite in Pixeln, die hier gemäß der optischen Abbildung (L_1) vergrößert erscheint, kann die reele Spaltbreite berechnet werden. Die Vergrößerung ist aus Brennweite f der Linse und Bildweite b bestimmbar, letztere messen Sie mit einem Zollstock, dessen Messgenauigkeit hierzu völlig ausreicht.

Nach Bearbeitung dieser Aufgabe sollten Sie folgende Daten gespeichert haben:

- Fünf Bilder des Spaltbildes mit zunehmender, zur Abbildung zugelassener Beugungsordnungen
- Die bestimmten Intensitätsprofile als Textdatei
- Vergrößerung des Aufbaus, Brennweite f und Bildweite b

Aufgabe 5: Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes am Beispiel des Doppelspaltes

Als nächstes schauen Sie sich nun das Bild des Doppelspaltes mit der Kamera an. Justieren Sie wieder auf optimale Kantensteilheit der Spaltbilder und Symmetrie! Bestimmen Sie Breite und Abstand der beiden Einzelspalte in Pixeln mit der Cursorfunktion. In derselben Weise wie bei den Messungen am Einzelspalt können Sie aus der aktuellen Bildweite und Brennweite die Vergrößerung bestimmen und daraus die Abmessungen des Doppelspaltes (**Spaltweite** und **Spaltabstand** siehe Abbildung 15) berechnen.

Diese Werte werden bei der Interpretation des gemessenen Beugungsbildes benötigt! Beobachten Sie im Folgenden auch hier wieder die schon beim Einzelspalt untersuchten Beiträge der einzelnen Beugungsordnungen, indem Sie nun den Analyserspalt in der Fourierebene auf- und zudrehen. Überlegen Sie sich hierzu die wichtige Frage: Wie liegen eigentlich die Beugungsbilder der individuellen Spalte in der Brennebene (Fourierebene) relativ zueinander?

Als letztes drehen Sie nun langsam den Analyserspalt zu (Wichtig: Schauen Sie sich dabei gleichzeitig immer auch das Beugungsbild auf dem Schirm an und verfolgen Sie, was da geschieht!) und beobachten, wie die beiden rechteckigen Spaltprofile zu zwei gaussähnlichen Profilen verschwimmen (Fall a: nur noch die 1-ten Beugungsmaxima beider Spalte tragen zur Abbildung bei), wie sich zunehmend auch der Zwischenraum aufhellt und schließlich die Doppelstruktur endgültig verschwindet und nur noch ein flaches Plateau (Fall b: auch die dem Doppelspalt zuzuordnenden 1. Gittermaxima werden abgeschnitten)

sichtbar bleibt. Notieren Sie die zu a) und b) gehörenden Einstellungen des Analysierpaltes und nehmen Sie jeweils ein Bild auf, woraus Sie anschließend das Intensitätsprofil mit Gwyddion bestimmen. Auch hier sind wieder wie in der vorherigen Aufgabe die störenden Strukturen zu entfernen.

Nach Bearbeitung dieser Aufgabe sollten Sie folgende Daten gespeichert haben:

- Bild des Doppelspaltes bei dem nur die 1. Beugungsmaxima beider Spalte zur Abbildung zugelassen wurden
- Bild des Doppelspaltes bei dem auch das 1. Beugungsmaxima der Doppelspaltfunktion nicht mehr zur Abbildung zugelassen wurden
- Intensitätsprofile beider Bilder als Textdatei

IX Auswertung

Zu Aufgabe 2: Vergleichen Sie die Lage der Maxima und Minima sowie die gemessenen Intensitätsverhältnisse der einzelnen Beugungsordnungen mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Tragen Sie zunächst den Abstand der Minima n -ter Ordnung (jeweils in Pixel angegeben) gegen die Ordnungszahl n auf. Es sollte sich eine Gerade ergeben, anhand dessen Steigung die Spaltweite des verwendeten Beugungsspaltes bestimmt werden kann. Leiten Sie diesen Zusammenhang her und überprüfen Sie diesen mit Ihren Messdaten. In dasselbe Diagramm tragen Sie nun die gemessenen Werte für die Lage der Beugungsmaxima ein und entnehmen der Geraden die Werte für n . Liegen diese genau zwischen den entsprechenden Werten der Minima bei 1,5, 2,5 etc.? Wo sollten sie liegen? Schätzen Sie die Fehler ab.

Als nächstes ermitteln Sie die Intensitätsverhältnisse der gemessenen Nebenmaxima relativ zum Maximum 0-ter Ordnung und vergleichen Sie diese mit den theoretisch erwarteten Werten. Schätzen Sie auch hier die Fehler ab.

Zu Aufgabe 3: Berechnen Sie mit Hilfe von Python oder mit dem Onlinescript³ ein Bild der theoretisch zu erwartenden Beugungsstruktur des untersuchten Doppelspaltes. Benutzen Sie dabei für die Spaltweite und den Abstand der Spalte die Werte, die Sie in Aufg. 5 bestimmt haben. Vergleichen Sie diese mit

³Sie können die Berechnungen auch auf der Praktikumshomepage durchführen. <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Software.php>

der experimentell bestimmten Struktur: Welche Minima entsprechen den Nullstellen der Spaltfunktion, welche denen der Gitterfunktion? Vergleichen Sie die gemessenen Intensitäten der Nebenmaxima innerhalb der Einhüllenden des 0. Maximums des Einzelspalt bezogen auf das zentrale Maximum mit den entsprechenden theoretischen Werten.

Zu Aufgabe 4: Berechnen Sie mit Python oder dem Onlinescript für die spezifischen Einstellungen des Analyserspalt (0. Ordnung zur Abbildung zugelassen, 0. und 1. Ordnung zur Abbildung zugelassen usw.) die Objektbilder (die Formeln werden im Kapitel „Grundlagen“ diskutiert). Vergleichen Sie die Zahl und Lage der „Wiggels“ (der Maxima) mit den gemessenen Intensitätsprofilen. Vergleichen sie ebenfalls die Intensitäten der Maxima und Minima der ersten drei Bildkurven, normiert auf das Maximum des zur 0. Beugungsordnung gehörenden modifizierten Spaltbildes. Überlegen Sie sich warum bei einem fast geschlossenen Analyserspalt (d.h. nur die 0-te Ordnung wird durchgelassen) die Intensität in der Bildmitte höher ist, als wenn dieser weit geöffnet ist.

Zu Aufgabe 5: Im Kapitel Grundlagen sind die Formeln für die Fouriertransformierte des Doppelspalt sowie die durch Fouriersynthese rückwärts wieder gewonnene Darstellung des Doppelspaltbildes mit einigen gerechneten Beispielen angegeben. Auch hier erhält man wieder in einfacher Weise die „rudimentäre“ Spaltfunktion, so wie sie experimentell beobachtet wird, indem man als obere Integrationsgrenze die Zahl der zur Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen - also deren k_y - Wert - einsetzt.

Vergleichen Sie die rechnerisch gewonnenen Bilder mit den experimentell beobachteten Fällen. Fall a) entspricht dem 1. Spaltminimum als obere Integrationsgrenze. Um Fall b) zu simulieren, müssen Sie sich für verschiedene Werte von k_y nahe dem Wert $k_y = k_0 \sin \alpha = k_0 \lambda / g$ die zugehörigen Bilder verschaffen und durch Iteration auf einen Wert hinarbeiten, der gerade die experimentell bestimmte Struktur wiedergibt. Die mit Python erstellten Bilder mit dem zugehörigen Grenzwert für k_y sind der Auswertung beifügen. Aus der gemessenen Breite des Analyserspalt (Fall b) können Sie sich zusammen mit der Kenntnis der Brennweite von L_1 den experimentell bestimmten Grenzwert für k_y verschaffen und vergleichen.

X Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

X.1 Berechnung der Beugungsbilder

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus.

Intensitätsverteilung I des Beugungsbild des Spalts:

$$I(x) = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \quad (55)$$

mit $x = d/\lambda \pi \sin(\alpha)$.

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Die Beugungsfunktion des Spalts ist eine sinc()- Funktion und ist im Modul Numpy enthalten.

```
#Beugungsfunktion Spalt
def beugung_spalt(x):
    return np.sinc(x)**2
```

Für den Doppelspalt gilt

$$I(x) = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \cos(vx)^2, \quad (56)$$

wobei $v = g/d$ das Verhältnis von Spaltabstand zu der Spaltbreite darstellt. Da Numpy die normierte Form der sinc-Funktion verwendet, muss im Argument des Kosinus noch der Faktor π hinzugefügt werden.

```
#Beugungsfunktion Doppelspalt
def beugung_doppelspalt(x):
    return np.sinc(x)**2*np.cos(np.pi*v*x)**2
```

Die Abszissenwerte generieren wir uns mit der Numpy-Funktion `x=np.linspace(start,stop,steps)`.

```
#Anzahl a der Nebenmaxima die dargestellt werden sollen:
a=1
#Verhaeltnis Spaltabstand zu Spaltbreite:
v=2
x=np.linspace(-(a+1),a+1,200)
plt.plot(x,beugung_spalt(x),label='Spalt')
plt.plot(x,beugung_doppelspalt(x),label='Doppelspalt')
plt.xlabel('$\pi x$')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Beugung am Spalt und Doppelspalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.legend()
plt.savefig("figures/Beugung_spalt_doppelspalt.pdf", format="pdf")
```

Drucken Sie das Diagramm aus. Es sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 36.

X.2 Berechnung der modifizierten Spaltbilder

Um das resultierende Bild des Spaltes zu erhalten muss folgendes Integral berechnet werden:

$$f_{\text{modifiziert}}(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} \left[\sin(k_y d/2) / (k_y d/2) \right] \cos(k_y y) dk_y \quad (57)$$

mit

$$k_{y,n} = k_0 \sin \alpha_n = k_0 n \lambda / d = 2n\pi / d, \quad (58)$$

wobei d die Spaltbreite und n den Integrationsbereich bezüglich der Nullstellen angibt. Wählen Sie z.B. $n = 1$, so erfolgt die Integration nur bis zu den ersten Nullstellen, d.h. nur über das Hauptmaximum. Bei $n = 2$ erfolgt die Integration über das Hauptmaximum und über die ersten Nebenmaxima.

```
#Integrand
def spalt(k,y):
    return d/np.pi*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)
```

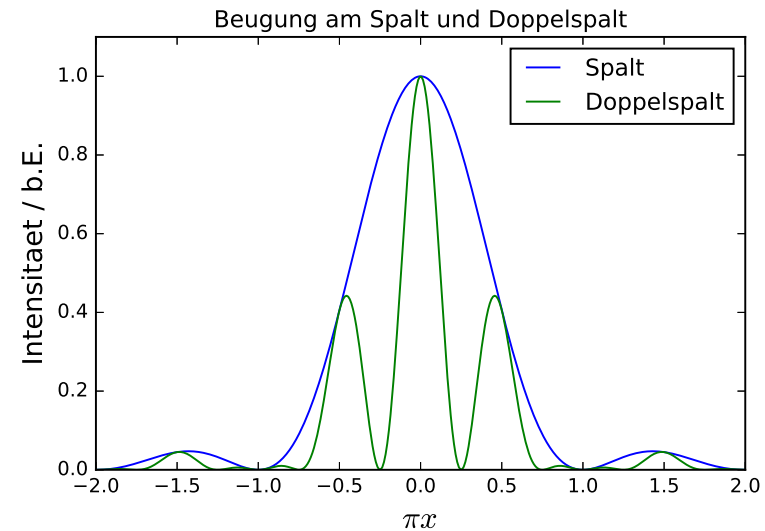


Abbildung 36: Beugung am Spalt und Doppelspalt

```
d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=3 #Integrationsbereich
```

Für den y-Bereiche wählen wir die doppelte Spaltbreite.

```
#y-Werte:
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
```

Um die numerische Integration durchzuführen brauchen wir die Funktion `quad()` die im Modul `scipy.integrate` enthalten ist.

```
#Berechnung des resultierenden Objektbilds
from scipy.integrate import quad
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d, args =(y,))
    f_modifiziert.append(result**2)
```

#Kurve auf 1 normieren:

```
f_modifiziert = f_modifiziert/np.max(f_modifiziert)
```

Das Ergebnis ist in Abbildung 37 dargestellt. Die Abszisse ist in Einheiten der Spaltbreite d skaliert.

```
plt.plot(Y,f_modifiziert)
plt.xlabel('y / d')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('modifiziertes Objektbild Spalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig("figures/spalt.pdf", format="pdf")
```

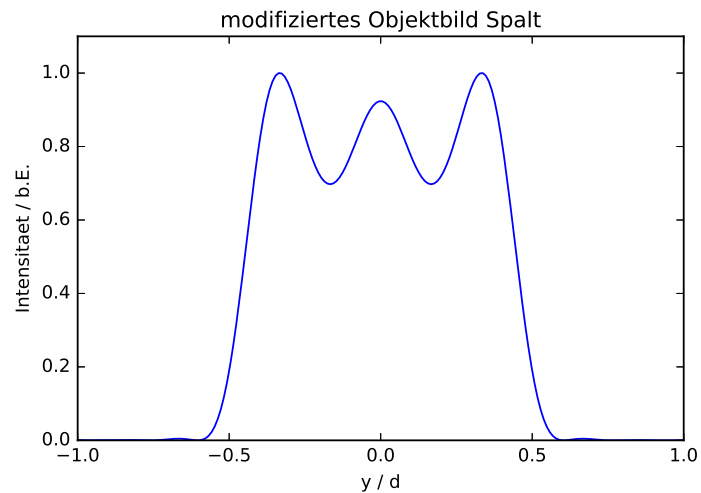


Abbildung 37: *Modifiziertes Spaltbild*

Analog verfahren Sie mit dem Doppelspalt. Sie benötigen die Funktion des Doppelspalts:

```
def doppelspalt(k):
    return d/np.pi*np.cos(k*g/2)*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)
```

#Spaltabstand in Einheiten der Spaltbreite:

```
g=2*d
n=3
```

Tragen Sie das Ergebnis der Integration in ein Diagramm ein. Den y-Bereich müssen Sie gemäß Ihres gewählten Spaltabstands anpassen. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 38 aussehen.

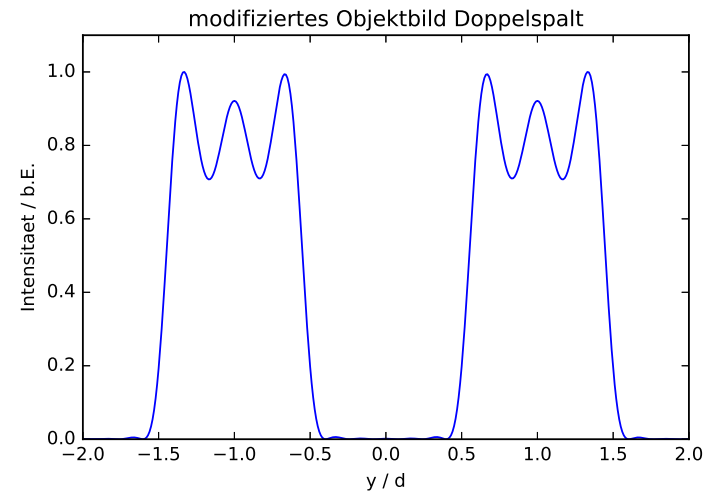


Abbildung 38: *Modifiziertes Bild des Doppelspalts*

X.3 Fit der Beugungsfunktion an die Messdaten

Im folgenden wird noch die optionale Möglichkeit gezeigt, die Beugungsfunktion an die Messdaten anzufitten und damit zum Beispiel auch den Spaltdurchmesser direkt bestimmen zu können.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
from matplotlib import notebook
```

Als erstes muss die Abzisseneichung durchgeführt werden.

```
# Messwerte plotten
```

```
#Messwerte, s: Position Analysierspalt
```

```
pixel = np.array([110,182,256,328,398,473,543,617,690])
s = np.array([1.515,1.36,1.2,1.04,0.88,0.7,0.55,0.375,0.205])
```

```
#Gerade anfitten
```

```
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
```

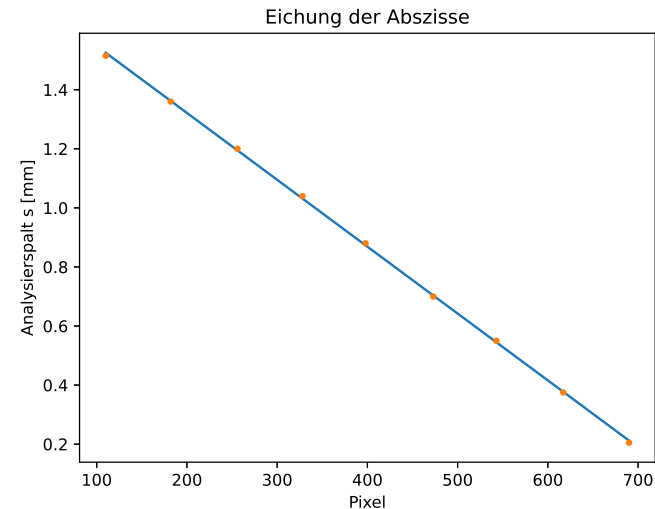
```
popt, pcov = curve_fit(linear, pixel, s)
plt.plot(pixel, linear(pixel, *popt))
```

```
#plotten
```

```
plt.plot(pixel,s, linestyle='None', marker='.')
plt.xlabel('Pixel')
plt.ylabel('Analysierspalt s [mm]')
plt.title('Eichung der Abszisse')
print("Steigung:" ,popt[0], " mm/pixel")
```

Als nächstes wird das aufgenommene Intensitätsprofil mit dem Hauptmaximum nicht in Sättigung als Textdatei importiert und geplottet.

```
pix, intensity = np.loadtxt('messung1.txt', unpack=True)
```



```
#Aus Eichung: Abszisse von Pixel in mm umrechnen
x = pix * (-popt[0])
```

```
# Daten plotten
```

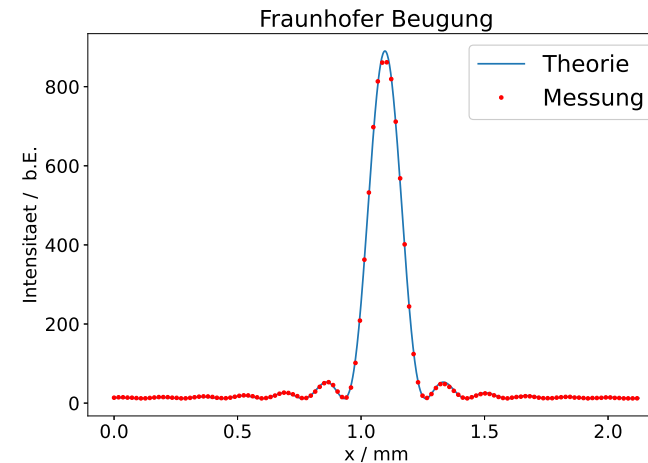
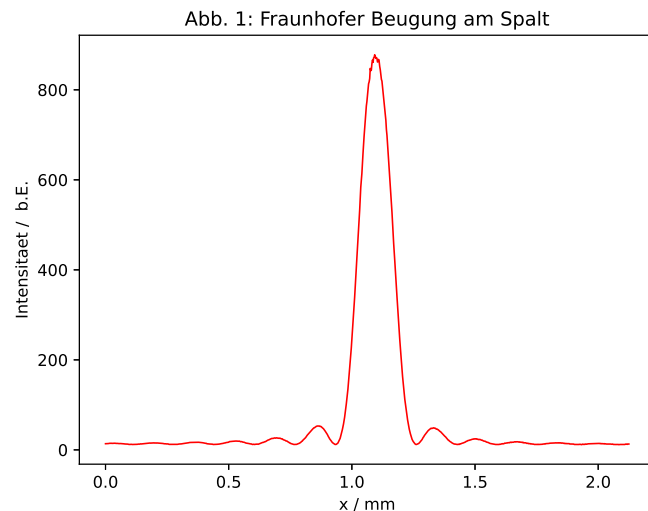
```
plt.plot(x,intensity, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / mm')
plt.ylabel('Intensitaet / '+' b.E.')
plt.title('Abb. 1: Fraunhofer Beugung am Spalt')
plt.savefig("FraunhoferBeug1.eps", format="eps")
```

Nun muss eine Funktion definiert werden, die an die Messdaten angefitet werden kann.

```
#Fitfunktion definieren
```

```
def fitFunc(x, a, scale, off, ug):
    return a*(np.sin(scale*(x-off))/(scale*(x-off)))**2 +ug
```

```
# Funktion anfitten
```



Um die Güte des Fits zu bewerten, kann man sich die Residuen des Fittes im Vergleich zu den Messdaten anschauen. Überlegen Sie sich, ob es sich hierbei um systematische oder statistische Fehler handelt.

```
init_vals = [1000, 15, 1.1, 10]
fitParams, fitCovariances = curve_fit(fitFunc, x, intensity,
                                     p0=init_vals, maxfev=8000)

print(fitParams)

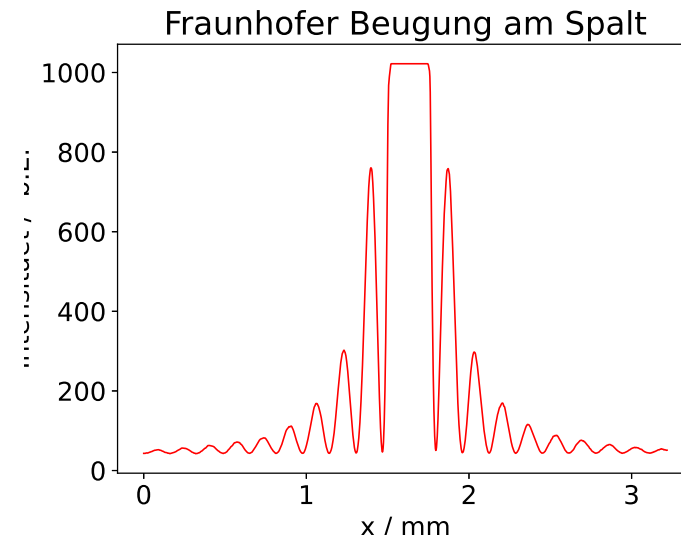
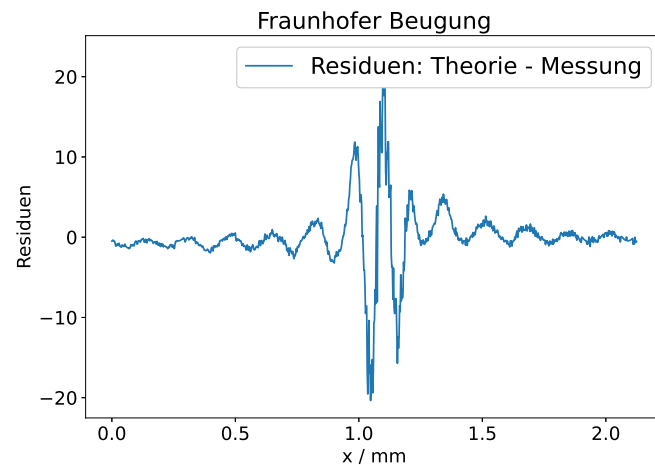
# Messung und Fit plotten
plt.figure(figsize=(9,6))
plt.rc('axes', grid=False, labelsz=16, titlesz=20)
plt.rc('xtick', labelsz=16)
plt.rc('ytick', labelsz=16)
plt.plot(x, fitFunc(x, *fitParams), label="Theorie")
plt.plot(x[:8], intensity[:8], color='red', linestyle='None',
         marker='.', label="Messung")

plt.xlabel('x / mm')
plt.ylabel('Intensitaet / '+' b.E.')
plt.title('Fraunhofer Beugung')
plt.legend(loc='best', prop={'size':20})
plt.savefig("FraunhoferBeugFit.eps", format="eps")
```

#Plot der Residuen (Theorie-Messung)

```
plt.figure(figsize=(9,6))
plt.rc('axes', grid=False, labelsz=16, titlesz=20)
plt.rc('xtick', labelsz=16)
plt.rc('ytick', labelsz=16)
plt.plot(x, (fitFunc(x, *fitParams)-intensity),
         label="Residuen: Theorie - Messung")
plt.xlabel('x / mm')
plt.ylabel('Residuen')
plt.title('Fraunhofer Beugung')
plt.legend(loc='best', prop={'size':20})
plt.savefig("FraunhoferBeugResid.eps", format="eps")
```

Um für die Maxima kleinerer Ordnung den Fit besser bewerten zu können, sollte er nochmals mit der Aufnahme der Beugungsstruktur mit übersteuertem Hauptmaximum durchgeführt werden.



```
pix1, intensity1 = np.loadtxt('messung2.txt', unpack=True)
```

```
#Aus Eichung: Abszisse von Pixel in mm umrechnen
```

```
x1 = pix1 * (-popt[0])
```

```
# Daten plotten
```

```
plt.plot(x1,intensity1, color='red', linewidth=1)
```

```
plt.xlabel('x / mm')
```

```
plt.ylabel('Intensitaet / '+' b.E.')
```

```
plt.title('Fraunhofer Beugung am Spalt')
```

```
plt.savefig("FraunhoferBeugNebenMax.eps", format="eps")
```

Über die Anpassung der x-Achsen Limits kann man die Seite links des Hauptmaximums vergrößern.

```
# Plot der linken Seite
```

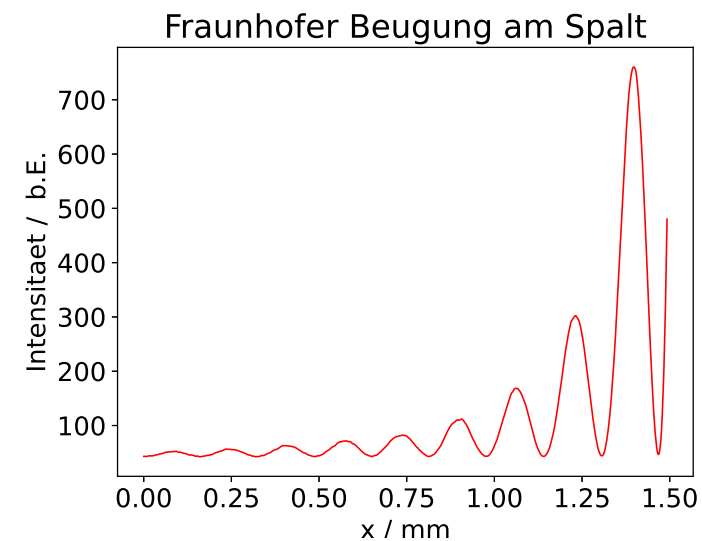
```
plt.plot(x1[:660],intensity1[:660], color='red', linewidth=1)
```

```
plt.xlabel('x / mm')
```

```
plt.ylabel('Intensitaet / '+' b.E.')
```

```
plt.title('Fraunhofer Beugung am Spalt - Nebenmaxima links')
```

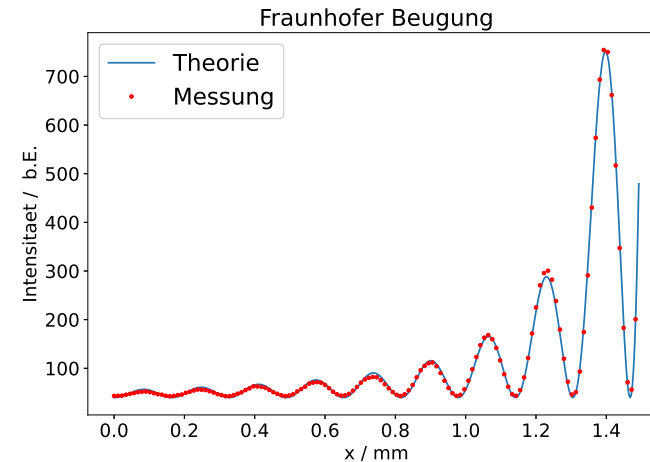
```
plt.savefig("FraunhoferBeugNebenMax_links.eps", format="eps")
```



Auch für diesen vergrößerten Ausschnitt kann man wieder eine Funktion anfitten und sich den Fit im Vergleich zu den Messdaten plotten.

```
# Funktion anfitten
init_vals = [15000, 20, 1.6, 50]
fitParams, fitCovariances = curve_fit(fitFunc, x1[:660], intensity1[:660],
                                     p0=init_vals, maxfev=10000)
print(fitParams)

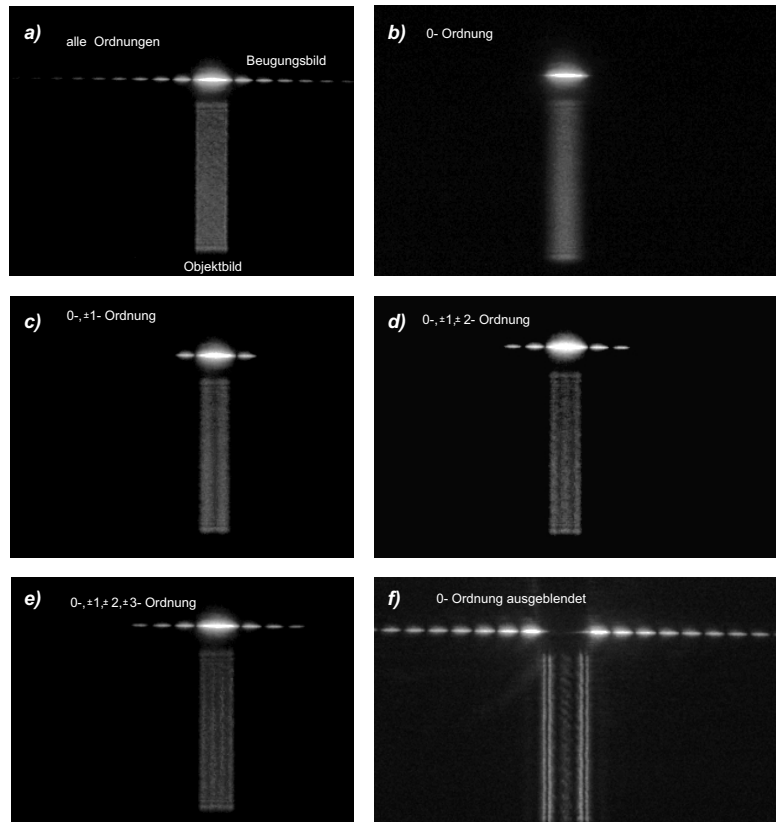
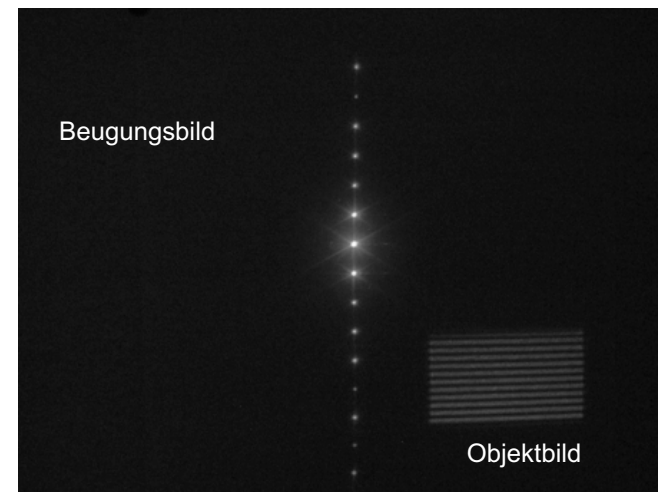
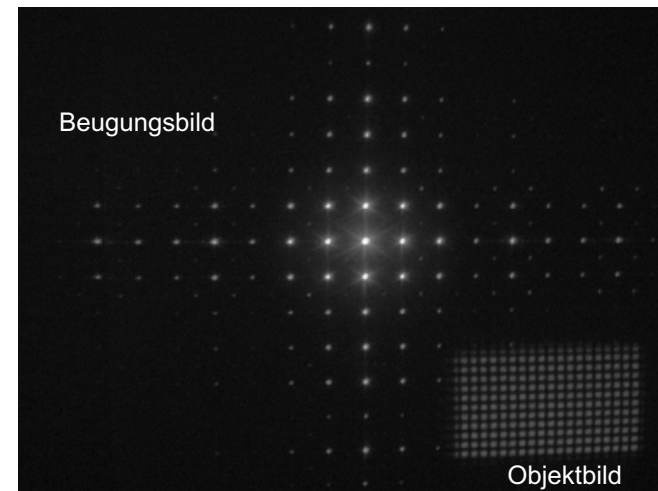
# Messung und Fit plotten
plt.figure(figsize=(9,6))
plt.rc('axes', grid=False, labels=16, titlesize=20)
plt.rc('xtick', labels=16)
plt.rc('ytick', labels=16)
plt.plot(x1[:660], fitFunc(x1[:660], *fitParams), label="Theorie")
plt.plot(x1[:660:5], intensity1[:660:5], color='red', linestyle='None',
        marker='.', label="Messung")
plt.xlabel('x / mm')
plt.ylabel('Intensitaet / '+' b.E.')
plt.title('Fraunhofer Beugung - links')
plt.legend(loc='best', prop={'size':20})
plt.savefig("FraunhoferBeugNebenMax_linksFit.eps", format="eps")
```



XI Anhang

Die folgenden Bilder zeigen Fotografien von Objekt- und Beugungsbildern, die im Praktikum aufgenommen wurden. Bei allen Teilbildern ist neben dem Beugungsbild auch das resultierende Objektbild eingeblendet. Abbildung 39 zeigt die Beugung an einem Spalt. Im Teilbild a) tragen alle Beugungsordnungen zur Abbildung bei, so dass ein „scharfes Spaltbild“ erkennbar ist. Bei den Bildern b) bis e) wurden einzelne Moden des entsprechenden Beugungsbildes ausgeblendet, so dass nur einzelne Ordnungen zur Bildentstehung beitragen (Tiefpassfilter). Deutlich ist die Intensitätsverteilung gemäß Abbildung 14 zu erkennen. Das Teilbild f) zeigt zusätzlich das Spaltbild bei Ausblendung des Hauptmaximums (Hochpassfilter).

In Abbildung 40 ist das Beugungsbild eines Kreuzgitters zu sehen. Im oberen Bild tragen alle Ordnungen zur Bildentstehung bei und man erhält ein „unverfälschtes“ Objektbild. Im Bild darunter sind alle horizontalen Moden beschnitten. In diesem Fall geht die vertikale Information des Strichgitters verloren, so dass sich das Objektbild zu einem horizontalen Gitter verändert. Die vertikalen Striche sind im Objektbild nicht mehr vorhanden!

Abbildung 39: *Beugung am Spalt*Abbildung 40: *Beugung am Kreuzgitter*

XII Anhang: Bildbearbeitung und -auswertung mit Gwyddion

Im Folgenden soll eine kurze Einführung in das Programm Gwyddion gegeben werden. Das Programm wurde ursprünglich für die Datenanalyse und -visualisierung von Rasterelektronenmikroskopen entwickelt. Es eignet sich aber genauso für alle Arten von Datenanalyse und Bildbearbeitung. Vielleicht begegnet es Ihnen ja noch öfter. Für den Fourieroptikversuch werden wir vor allem die Bestimmung von Intensitätsprofilen nutzen.

XII.1 Bestimmung des Intensitätsprofils des Beugungsbildes

Laden Sie eines Ihrer gespeicherten Beugungsbilder, das Sie auswerten möchten. Das ist über den Menüpunkt „Daten“ möglich. Im Importdialog müssen Sie die Option „Just use pixels“ aktivieren. Anschließend können Sie den Importdialog mit „OK“ quittieren.

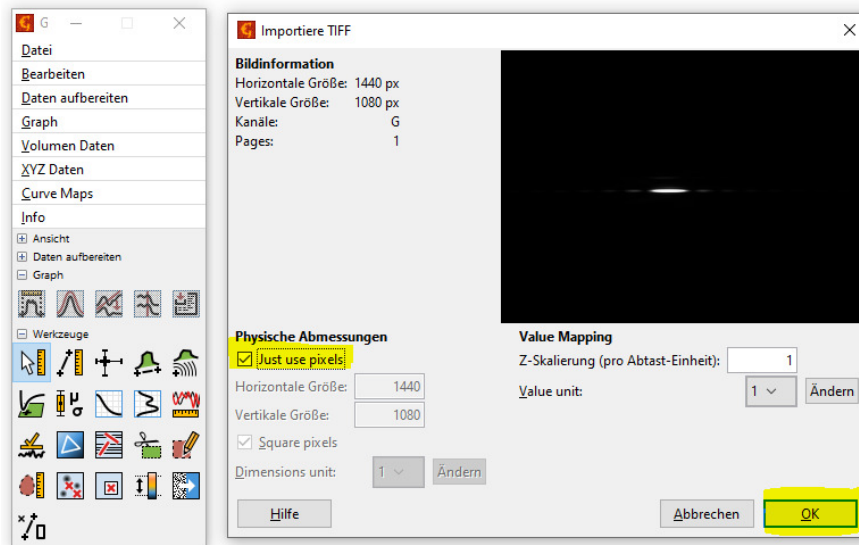


Abbildung 41: Import eines Bildes in Gwyddion

Das Bild wird nun in einem neuen Fenster geöffnet. Um nun ein Intensitätsprofil zu generieren und zu vermessen, wählen Sie unter dem Menüpunkt „Werkzeuge“ den Punkt „Extrahiere Profile entlang beliebiger Linien“. Ziehen Sie anschließend eine Linie horizontal durch die Beugungsstruktur des geladenen Bildes. Sollten Sie nicht direkt alle Beugungsordnungen treffen, können Sie die Lage der Linie noch anpassen. Es öffnet sich nun ein neues Fenster, das das Intensitätsprofil entlang der gezogenen Linie zeigt. Sollte das Intensitätsprofil nicht

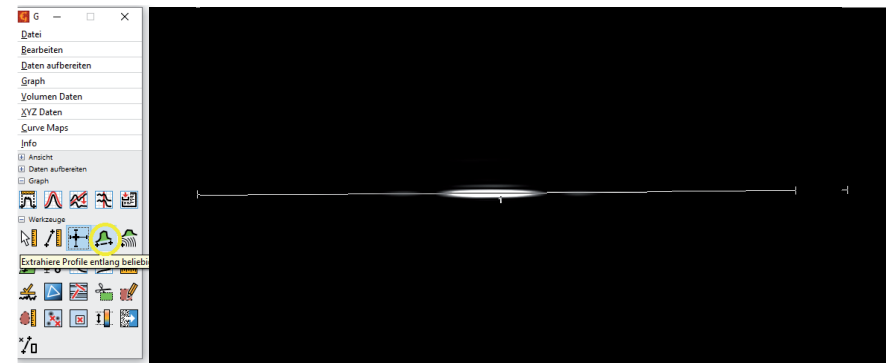


Abbildung 42: Erstellung des Intensitätsprofils des Beugungsbild

symmetrisch sein, müssen Sie die gezogene Linie anpassen. Versuchen Sie diese Linie leicht zu kippen und beobachten Sie den Effekt. Wählen Sie für die Anzahl der zu mittellenden Zeilen unter dem Einstellparameter „Thickness:“ einen Pixel aus. Sind Sie mit dem Intensitätsprofil zufrieden, klicken Sie den „Anwenden“ - Button.

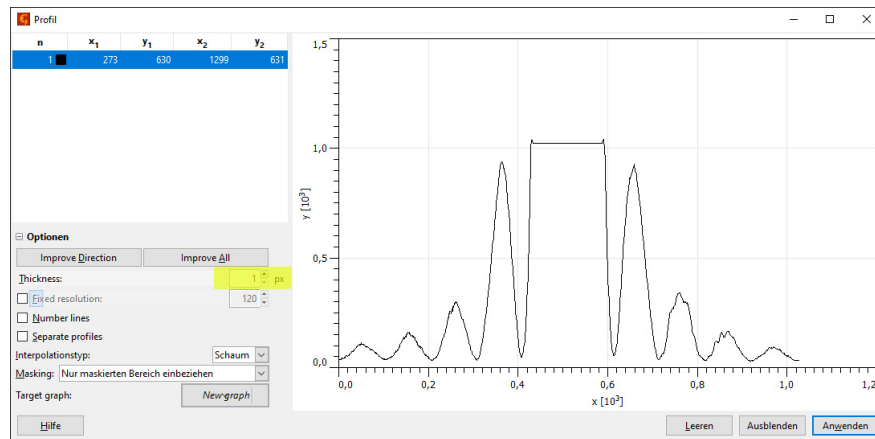


Abbildung 43: Erstellen des Intensitätsprofils

Das Intensitätsprofil öffnet sich in einem neuen Fenster. Durch einen Rechtsklick öffnet sich ein Kontextmenü, das Ihnen viele weitere Bearbeitungsmöglichkeiten bietet. Über dieses Menü können Sie das Intensitätsprofil sowohl als Bild als auch als Textdatei exportieren.

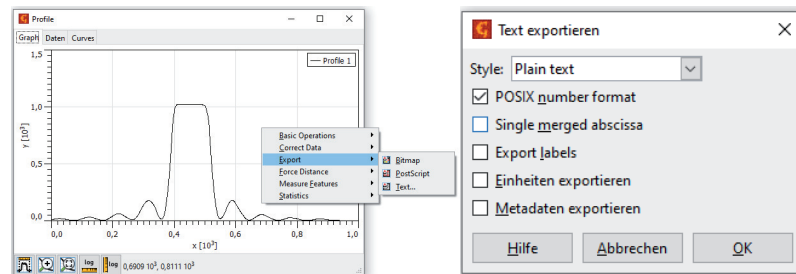


Abbildung 44: Kontextmenü und Speicheroptionen

Im Intensitätsprofilfenster können Sie die Lage und die Höhe der Maxima und Minima mit der Maus ausmessen. Die Koordinaten werden unten im Fenster angezeigt. Um die Genauigkeit zu erhöhen ist es sinnvoll, den entsprechenden Bereich zu vergrößern. Das ist über das Lupensymbol unten links im Fenster möglich. Es ist auch möglich über den Kontextmenüpunkt „Measure Featu-

res“- „Find Peaks...“ die Lage der Maxima und Minima automatisch zu bestimmen. Es öffnet sich ein das Fenster „Graph Peaks“. Die gefundenen Werte werden

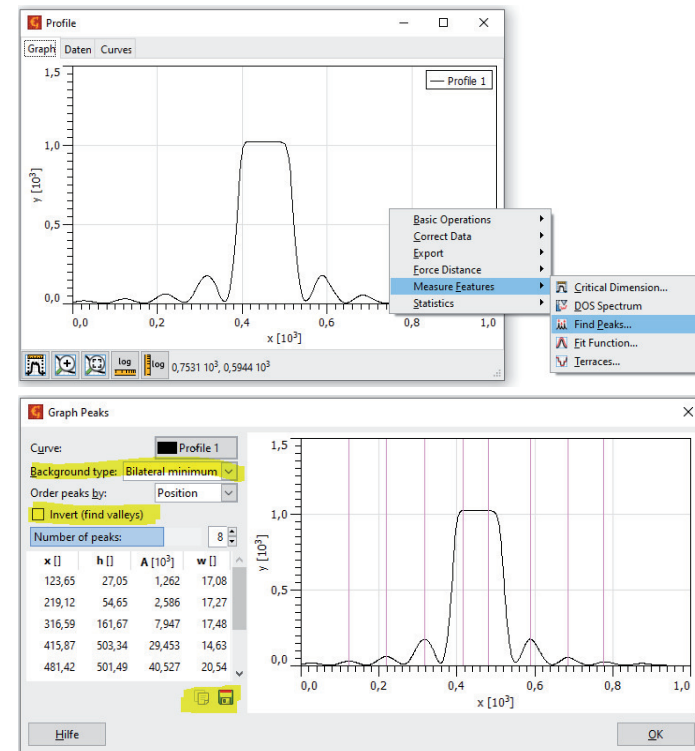


Abbildung 45: Automatisches Vermessen der Maxima und Minima

in einer Tabelle links im Fenster dargestellt. Für die Auswertung sind die x-Positionen der Peaks und deren Höhe von Interesse. Die angezeigte Höhe der Peaks ist abhängig von der getroffenen Einstellung des Punktes „Background type:“. Die Einstellung „Zero“ gibt die Höhe der Peaks in Bezug auf die Nulllinie wieder, während die Einstellung „Bilateral minimum“ die Höhe über dem Peakhintergrund angegeben. Der Peakhintergrund wird dabei aus den Minima rechts und links des jeweiligen Peaks berechnet. Die Tabelle können Sie entweder in die Zwischenablage kopieren oder als Textdatei speichern. Um die Lage der Minimas zu bestimmen, können Sie bei „Invert“ einen Hacken setzen.

XII.2 Bestimmung des Intensitätsprofils des Objektbildes

Betrachtet man das Objektbild, so stellt man fest, dass diese störenden Strukturen überlagert sind. Der Laserstrahl selbst hat kein homogenes Intensitätsprofil, sondern weist selbst eine überlagerte Beugungsstruktur auf. Bildet man das Beugungsobjekt auf die Kamera ab, so sind diesem die Beugungsstrukturen des Lasers überlagert.

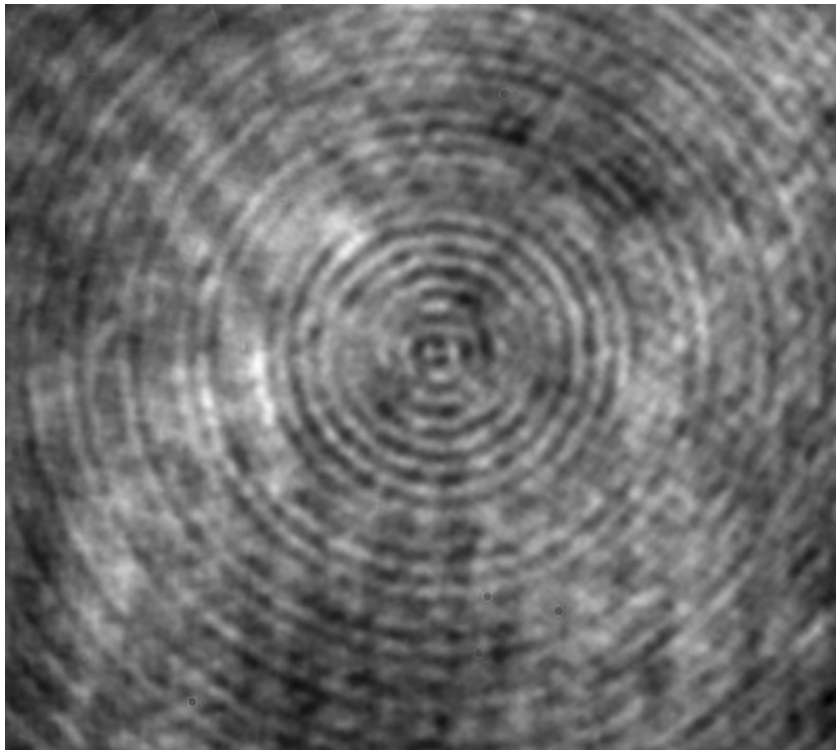


Abbildung 46: Beugungsstrukturen des Laserstrahls

Öffnen Sie in Gwyddion beispielsweise ein aufgenommenes Objektbild des Einfachspalt. Die störenden Strukturen können durch die Anwendung eines Filters auf die Fouriertransformierte des aufgenommenen Bildes entfernt werden. Wählen Sie dazu im Menüpunkt „Daten aufbereiten“ unter „Correct Data“ das Werkzeug „2D FFT Filtering...“ aus.

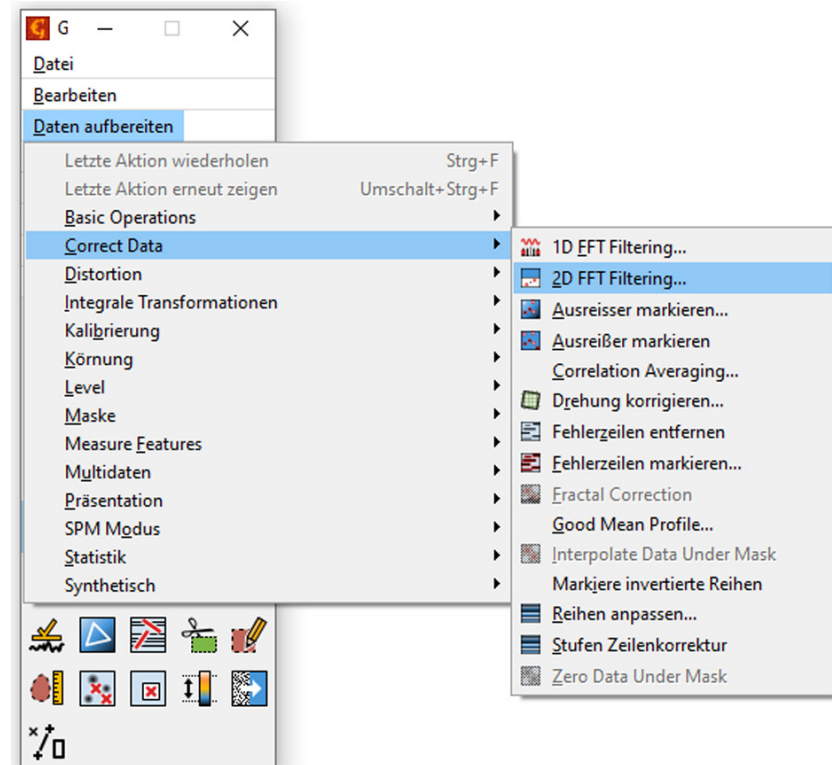


Abbildung 47: Auswahl des 2D FFT Filterwerkzeugs

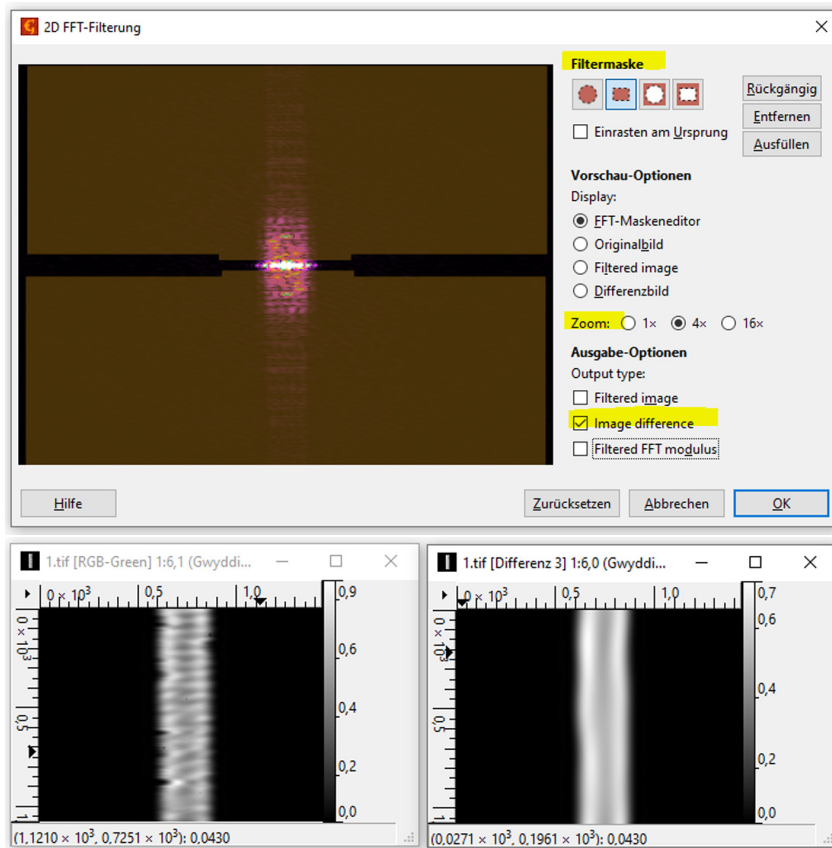


Abbildung 48: Oben: 2D FFT Fenster zur Bearbeitung des anzuwendenden Filters – Unten links: Bild vor Filterung – Unten rechts: Bild nach Anwenden des erstellten Filters

Sie sehen jetzt die Fouriertransformierte des Objektbildes. Die Spaltinformation befindet sich in x- Richtung im Zentrum. Sie benötigen nur diese Information des Bildes. Alles andere sind Störungen, die Sie mit einer Maske auswählen können. Fangen Sie mit der größten Zoomstufe an und maskieren Sie alle Störungen. Auf keinen Fall etwas in x-Richtung durch das Zentrum maskieren. Danach die Zoomstufe verkleinern und erneut maskieren. Bei „Ausgabe-Optionen“ wählen

Sie „Image difference“. Klicken Sie schließlich auf „OK“. Es erscheint ein neues, gefiltertes Bild.

Verwenden Sie im gefilterten Bild nun das Werkzeug „Extrahiere Profile entlang beliebiger Linien“ (Abbildung ??).

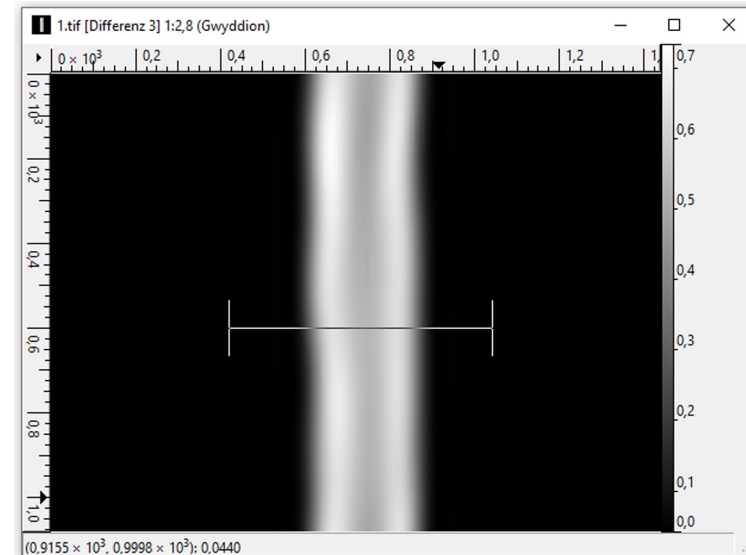


Abbildung 49: Objektbild des Einfachspaltes

Um noch Reste der störenden Strukturen möglichst auszumitteln, können Sie im sich öffnenden Fenster nach erfolgter Platzierung der Profillinie die „Thickness“ erhöhen. Damit wird die Intensität über mehrere Pixelzeilen gemittelt. Versuchen Sie durch Verschieben der Profillinie und durch verschiedene „Thickness“-Werte ein möglichst symmetrisches Intensitätsprofil zu finden. Sie können anschließend das Profil in Gwyddion vermessen oder die Daten direkt exportieren.

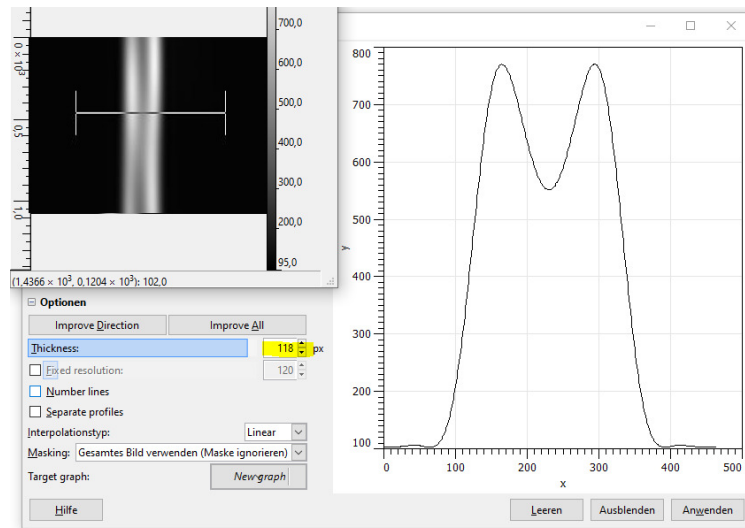


Abbildung 50: Mitteln der Intensitätswerte über mehrere Pixelzeilen.

Versuch 234 Lichtquellen und Gitterspektroskopie



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Gitterspektrometer, Ocean Optics USB4000
- verschiedene Lichtquellen: LED, LASER, Energiesparlampe, Glühlampe, Natriumdampflampe
- PC mit OceanView und Jupyter Notebook

II Literatur

- Atomic Spectra Database: https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html
- Homepage des Praktikums: <http://www.physikpraktika.uni-hd.de>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum: <https://www.phys.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Plancksches Strahlungsgesetz, Sonnenspektrum, Fraunhofer-Linien, Gitterspektrometer, Wasserstoffspektrum, Atomspektren, Rayleigh-Streuung. Verständnisfragen:

1. Vergleichen Sie das Spektrum einer Halogenlampe mit dem einer Gasentladungslampe. Worauf beruht die jeweilige Lichtemission?
2. Warum kann das Licht eines reinen Temperaturstrahlers niemals grünlich wirken?
3. Warum zeigt das auf der Erdoberfläche gemessene Sonnenspektrum deutlich Abweichungen von der Intensitätsverteilung eines schwarzen Strahlers?
4. Nach welchen Prinzipien lässt sich mit einer LED weißes Licht erzeugen?
5. Nach welchem Prinzip funktioniert ein Gitterspektrometer? Wie hoch ist die spektrale Auflösung?
6. Warum ist der Himmel tagsüber blau, am Morgen und am Abend jedoch rot?

IV Aufgaben

1. Aufnahme des Sonnenlichtspektrums bzw. des gestreuten Himmelslichts hinter einer Fensterscheibe und ohne Fensterscheibe. Zuordnung von starken Fraunhoferlinien im Spektrum. Messung der Absorption von Fensterglas durch Vergleich des Sonnenlichts ohne und mit Glasscheibe.

2. Wenn möglich: Aufnahme des direkten Sonnenlichts.
3. Aufnahme der Spektren von Lichtquellen und deren Vergleich: Sonnenlicht, Glühlampe, LED's, Energiesparlampe.
4. Aufnahme des Spektrums einer Natriumlampe mit hoher Auflösung. Zuordnung der Serienübergänge der Hauptserie und von zwei Nebenserien. Bestimmung der vom Drehimpuls abhängigen Korrekturen der Energieniveaus im Natrium.

V Grundlagen

V.1 Temperaturstrahler

Jeder Körper, dessen Temperatur größer als 0 K ist, sendet elektromagnetische Strahlung aus, deren Intensität von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen $\epsilon = 1$. Die Intensitätsverteilung der Strahlung die von einem schwarzen Strahler ausgeht, wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (1)$$

wobei M_λ die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement dA im Wellenlängenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$ in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 2 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt. Bei reinen Temperaturstrahlern hängt die spektrale Intensitätsverteilung nur von der Temperatur ab. Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich das Intensitätsmaximum zu kleineren Wellenlängen. Quantitativ wird dies durch das Wiensche Verschiebungsgesetz beschrieben:

$$\lambda_{max} = \frac{2897,8 \mu m \cdot K}{T} \quad (2)$$

In der Technik werden Lichtquellen durch die sogenannte Farbtemperatur charakterisiert. Bei einer Temperatur von 0 K erscheint jeder Körper absolut

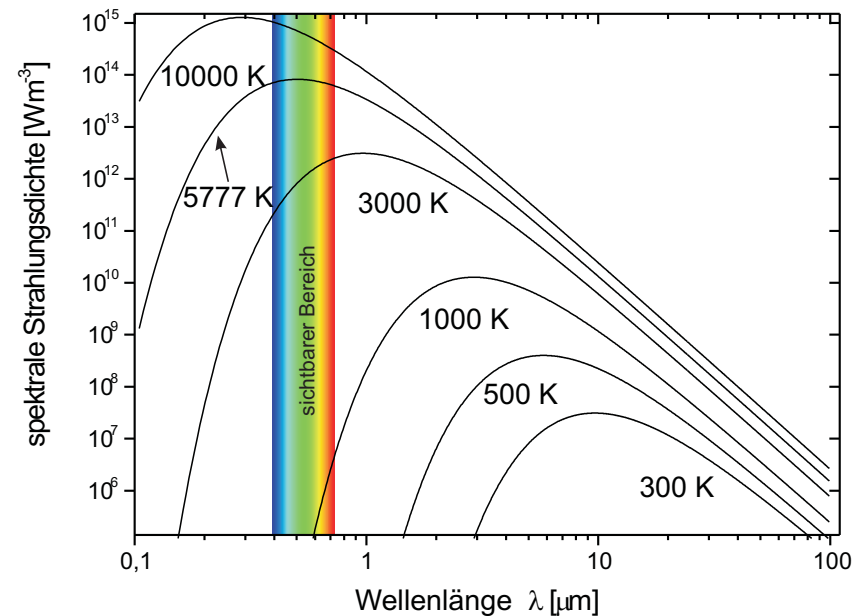


Abbildung 2: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

schwarz. Mit zunehmender Erwärmung wird irgendwann rotes Licht emittiert. Eine weitere Temperaturerhöhung bewirkt, dass zusätzlich Grünanteile emittiert werden. Diese Grünanteile mischen sich mit den bereits vorhandenen Rotanteilen, so dass das ausgesendete Licht orange bis gelblich erscheint. Bei einer Temperatur von ungefähr 5500 K werden alle Wellenlängen des sichtbaren Bereichs mit ungefähr der gleichen Intensität emittiert und das Licht wirkt weiß. Eine weitere Erwärmung bewirkt, dass vermehrt Blauanteile ausgesendet werden. Die Farbe ändert sich dann von hellblau über blau zu violett. Umgangssprachlich wird Licht mit einem hohen Blauanteil auch als Kaltlicht und Licht mit hohem Rotanteil als Warmlicht bezeichnet.

Während das direkte Sonnenlicht „warm“ ist, ist das gestreute Sonnenlicht (Himmelslicht) bläulich kalt. Ursache dafür ist die starke Frequenzabhängigkeit

des Wirkungsquerschnitts bei der Streuung des Sonnenlichts (Rayleigh-Streuung). Da der Wirkungsquerschnitt proportional zur vierten Potenz der Frequenz des Lichts ist, wird blaues Licht etwa 16-fach stärker gestreut als rotes Licht. Das Sonnenlicht besitzt ein kontinuierliches Spektrum, das von vielen Absorp-

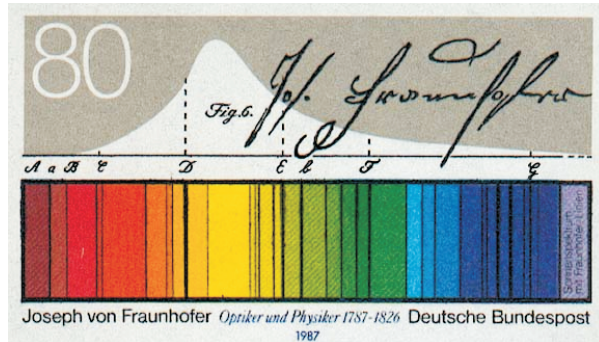


Abbildung 3: Zum 200. Geburtstag von Joseph Fraunhofer brachte die Deutsche Bundespost 1987 eine Briefmarke heraus. Dargestellt ist das Sonnenspektrum mit den nach Fraunhofer benannten Absorptionslinien der Atmosphäre.

tionlinien durchzogen ist, den „Fraunhoferlinien“. Die Absorption findet zum einen direkt in der Sonnenatmosphäre statt. Zum anderen auch in der Erdatmosphäre. Insbesondere Wasserdampf, Sauerstoff und Kohlendioxid führen zu ausgeprägten Absorptionslinien bzw. Absorptionsbanden. Ozon absorbiert breitbandig im Bereich von 200 bis 700 nm und filtert somit einen großen Teil der UV-Strahlung heraus. Das von Fraunhofer selbst kolorierte Spektrum mit den wichtigsten Linien ist in Abbildung 3 gezeigt. Im Fraunhoferspektrum wurde neben bekannten Linien wie z.B. die der Balmerreihe, erstmals eine gelbe Linie entdeckt, die keinem bekannten Element zugeordnet werden konnte. Dieses wurde daher Helium genannt (von helios = Sonne). Leider ist diese Linie mit unserem Spektrometer nicht nachzuweisen, da sie von der starken Doppellinie des Natriums überlagert wird.

V.2 Nichttemperaturstrahler

Die Lichterzeugung bei Nichttemperaturstrahlern beruht nicht auf Wärmestrahlung sondern auf die Anregung von bestimmten Atomzuständen in Gasen oder Festkörpern oder durch Rekombination von Elektron-Loch Paaren

in Halbleitern. Hierzu zählen Gasentladungslampen wie z.B. Leuchtstoffröhren, Leuchtdioden, oder LASER. Solche Lichtquellen haben im Gegensatz zu den Temperaturstrahlern ein diskretes Spektrum. Die spektrale Zusammensetzung des emittierten Lichts hängt bei den Gasentladungslampen von dem verwendeten „Leuchtgas“ (Metалldämpfe, Gase) ab. Von besonderer Bedeutung ist Quecksilber, welches in Leuchtstoffröhren und Energiesparlampen verwendet wird. Das Licht einer reinen Quecksilberdampflampe erscheint bläulich bis lila. Die Intensität im sichtbaren Wellenlängenbereich ist gering. Der Hauptanteil wird im UV-Bereich emittiert. Um die Intensität des ausgesendeten Lichts im sichtbaren Bereich zu erhöhen, werden die Lampen mit einem Leuchtstoff (Leuchtstoffröhren) beschichtet. Bei Bestrahlung mit UV-Licht fluoresziert der Leuchtstoff, wobei das Fluoreszenzlicht im sichtbaren Bereich liegt. Als Beispiel einer Gasentladungslampe, werden wir im nächsten Kapitel, das Spektrum einer Natriumlampe detailliert untersuchen.

Die Emission von Licht bei Leuchtdioden (LED = Light Emitting Diode) beruht auf der Rekombination von Elektron- Loch Paaren in einem pn-Übergang. Bei den sogenannten direkten Halbleitern wird dabei ein Photon emittiert. Wichtige Halbleitermaterialien sind z.B. GaAs (IR), AlGaAs (rot, IR), GaAsP (rot, orange, gelb), GaP (grün), SiC (blau). Mittlerweile gibt es auch Leuchtdioden die weißes Licht aussenden. Solche LED's bestehen entweder aus drei separaten LED's (RGB= Rot Grün Blau), die sich additiv zu weißem Licht mischen oder werden aus blauen LED's hergestellt, die - ähnlich wie Leuchtstoffröhren - mit einer zusätzlichen Fluoreszenzschicht beschichtet sind

Leuchtdioden besitzen im Vergleich zu anderen Lampen, einen sehr hohen Wirkungsgrad. Bei einer herkömmlichen Glühlampe beträgt dieser etwa 5 %, bei Leuchtstofflampen ungefähr 25 % und bei Leuchtdioden bis zu 70 %.

V.3 Das Natriumspektrum

Alkaliatome haben ein Leuchtelektron und besitzen daher „wasserstoffartige“ Spektren. Das Leuchtelektron im Natrium sieht nicht die volle Kernladung, sondern näherungsweise ein vom Neonrumpf mit 10 Elektronen teilweise abgeschirmtes kugelsymmetrisches Potential $V(r)$, das sich in Kernnähe dem Coulombpotential des Kerns

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

und für große Radien dem Wasserstoffpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

annähert. Da das Potential kein Coulombpotential mehr ist, wird die 1-Entartung des Wasserstoffspektrums aufgehoben. Die Energieniveaus hängen nicht mehr nur von der Hauptquantenzahl n ab sondern auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl l . In guter Näherung können die Energierterme in der Form

$$E_{n,l} = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{(n - \Delta_{l,n})^2} \quad (5)$$

geschrieben werden, wobei die Korrektur $\Delta_{l,n}$ nur wenig von n abhängt und daher näherungsweise als Δ_l geschrieben werden kann. Anschaulich ist klar, dass s-Elektronen im Mittel näher am Kern sind als p-Elektronen und dass d-Elektronen im Mittel große Abstände vom Kern und den anderen Elektronen haben. Zu einem festen Wert der Hauptquantenzahl n liegt also das s-Niveau am tiefsten und das d-Niveau am höchsten.

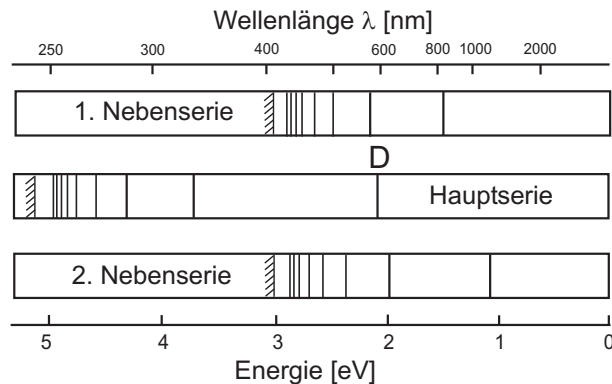


Abbildung 4: Spektren der Natriumserien. Diese sind im Experiment natürlich überlagert. Zur Auswertung müssen die beobachteten Linien den Serien zugeordnet werden.

Das Energiespektrum mit den wichtigsten Übergängen ist in Abbildung 5 gezeigt. Das Valenzelektron ist im Grundzustand im 3s-Zustand. Die Hauptserie entspricht den Übergängen $np \rightarrow 3s$, also zum Grundzustand. Die bekannteste Linie ist das gelbe Dublett bei 589 nm. Zum 3p-Zustand führen die beiden

Nebenserien $nd \rightarrow 3p$ (1. Nebenserie) und $ns \rightarrow 3p$ (2. Nebenserie), die ebenfalls Linien im hier beobachtbaren Spektralbereich liefern. Das beobachtbare Spektrum ist in Abbildung 4 skizziert.

Welche Energieniveaus in der Na-Lampe durch die elektrische Entladung mit welcher Häufigkeit angeregt werden, hängt vom Druck und der Feldstärke in der Gasentladung ab und diese ist in der Lampe nicht konstant. Das Spektrum hängt daher davon ab, welcher Teil der Gasentladung in das Spektrometer abgebildet wird.

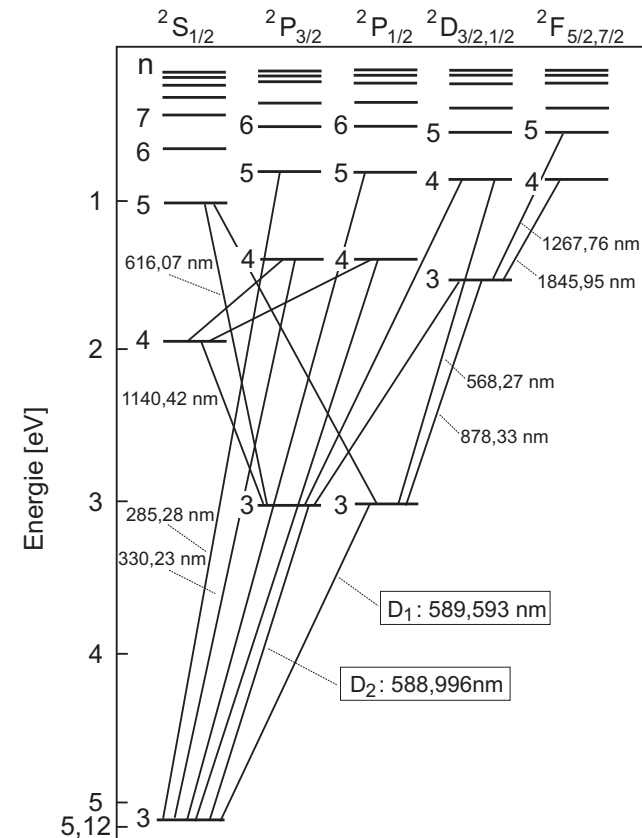


Abbildung 5: Energieschema und Photonübergänge im Natriumatom (Grotrian-diagramm).

V.4 Bedienung des Spektrometers und der Software

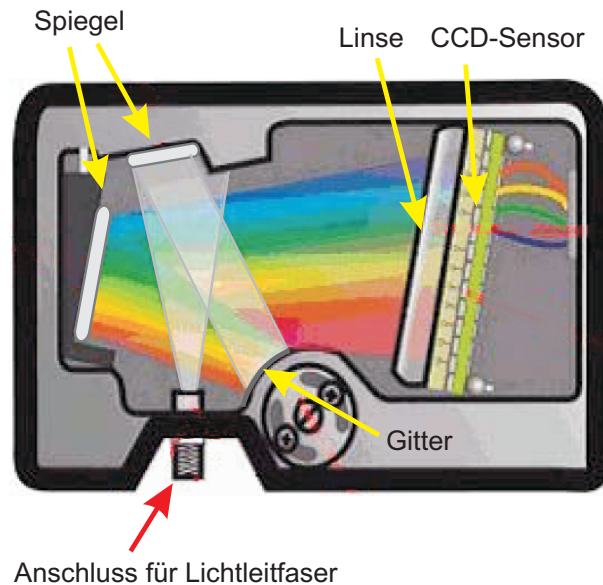


Abbildung 6: Strahlengang im Gitterspektrometer

Im Versuch wird ein computergesteuertes Gitterspektrometer (Abbildung 6) eingesetzt, das es erlaubt, den Spektralbereich einer Lichtquelle von 180 nm bis 950 nm zu registrieren. Die zu untersuchende Lichtquelle wird über ein Objektiv und einer Lichtleitfaser in das Spektrometer eingekoppelt und über ein optisches Gitter auf eine CCD- Zeile mit 3648 Pixel abgebildet. Dabei entspricht ein Pixel einem Wellenlängenintervall von 0,21 nm. Die Auflösung des Spektrometers beträgt etwa 1 nm. Das verfügbare Datenerfassungsprogramm **OceanView** erlaubt es den Dunkelstrom zu messen und bei der Datenaufnahme automatisch abzuziehen. Zur Reduzierung von Fluktuationen kann automatisch über viele Scans gemittelt werden. Die Auswertung der Spektren erfolgt mit dem Programm **Python**.

Starten Sie das Programm **OceanView** vom Desktop aus. Dabei sollte die Datenaufnahme des Spektrometers im Scope-Mode **S** automatisch gestartet werden. In diesem Modus wird das Spektrum mit der angegebenen Integrationszeit kontinuierlich gemessen und dargestellt. Sie sehen dann ein Fenster gemäß Ab-

bildung 7.

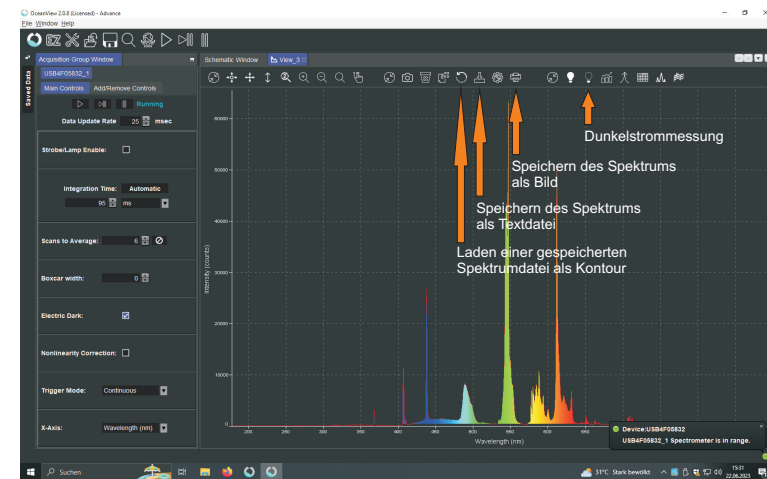


Abbildung 7: Oberfläche des Datenerfassungsprogramms

Messung im Scope- Modus

Im Scope- Modus werden kontinuierlich Spektren aufgenommen und grafisch dargestellt. Schalten Sie eine Lichtquelle ein und richten Sie das Objektiv auf die Lichtquelle aus. Bei Bewegung sollten Sie beobachten, wie sich das angezeigte Spektrum ändert. Das Maximum des angezeigten Spektrums sollte bis mindestens 2/3 des Skalenbereichs gehen. Fixieren Sie das Objektiv an der Stativstange. Die Anpassung der gewünschten Intensität erfolgt über den Abstand des Sammelobjektivs von der Lichtquelle, die Irisblende und letzten Endes die Auswahl der Integrationszeit. Reduzieren Sie die Integrationszeit, wenn die Intensität zu hoch ist, d.h. das Spektrum gesättigt ist, vergrößern Sie die Integrationszeit oder verbessern Sie die Lichtsammlung, wenn sie zu klein ist. Sie können das Rauschen des Spektrums verringern, indem Sie über mehrere Einzelmessungen mitteln. Dazu im Feld Scans für Mittelwert die Zahl der Einzelmessungen eintragen. Die Gesamtzeit der Datenaufnahme sollte 4 Sekunden nicht übersteigen. Über die Buttons **+** **↓** kann der angezeigte Ausschnitt des Spektrums angepasst werden. Von links nach rechts haben die Buttons folgende Funktionen: Rückkehr zur ursprünglichen Ansicht, - und vertiakles Skalieren der sichtbaren Peaks im vergrößerten Ausschnitt. Über den Button **🔍** kann per Mausdrag ein

zu vergrößernder Bereich ausgewählt werden. Um die Anfangs- und Endwerte für Wellenlänge und Intensität direkt eingeben zu können, muss der Button  gedrückt werden. Im sich öffnenden Dialogfenster können die gewünschten Werte eingegeben und mit „Apply“ angewendet werden.

Speichern der Spektren und Darstellung gespeicherter Spektren

Speichern Sie Ihre gemessenen Spektren sowohl als .txt-Datei als auch als Bild. Die gespeicherten Dateien finden Sie über den auf dem Desktop verlinkten Ordner. Die Dateien werden nach dem aktuellen Datum benannt. Benennen Sie die Dateien deshalb direkt nach Aufnahme um, um sie später zuordnen zu können. Die Buttons für das Speichern sind die folgenden:   . Das erste Icon ermöglicht das Laden von gespeicherten Spektren in das Viewfenster. Das zweite Icon speichert das aktuell gezeigte Livespektrum als Textdatei und das dritte Icon öffnet den Speichereinstellungsdialog. Dort kann auch der Speicherpfad angepasst werden.

Wenn Sie mehrere gespeicherte Spektren laden, werden diese als farbige Konturlinie angezeigt. Für jedes neu geladene Spektrum wird eine neue Farbe automatisch gewählt.

VI Durchführung des Versuchs

Das Deckenlicht im Versuchsraum dürfen während den Messungen nicht eingeschaltet sein! Sie werden sonst immer durch Streulicht störende Linien beobachten. Die Lichtleitfaser vom Objektiv zum Spektrometer darf auf keinen Fall geknickt werden.

Aufgabe 1: Aufnahme des Sonnenspektrum

Nehmen Sie folgende Spektren auf:

- Himmelslicht bei geöffneten Fenster. Falls die Sonne scheint richten Sie das Objektiv möglichst zum blauen Himmel aus.
- Himmelslicht hinter Fensterglas.
- Falls die Sonne scheint, nehmen Sie auch noch das direkte Sonnenlicht auf.

Das USB-Kabel des Spektrometers ist lang genug, dass Sie den Aufbau mit der

Sammellinse und der Glasfaser vor das Fenster stellen können. Achten Sie darauf, dass die Glasfaser nicht geknickt wird. Das würde die Faser sofort zerstören!

Aufgabe 2: Qualitativer Vergleich der Spektren verschiedener Leuchtmittel

Die folgenden Messungen werden nur qualitativ durchgeführt. Nehmen Sie für folgende Lichtquellen das Spektrum auf:

- Glühlampe
- Halogenlampe
- Energiesparlampe
- verschiedene LED's
- Laser

Speichern Sie für jedes Leuchtmittel das Spektrum ab. Ändern Sie nach Möglichkeit direkt nach Speichern den Dateinamen, damit Sie die Dateien später den Leuchtmitteln zuordnen können. Um später die Leuchtmittel zu vergleichen, können Sie auch direkt alle aufgenommenen Spektren in OceanView laden und ein kombiniertes Bild aufnehmen, dass Sie für Ihre Auswertung nutzen können.

Aufgabe 3: Aufnahme der Spektrallinien kleiner Intensität einer Natriumlampe

Schließen Sie die Spektrallampen niemals direkt an die Steckdose an sondern nur an das Vorschaltgerät!

Schließen Sie die Natriumlampe an das Vorschaltgerät (Drossel) an und schalten Sie die Drossel ein. Die Lampe braucht einige Zeit zum Zünden und bis sie auf Betriebstemperatur ist. Richten Sie das Objektiv auf die Lichtquelle aus. Es ist sofort klar, dass die gelbe Natriumlinie alle anderen Linien weit überstrahlt. Optimieren Sie den Aufbau durch das Ausrichten des Objektivs genau auf die Natriumlampe. Die beste Ausrichtung erkennen Sie daran, dass die Peaks im Scopemodus maximal werden bzw. schon in Sättigung gehen. Ist das der Fall können Sie die Integrationszeit herabsetzen oder die Blende des Objektivs etwas schließen. Da Sie in diesem Aufgabenteil die schwächeren Spektrallinien im Bereich von 400 nm bis 540 nm aufnehmen sollen, ist es wichtig, dass

möglichst viel Licht der Lampe in die Faser eingekoppelt wird. Dafür ist eine gute Ausrichtung wichtig. Durch vorsichtiges Verschieben des Objektivs vor der Lampenöffnung können Sie den optimalen Punkt für die beste Einkopplung in die Faser finden, erkennbar an der maximal möglichen Höhe der Spektralpeaks. Wählen Sie geeignete Einstellung der Integrationszeit, um die Spektrallinien im genannten Bereich möglichst deutlich erkennen zu können. In Abbildung 8 ist das Spektrum beispielhaft dargestellt.

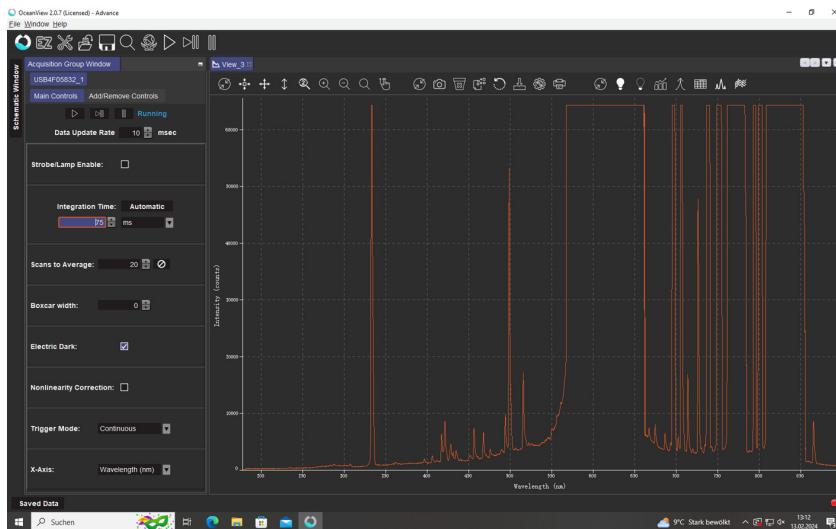


Abbildung 8: Beispielhafte Einstellungen um die kleinen Spektrallinien zwischen 400 und 540 nm möglichst gut messen zu können.

Mit dem Zoomwerkzeug  können Sie den zu vergrößernden Bereich im sich öffnenden Dialogfenster spezifizieren. Der Bereich für die Wellenlänge ergibt sich aus dem Bereich, der untersucht werden soll. Die maximale Intensität können Sie anhand des größten Peaks im Bereich abschätzen. Da die Spektrallinie bei ca. 500 nm die anderen, kleineren Spektrallinien in diesem Bereich leicht überstrahlt, ist es sinnvoll ein Spektrum aufzunehmen, in dem die 500 nm nicht in Sättigung ist. Für eine weitere Aufnahme sollten die Einstellungen und der vergrößerte Bereich so gewählt werden, dass die kleinen Linien möglichst gut zu sehen sind. Dafür kann dann auch die Linie bei 500 nm in Sättigung gehen. Wählen Sie für die beiden Aufnahmen die Zahl der Scans zur Mittelwertbildung

so, dass sich eine Gesamtaufnahmezeit von etwa 4 Sekunden ergibt. Speichern Sie für beide genannten Einstellungen jeweils eine Aufnahme als Textdatei.

Aufgabe 4: Aufnahme der Spektrallinien um die D-Linie einer Natriumlampe

Schauen Sie sich das gesamte Spektrum im Scopemodus an und reduzieren Sie die maximale Intensität der D-Linie durch das Reduzieren der Integrationszeit und Schließen der Irisblende so weit, dass Sie bei ca. 570 und 615 nm jeweils eine Spektrallinie beobachten können. Versuchen Sie die Einstellungen so zu optimieren, dass diese beiden Linien gut erkennbar sind ohne von der D-Linie „verschluckt“ zu werden. Speichern Sie auch hier eine Aufnahme als Textdatei ab.

Ändern Sie abschließend noch die Einstellungen bzgl. Integrationszeit und Blendenöffnung so, dass auch die D-Linie nicht mehr in Sättigung ist und speichern abschließend auch dafür noch eine Aufnahme als Textdatei ab.

Aufgabe 5: Aufnahme der Spektrallinien im Bereich von 650 bis 850 nm

Nehmen Sie auch für den Spektralbereich zwischen 650 und 850 nm ein Spektrum auf. Wählen Sie hier den Zoomausschnitt so, dass nur der betrachtete Bereich angezeigt wird und wählen Sie die Integrationszeit und die Blendenöffnung so, dass die größten sichtbaren Peaks nicht in Sättigung sind. Speichern Sie auch dieses Spektrum als Textdatei ab.

VII Auswertung

Lesen Sie unbedingt den Anhang zur Auswertung in Jupyter Notebook komplett durch, da dort alle notwendigen Formeln genannt werden!

Zu Aufgabe 1: Berechnen Sie aus den Spektren des Himmelshintergrundes mit und ohne Glas die Absorption von Glas. Was können Sie über die Absorption von Glas sagen? Identifizieren Sie die Linien der Balmer serie des Wasserstoffs und versuchen Sie weitere Fraunhoferlinien im Sonnenspektrum (direkt oder indirekt) zu finden. Markieren Sie diese im Plot des Spektrums und vergleichen Sie die Werte mit den Literaturwerten.

Zu Aufgabe 2: Erstellen Sie ein Diagramm, in das Sie alle gemessenen Spektren der untersuchten Leuchtmittel einfügen. Das können Sie direkt in OceanView

erstellen oder in Jupyter Notebook. Vergessen Sie nicht die einzelnen Linien des Leuchtmittels zuzuordnen und entsprechend zu beschriften, falls Sie das Diagramm mit Jupyter erstellen. Schätzen Sie für jedes Leuchtmittel die mittlere Wellenlänge ab und diskutieren Sie die Ergebnisse. Nach welchem Prinzip wird das Licht einer weißen LED erzeugt? Welche Lampen sind „warm“ oder „kalt“?

Zu Aufgabe 3, 4 und 5: Vermessen Sie die aufgenommenen Spektrallinien der Natriumlampe im Bereich von 300 bis 850 nm, indem Sie allen gemachten Aufnahmen auswerten. Bestimmen Sie die Wellenlänge der einzelnen Peaks und deren Halbwertsbreite. Bestimmen Sie daraus den Fehler der gemessenen Wellenlängen. Berechnen Sie die theoretisch zu erwartenden Wellenlängen der Hauptserie $mp \rightarrow 3s$ für $m = 4$ und $m = 5$ sowie der 1. Nebenserie $md \rightarrow 3p$ für $m = 0$ bis $m = 12$ und die der 2. Nebenserie $ms \rightarrow 3p$ für $m = 4$ bis $m = 9$ aus und ordnen Sie Ihre gemessenen Peaks den Serien zu. Die notwendigen Formeln finden Sie im Anhang.

Vergleichen Sie die theoretischen mit dem von Ihnen bestimmten Wellenlängen. Erstellen Sie für jede Serie eine Tabelle mit den berechneten und den gemessenen, zugeordneten Wellenlängen.

Bestimmen Sie ebenfalls aus den gemessenen Wellenlängen die die Rydbergenergie E_{Ry} , die Energie E_{3p} des 3p Grundzustandes sowie die Korrekturfaktoren Δ_d und Δ_s .

VIII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus.

Auswertung des Himmelhintergrundes mit und ohne Glas

Kopieren Sie alle Ihre Messung (Textdateien) in den Ordner **data** auf dem Desktop. Schauen Sie sich die Messung des Himmellichts an. Die Datei besitzt 17 Headerzeilen und besteht aus 2 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Kommas verwendet. Die letzte Zeile ist eine Kommentarzeile die mit dem Zeichen **>** beginnt. Um die Daten zu importieren müssen wir alle Header- und Kommentarzeilen ausblenden und alle Kommas durch Punkte ersetzen. Das können Sie entweder direkt in der Datei machen oder von Python aus.

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Das Ersetzen der Kommas geht mit folgender Funktion:

```
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy-Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname der Messung des Himmellichts ohne Glas angeben. Desweiteren werden die erste 17 Zeilen übersprungen. Der converter ersetzt alle Kommas durch Dezimalpunkte. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `lamb_og`, `inten_og` geschrieben, `comments=>` blendet die letzte Kommentarzeile aus:

```
lamb_og, inten_og=np.loadtxt('data/himmel_o_g.txt', skiprows=17,
                             converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                             comments='>', unpack=True)
```

Analog importieren Sie die Messung des Himmellichts mit Glas.

```
lamb_mg, inten_mg=np.loadtxt('data/himmel_m_g.txt', skiprows=17,
                              converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                              comments='>', unpack=True)
```

Tragen Sie beide Spektren mit und ohne Fensterglas in ein gemeinsames Diagramm ein (Abbildung 9).

```
plt.plot(lamb_og, inten_og, label='ohne Fenster')
plt.plot(lamb_mg, inten_mg, label='mit Fenster')
plt.title('Gemessenes Sonnenspektrum mit und ohne Fenster')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.legend()
plt.grid()
plt.ylim((0,60000))
```

```
plt.xlim((250,900))
plt.savefig("figures/Himmel_m_o_G.pdf", format="pdf")
```

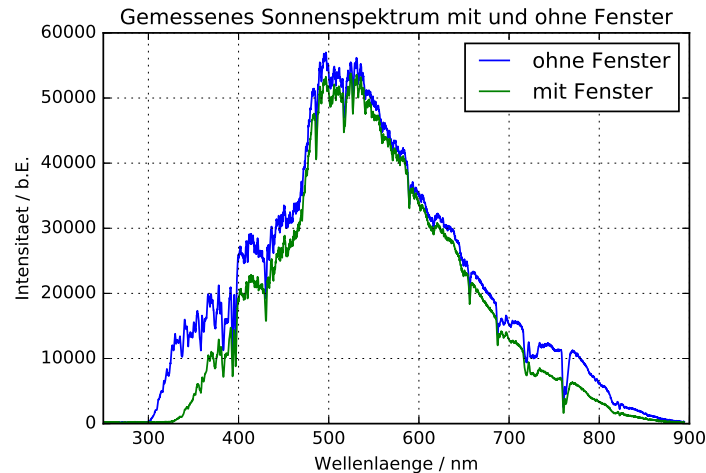


Abbildung 9: *Himmelsspektrum gemessen einmal durch ein Glasfenster und einmal direkt ohne ein Glasfenster.*

Berechnen Sie die Absorption von Glas:

$$A_{\text{Glas}} = 1 - \frac{I_{mG}(\lambda)}{I_{oG}(\lambda)}, \quad (6)$$

wobei I_{mG} die gemessene Intensität mit und I_{oG} ohne Fensterglas darstellen. Zeichnen Sie das Diagramm nur für Wellenlängen größer als 320 nm (Abbildung 10).

```
A=1-inten_mg/inten_og
```

```
plt.plot(lamb_mg, A)
plt.title('Absorption von Glas')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Absorption / b.E.')
```

```
plt.ylim((0,1))
plt.xlim((320,800))
plt.savefig("figures/Absorption_Glas.pdf", format="pdf")
```

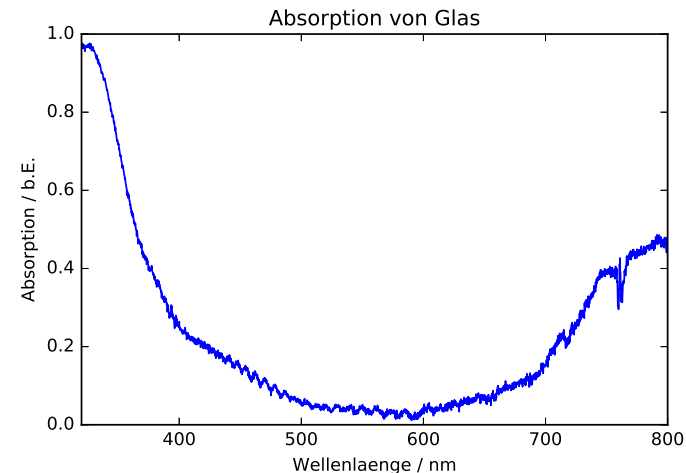


Abbildung 10: *Wellenlängenabhängigkeit der Absorption von Fensterglas.*

Speichern Sie sich beide Diagramme ab.

Bestimmung der Fraunhoferlinien aus dem Sonnenspektrum

Zeichnen Sie ein neues Diagramm des Sonnenspektrums (Direktlicht oder Himmelslicht ohne Glas) um die wichtigsten Fraunhoferlinien zu identifizieren. Schalten Sie mit `%matplotlib notebook` in den interaktiven Modus von Matplotlib. Die Diagramme werden dann in einem externen Fenster dargestellt und Sie haben die Möglichkeit zu zoomen und die Daten mit einem Cursor auszumessen. Falls die Ausgabe nicht in einem externen Fenster erfolgt, müssen Sie den Kernel neu starten (Menu → Kernel → Restart), `%matplotlib inline` durch `%matplotlib notebook` ersetzen und alle Zellen nochmals ausführen (Menu → Cell → Run All).

```
%matplotlib notebook
plt.plot(lamb_og, inten_og)
```



```
plt.title('Sonnenspektrum')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((350,800))
plt.savefig("figures/Fraunhofer.pdf", format="pdf")
```

Zeichnen Sie nur den Wellenlängenbereich von 350 nm bis 800 nm. Messen Sie zuerst die Wellenlängen der bekannten Linien der Balmerseerie von Wasserstoff. Eine Übersicht der wichtigsten Fraunhoferlinien und die Balmerseerie finden Sie im Anhang. Wo erwarten Sie die gelbe Heliumlinie? Speichern Sie auch diesen Plot ab.

VIII.1 Auswertung des Natriumspektrums

Kopieren Sie Ihre Messungen des Natriumspektrums in den Ordner `data` auf dem Desktop und importieren diese in Ihr Notebook. Tragen Sie die Daten jeweils in ein interaktives Diagramm ein.

```
lamb Og, inten Og=np.loadtxt('data/Na1.txt', skiprows=17,
                             converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                             comments='>', unpack=True)
```

```
plt.plot(lamb, inten)
plt.title('Natriumspektrum geringer Intensitaet')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.yscale('log')
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((350,800))
```

Vermessen Sie jeweils in ihren vier oder fünf gespeicherten Aufnahmen die gut sichtbaren Spektrallinien, die nicht in Sättigung sind. Importieren Sie daher alle Ihre Messungen und erstellen darauf jeweils ein Diagramm mit logarithmischer Intensitätsskala. Wählen Sie den Wellenlängenbereich für das Diagramm jeweils entsprechend dem zu untersuchenden Bereich. Schätzen Sie aus der Halbwertsbreite den Fehler ab. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine Tabelle ein. Speichern Sie jeweils die erstellen Diagramme der einzelnen Aufnahmen ab.

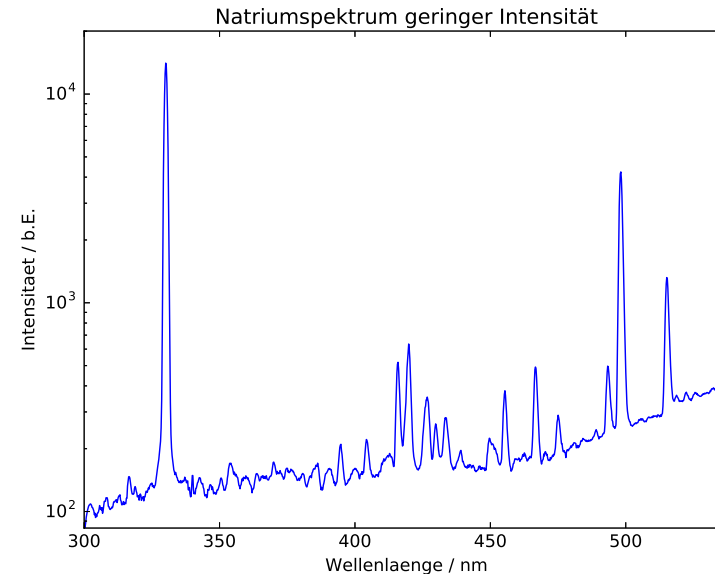


Abbildung 11: Natriumspektrum im Bereich 300 nm bis 540 nm

VIII.2 Zuordnung der gefundenen Linien zu Serien

Die gefundenen Linien müssen zunächst den drei Serien des Natriums zugeordnet werden. Berechnen Sie hierzu die ungefähren Wellenlängen der Linien für jede Serie und vergleichen Sie diese mit den beobachteten Linien.

VIII.2.1 Erwartete Linien für die 1. Nebenserie: $md \rightarrow 3p$

Bei diesen Übergängen können Sie in erster Näherung annehmen, dass der Korrekturterm für die d-Energieniveaus Null ist. Dann gilt für die Wellenlänge λ_m der einzelnen Übergänge:

$$\frac{hc}{\lambda_m} = E_{Ry}[\text{eV}]/m^2 - E_{3p}[\text{eV}], \quad (7)$$

bzw.

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV}/m^2 - E_{3p}[\text{eV}]} \quad (8)$$

Hier beschreiben h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit und $E_{Ry} = -13,605 \text{ eV}$ die Rydbergenergie. m ist die Hauptquantenzahl des d-Niveaus und E_{3p} die Energie des 3p Zustandes in Elektronenvolt. Der Vorfaktor hc berechnet sich zu $hc = 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]$.

Ordnen Sie der gemessenen Linie im Bereich von 819 nm den Wert $m = 3$ zu und berechnen Sie damit E_{3p} . Benutzen Sie immer die gemessenen Wellenlängen auf eine Stelle nach dem Komma. Berechnen Sie die erwarteten Wellenlängen für die Nebenserie bis $m = 12$ und versuchen Sie die gefundenen Linien zuzuordnen.

```
for m in range(3,13):
    l=1.2398E3/(-13.605/m**2-E_3p)
    print('m={m:2d}, lambda={l:6.2f}'.format(m=m,l=l))
```

Legen Sie im Protokollbuch eine Tabelle für diese Serie an und tragen Sie die gemessenen Wellenlängen als Funktion von m ein. Achtung: Wenn Sie sich nicht sicher sind, ob eine Linie zugeordnet werden kann, dann lassen Sie es. Falsche Zuordnungen sind viel schlimmer als eine Linie weniger! Falls eine Wellenlänge in einer Serie fehlt, schauen Sie nach, ob Sie diese übersehen haben.

VIII.2.2 Erwartete Linien für die 2. Nebenserie: $ms \rightarrow 3p$

Nutzen Sie aus, dass die gelbe D-Linie des Natriums bei $\lambda = 589 \text{ nm}$ dem Übergang $3p \rightarrow 3s$ entspricht und berechnen Sie die Bindungsenergie (in eV) des Grundzustands:

$$E_{3s} = E_{3p} - 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / \lambda \quad (9)$$

und berechnen Sie aus E_{3s} den Korrekturfaktor Δ_s gemäß

$$E_{3s} = -13,605 \text{ eV} / (3 - \Delta_s)^2. \quad (10)$$

Berechnen Sie damit die Wellenlängen der zweiten Nebenserie für $m = 4$ bis 9:

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV} / (m - \Delta_s)^2 - E_{3p}[\text{eV}]} \quad (11)$$

Ordnen Sie wie zuvor die gemessenen Linien dieser Serie zu und tragen Sie diese in eine Tabelle ein.

VIII.2.3 Erwartete Linien für die Hauptserie: $mp \rightarrow 3s$

Berechnen Sie aus E_{3p} den Korrekturfaktor Δ_p :

$$E_{3p} = -13,605 \text{ eV} / (3 - \Delta_p)^2 \quad (12)$$

und bestimmen Sie wieder die Wellenlängen für $m = 4$ bis 5:

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV} / (m - \Delta_p)^2 - E_{3s}[\text{eV}]} \quad (13)$$

Vergleichen Sie diese mit den gemessenen Linien (falls vorhanden).

Es bleiben Linien sichtbar, die keiner der drei Serien zugeordnet werden können insbesondere bei Wellenlängen über 700 nm. Diese kommen z.T. von Krypton. Ignorieren Sie diese Linien.

VIII.3 Bestimmung der Serienenergien und der l-abhängigen Korrekturfaktoren

Benutzen Sie die gemessenen Wellenlängen der Serien um die Rydbergenergie E_{Ry} , E_{3p} und die Korrekturterme Δ_d und Δ_s zu bestimmen. Tragen Sie Ihre gefundenen Linien mit Fehlern und die dazugehörigen Quantenzahlen in Arrays ein. Die folgenden Zahlenwerte sind nur Beispiele und entsprechen nicht den wahren Werten!

```
wellenl=np.array([819.1,569.9,499.5,468.3,451.3,
                  441,434.8,431.6,428.3,421.4])
fehler=np.array([2,1,1,1,1,1,1,1,1,2])
quantenz=np.arange(3,13)
```

Tragen Sie Ihre Messwerte in ein Diagramm ein.

```
plt.errorbar(quantenz,wellenl,fehler,fmt=".")
plt.xlabel('Quantenzahl')
plt.ylabel('Wellenlaenge / nm')
plt.title('1. Nebenserie des Na-Atoms')
```

Für die erste Nebenserie wählen Sie die Funktion

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / [E_{Ry} / (m - \Delta_d)^2 - E_{3p}] \quad (14)$$

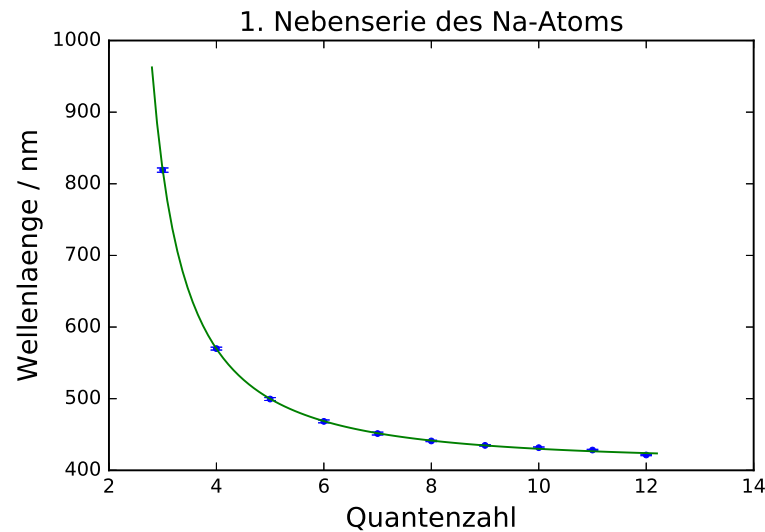


Abbildung 12: 1. Nebenserie des Na-Atoms.

mit E_{Ry} , E_{3p} und Δ_d als freie Parameter.

```
from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(m,E_Ry,E_3p,D_d):
    return 1.2398E3/(E_Ry/(m-D_d)**2-E_3p)
```

Mit `para = [-13.6,-3,-0.02]` werden die Startparameter in der Reihenfolge wie sie in der Funktion definiert wurden initialisiert. Mit der Funktion `curve_fit()` wird die Anpassung durchgeführt. Das Ergebnis, d.h. die Parameter werden im Array `popt` gespeichert und deren Varianzen befinden sich auf der Diagonalen der Kovarianzmatrix `pcov`. Falls der Fit nicht konvergiert, müssen Sie Startparameter ändern.

```
para = [-13.6,-3,-0.02]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, quantenz, wellenl,
                      sigma=fehler, p0=para)
```

Lassen Sie sich die Fitergebnisse ausgeben:

```
print("E_Ry=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("E_3p=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("D_d=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
```

Diskutieren Sie die Güte des Fits. Berechnen Sie die χ^2 -Summe:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (15)$$

und $\chi_{red}^2 = \chi^2 / \text{Freiheitsgrad}$. Der Freiheitsgrad berechnet sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter.

```
chi2=np.sum((fit_func(quantenz,*popt)-wellenl)**2/fehler**2)
dof=len(quantenz)-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red=chi2/dof
print("chi2=", chi2_)
print("chi2_red=",chi2_red)
```

Berechnen Sie noch die „Fitwahrscheinlichkeit“, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Wiederholungsmessung ein χ^2 -Wert erhalten, der größer oder gleich Ihrem χ^2 -Wert ist.

```
from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chi2_,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit:", prob,"%")
```

Vergleichen Sie die Fitergebnisse mit den zuvor berechneten Werten. Hinweis: Δ_d ist eine empirische Näherungsformel. In Wirklichkeit hängt diese Größe auch noch schwach von der Hauptquantenzahl n ab. Wundern Sie sich daher nicht, wenn die Wahrscheinlichkeit des Fits nicht so gut ist.

Zeichnen Sie die erhaltene Funktion mit Parametern in das Diagramm mit Ihren Messwerten. Mit `*popt` werden die gefundenen Parameter automatisch in Ihre Funktion entpackt. Die Abszissenwerte für die Funktion generieren wir mit `linspace()`.

```
plt.errorbar(quantenz,wellenl,fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Quantenzahl')
plt.ylabel('Wellenlaenge / nm')
```

```
plt.title('1. Nebenserie des Na-Atoms')
x=np.linspace(2.8,12.2, 100)
plt.plot(x, fit_func(x,*popt))
plt.savefig("figures/1_Nebenserie.pdf", format="pdf")
```

Ihr Diagramm sollte so ähnlich wie Abbildung 12 aussehen.

Wiederholen Sie die Anpassung für die zweite Nebenserie. Hier müssen Sie die Funktion

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / [E_{Ry} / (m - \Delta_s)^2 - E_{3p}] \quad (16)$$

anfiten.

IX Anhang

Symbol	Wellenlänge (nm)	Element/Molekül
A	759,4	telluric oxygen
B	686,7	telluric oxygen
C	656,3	hydrogen
D ₁	589,6	sodium
D ₂	589,0	sodium
D ₃	587,6	helium
E	527,0	iron and calcium
b ₁	518,4	magnesium
F	486,1	hydrogen
G	430,8	iron and calcium
H	396,8	calcium
K	393,4	calcium

Tabelle 1: *Fraunhoferlinien.*

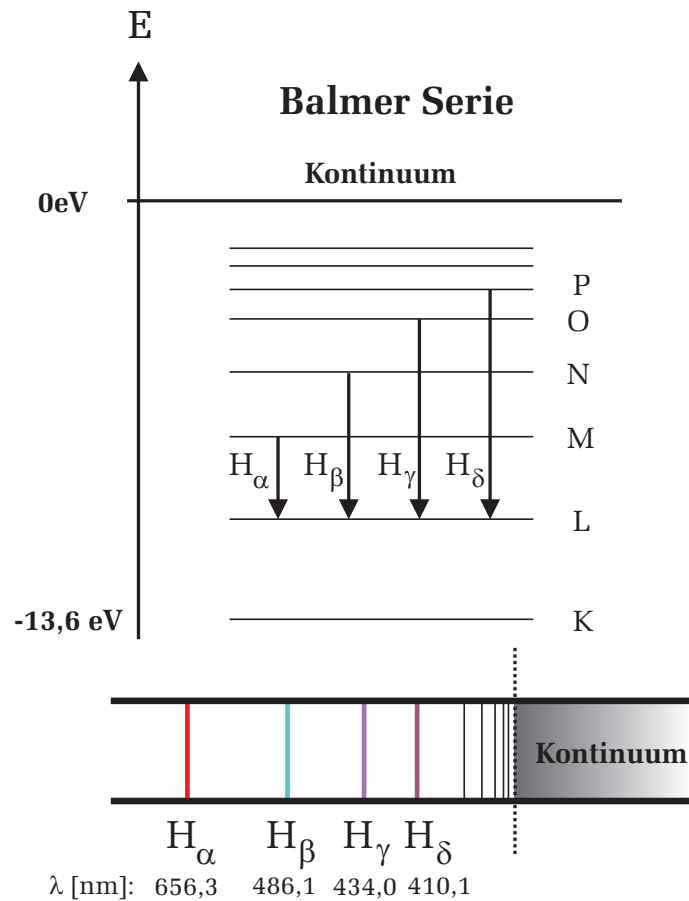


Abbildung 13: Balmerserie des Wasserstoffatoms