

Universität Heidelberg
Physikalisches Praktikum für
Studierende der Pharmazie
Ausgabe 18. März 2025



Inhaltsverzeichnis

Grundlagen	2
Versuch 11 Einführung	13
Versuch 27 Wheatstonesche Brücke	19
Versuch 31 Optische Abbildung	22
Versuch 41 Temperaturmessung.	33
Versuch 248 RC-Glied	40
Versuch 254 Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen .	51

Grundlagen

I Vorbemerkung

Dieses Praktikum verfolgt hauptsächlich drei Ziele:

1. Sie lernen den Umgang mit physikalischen Messgeräten und Messapparaturen.
2. Kenntnisse, die Sie bereits erworben haben (oder noch erwerben werden) sollen durch die Überprüfung im Experiment gesichert werden.
3. Das Führen eines Protokolls.

Zu diesem Zweck enthält das Praktikum Versuche mit überschaubarer Theorie und einfachen Messapparaturen, deren Funktionsweise leicht einzusehen ist. Natürlich ist damit nicht die Messgenauigkeit aufwendiger Apparaturen, wie sie in der Forschung verwendet werden, erreichbar. Das Ziel des Praktikums sind weniger präzise Ergebnisse, sondern Sie sollen lernen, die Einflüsse, die die Messgenauigkeit begrenzen, zu erkennen und einzuschätzen. Aus diesem Grund sollen bei der Auswertung die Ergebnisse stets mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

Lesen Sie bei der Versuchsvorbereitung die Versuchsanleitung genau durch und überlegen Sie, was bei der Versuchsdurchführung und Auswertung gemacht werden soll, welche Messwerte Sie brauchen, usw. Nur so können Sie zügig messen und vermeiden unnötige Mehrarbeit durch Fehler beim Auswerten.

Gestalten Sie die Auswertung übersichtlich und kennzeichnen Sie alle Angaben so, dass man sofort erkennen kann, worum es sich handelt (z.B.: „aus der Zeichnung abgelesen:“, „Literaturwert:“, „Mittelwert der Messreihe:“). Endergebnisse werden stets zusammen mit ihrem Fehler angegeben und besonders kenntlich gemacht, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Es ist unsinnig, den Fehler mit mehr als zwei Stellen anzugeben; das Ergebnis soll bis auf maximal zwei ungenaue Stellen angegeben werden (s.u.).

Bei graphischen Darstellungen von Messwerten ist folgendes zu beachten:

- Die graphische Darstellung erfolgt grundsätzlich auf Millimeterpapier bzw. Logarithmenpapier.
- Richtige Größe wählen. Nutzen Sie wenn möglich den vollen Bereich des mm-Papiers bzw. Logarithmenpapiers.

- Bei jeder Achse Messgröße und Maßeinheit angeben (Bsp.: T in °C, T [°C], T/°C).
- Um sich das Eintragen der Messpunkte zu erleichtern, empfiehlt es sich eine sinnvolle Achseneinteilung zu wählen (z.B. 1 °C=0,5 cm oder 1 cm oder 2 cm zu wählen und nicht 1 °C=0,4 cm oder 2,5 cm)
- Verbinden Sie beim Zeichnen von Kurven nicht einfach die Punkte miteinander („Malen nach Zahlen“), sondern versuchen Sie die Streuung der Messwerte auszugleichen.
- Befinden sich mehrere Kurven in einem Diagramm, so sind die einzelnen Kurven und Messwerte zu kennzeichnen (Legende hinzufügen).
- Jede Zeichnung, Tabelle und Diagramm muss mit einer Text-Überschrift versehen werden.

II Vorbereitung

Um das Praktikum effizient durchzuführen, ist eine gründliche Vorbereitung notwendig. Es ist nicht in Ihrem Interesse die Versuche „starr“ nach Anleitung abzuarbeiten, ohne zu verstehen was Sie überhaupt praktizieren. Die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum setzt voraus, dass Sie ein entsprechendes Kenntnisniveau der mit den Versuchen verknüpften Physik besitzen. Ob diese Kenntnisse aus Ihrem Fundus oder aus Ihrer Vorbereitung stammen, ist natürlich belanglos. Informieren Sie sich vor Beginn der Versuchsdurchführung, über die Stichpunkte, die bei den jeweiligen Versuchen unter dem Kapitel „Vorbereitung“ aufgelistet sind. Dabei reicht das alleinige Studium der Praktikumsanleitung keinesfalls aus. **Die Praktikumsanleitung ist kein Lehrbuch!** Zu jedem Versuch sind daher zusätzlich Literaturempfehlungen angegeben. Bei den meisten Versuchen ist es vollkommen ausreichend, wenn Sie sich mit Hilfe der Standardwerke (Walcher, Gerthsen, Bergmann-Schäfer, etc.) auf die Versuche vorbereiten.

Um Ihnen die Vorbereitung zu erleichtern, sind neben den Stichpunkten zusätzlich noch Fragen in der Praktikumsanleitung aufgelistet.

Eine Versuchsdurchführung ohne ausreichende Vorbereitung ist klarerweise ohne Lerneffekt und nicht sinnvoll. Die Praktikantin oder der Praktikant muss in diesem Fall damit rechnen, nach Hause geschickt zu werden und den Versuch zu einem späteren Zeitpunkt zu wiederholen.

Die folgenden Punkte fassen das Basiswissen zusammen, über das Sie bei den Versuchen verfügen sollten:

1. Mathematische Voraussetzungen - elementare Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponential-Funktion - elementares Differenzieren und Integrieren - gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung/Kraftgesetz, Gleichung des natürlichen Wachstums.
2. Statistik und Fehler - Mittelwert, Standardabweichung, statistische und systematische Fehler, Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung, Gauß-Verteilung.
3. Die 7 Basiseinheiten des SI-Systems : m, kg, s, A, K, mol, Cd.
4. Mechanik - Newtonschen Gesetze; Kräfteparallelogramm - Erhaltungssätze für Translation und Rotation (Energie, Impuls, Drehimpuls) - Drehmoment, Trägheitsmoment u. Steinerscher Satz - Hooksches Gesetz - Resonanzkurve - Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators und typische Lösungen - Schallgeschwindigkeit, longitudinale und transversale Schwingungen.
5. Elektrizitätslehre - Elementarladung und Ladungserhaltung; Faraday-Konstante, Avogadrokonstante, Stoffmenge - Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, spezifischer Widerstand - Messbereichserweiterung von Messinstrumenten - Kondensator, Kapazität - Herleitung Kondensatorentladung, Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld.
6. Optik - Reflexions- und Brechungsgesetz - Abbildung mit Linsen (geometrische Bildkonstruktion, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab) - kontinuierliche und Linienspektren (qualitatives Verständnis) - Auflösungsvermögen optischer Instrumente.
7. Wärmelehre - Wärme, Zustandsgrößen (Temperatur, innere Energie,...), Zustandsgleichung des idealen Gases - 1. und 2. Hauptsatz, Wärmebilanz, spezifische Wärme, Phasendiagramm, Dampfdruck - Van-der-Waals-Gleichung realer Gase, Verlauf der Isothermen im $p(V)$ -Diagramm, Gesetz von Dulong-Petit, Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz, Clausius-Clapeyron Gleichung.

Die Kenntnis dieses Basiswissens erspart natürlich nicht das sorgfältige Durcharbeiten der Anleitung und die Vorbereitung der anderen Kapitel im Skript. Insbesondere sollten Sie sich bei der Vorbereitung auch schon über die Versuchsdurchführung, die Messmethoden und über die Auswertung Gedanken machen. Machen Sie sich bewusst, was und wie Sie messen werden und schätzen Sie ab, welchen Einfluss die Fehler der Einzelmessungen auf den Gesamtfehler haben (Bsp.: eine quadratische Größe geht mit doppeltem Gewicht ein als eine lineare).

III Durchführung der Versuche

Sehen Sie sich die Apparatur gründlich an und machen Sie sich mit der Funktion aller Einzelteile vertraut. Spielen Sie die Messprozedur nach Möglichkeit zunächst qualitativ durch. Wenn Sie eine elektrische Schaltung herzustellen haben, kontrollieren Sie zunächst selbst sorgfältig, ob Sie keine Schaltfehler gemacht haben. **Vor Anlegen der Spannung muss die Schaltung vom Assistenten abgenommen werden.** Das Protokoll wird auch während der Messungen lückenlos geführt, d.h. man soll keine großen Zwischenräume für spätere Eintragungen lassen. Lassen Sie sich Zeit zum Führen eines ordentlichen Protokolls.

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsaufbaus: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung. Im Einzelnen soll das Protokoll enthalten:

1. Überschrift und Versuchsnummer.
2. Einleitung: Formulierung der theoretischen Grundlagen, sowie physikalischer Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis des Versuchs erforderlich sind.
3. Das Protokoll muss so ausgelegt sein, dass Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann, dann die für den Versuch nötigen Umformungen. Damit man den Einfluss der Fehler der gemessenen Größen auf das

V Versuchsergebnis leichter übersehen kann, ist es zweckmäßig, die Formeln auf die Form

V Versuchsergebnis = Funktion der direkt gemessenen Größen

zu bringen. Alle Abkürzungen, die in den Formeln vorkommen, müssen erklärt sein, evtl. mit Hilfe der Skizze der Apparatur. Diesen Teil des Protokolls schreiben Sie am besten schon zu Hause bei der Vorbereitung.

4. Skizze und Beschreibung der Versuchsanordnung (schematisch, Schaltplan bei elektrischen Schaltungen).
5. Knappe aber vollständige Angaben über das Messverfahren, soweit dies nicht völlig selbstverständlich ist. Das Protokoll muss selbsterklärend sein!
6. Präsentieren Sie Ihre Messergebnisse in Form von Tabellen und Diagrammen, die klar und ausreichend beschriftet sein müssen. Kommentieren Sie diese mit einigen einleitenden Sätzen.
7. Führen Sie nach Möglichkeit eine vorläufige Auswertung unmittelbar nach der Messung durch.
8. Bei der Auswertung müssen alle Zwischenrechnungen im Protokollheft ausgeführt werden. Vergleichen Sie, soweit vorhanden, Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten. Bei der Fehlerabschätzung berücksichtigen Sie nur die Faktoren, die Sie quantitativ kennen, also im allgemeinen die zufälligen Fehler und die mutmaßliche Genauigkeit der Eichung der Instrumente. **Es genügt vollständig, sich auf die Faktoren zu beschränken, die die Messgenauigkeit hauptsächlich begrenzen.** Wenn Sie glauben, dass bei dem Versuch systematische Fehler auftreten, die Sie nicht quantitativ erfassen können, machen Sie hierüber eine kurze Bemerkung. Achten Sie darauf, dass Sie alle zur Auswertung nötigen Angaben aufgeschrieben haben (z.B. Barometerstand, Zimmertemperatur, etc.).
9. Zusammenfassung und kritische Diskussion. Fassen Sie am Schluss der Auswertung den gesamten Versuch mit einigen kurzen Sätzen zusammen. Gehen Sie dabei auf die physikalische Fragestellung ein, das Messprinzip, die Messergebnisse und Fehler. Setzen Sie sich kritisch mit dem Versuch auseinander. Gibt es Möglichkeiten den Versuchsaufbau oder das Messprinzip zu verbessern? Gibt es Möglichkeiten die Fehler zu minimieren?

IV Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung

Jede Messung kann nur mit einer begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden. Zwei unabhängige Messungen werden daher unterschiedliche Ergebnisse liefern. Damit das Resultat einer Messung aussagekräftig ist, reicht es nicht aus nur den Zahlenwert des Messergebnisses anzugeben, sondern es muss auch eine Aussage über die Messgenauigkeit gemacht werden. Dies geschieht z.B durch die Angabe eines Intervalls $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ bzw.

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

innerhalb dessen der „wahre Wert“ mit einer bestimmten, anzugebenen Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel:

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel ergab folgendes Resultat:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Die erste Zahlenangabe entspricht der besten Schätzung des „wahren Wertes“. Die zweite Zahl ist die Messgenauigkeit, die man häufig auch den „Fehler“ des Messergebnisses nennt. Das Wort „Fehler“ darf nicht falsch interpretiert werden. Diese Angabe gibt nicht etwa den Betrag an, um den das Messergebnis falsch ist, sondern stellt ein Unsicherheitsbereich dar, in dem der „wahre Wert“ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, werden wir an späterer Stelle diskutieren. Das Resultat der Messung ist dann wie folgt zu interpretieren:

Als beste Schätzung für die Erdbeschleunigung wurde ein Wert von $9,81 \text{ m/s}^2$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Intervall $9,78 \text{ m/s}^2 \dots 9,84 \text{ m/s}^2$.

Beachten Sie, dass es bei der Angabe des Messergebnisses und der Messunsicherheit keinen Sinn macht beliebig viele Nachkommastellen anzugeben (Taschenrechnerergebnis). Die Angabe

$$g = (9,8114587 \pm 0,0298682) \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

ist sinnlos. Die Messgenauigkeit soll auf eine oder höchstens zwei signifikante Stellen gerundet werden und die letzte signifikante Stelle des Messergebnisses soll der selben Größenordnung entsprechen wie die Messgenauigkeit:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (4)$$

IV.1 Systematische und Statistische Fehler

Bei einer Messung können zwei Arten von Fehlern auftreten: Systematische Fehler und statistische (zufällige) Fehler. Systematische Fehler führen dazu, dass das Messergebnis einseitig vom wahren Wert abweicht. Eine Wiederholung der Messung zeigt immer die gleiche Abweichung. Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“. Im Gegensatz dazu schwanken bei zugrundeliegenden statistischen Fehlern, die Messwerte zufällig. Mal sind sie größer, das andere mal kleiner als der „wahre Wert“.

IV.1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler werden zunächst durch die begrenzte Genauigkeit der Eichung der Instrumente verursacht. Bei Maßstäben und Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit. An vielen Analogmessinstrumenten ist zusätzlich noch eine Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt den relativen Fehler des Messbereichsendwertes an. Wird z.B. mit einem Voltmeter der Klasse 1,5 innerhalb eines Messbereiches von 200 V eine Messung durchgeführt, so beträgt der Fehler 1,5% von 200 V, d.h. 3 V. Bei digitalen Instrumenten wird der Fehler in der Regel durch zwei Größen angegeben. Einen prozentualen Fehler, der sich entweder auf dem Messwert (Angabe *v.M.* = vom Messwert) oder auf den Messbereich (Angabe *v.E.* = vom Endwert) bezieht, sowie eine Fehlerangabe in der Form: $\pm x$ Digits. Die letztere Angabe bedeutet, dass der Messwert um $\pm x$ Einheiten der hintersten Stelle der Anzeige schwanken kann.

Beispiel: Mit einem digitalen Voltmeter mit der Genauigkeitsangabe

$$\pm 1,5\% \text{ v.M.}, \pm 3 \text{ Digits}$$

wird ein Spannung von 12,00 V gemessen. Der absolute Fehler berechnet sich aus 1,5% vom Messwert sowie drei Einheiten der letzten Stelle: 1,5% von 12,00 V und $3 \times 10 \text{ mV} = 180 \text{ mV} + 30 \text{ mV} = 210 \text{ mV}$.

Desweiteren können systematische Fehler auch durch Umwelteinflüsse wie Temperaturdriften, Einkopplung elektrischer Felder (z.B. Netzbrummen) etc. oder aber auch durch grundsätzliche Mängel des Messverfahrens verursacht werden. Z.B. muss bei der Messung an einer hochohmigen Spannungsquelle der Innenwiderstand des Voltmeters berücksichtigt werden (wichtig in Versuch 41 *Temperaturmessung*). Geschieht dies nicht, treten systematische Abweichungen auf.

Für die Abschätzung von systematischen Fehlern lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Es kommt im Einzelfall auf den Scharfsinn und die physikalischen Kenntnisse des Experimentators an. Allerdings können systematische Fehler auch noch nach einer Messung berücksichtigt werden. Sind die Ursachen bekannt, kann das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.

IV.1.2 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Prozesse während des Messprozesses. Ursachen hierfür sind z.B. das Rauschen eines Sensors oder thermodynamische Prozesse. Auch der Experimentator selbst kann eine statistische Fehlerquelle darstellen, da dieser stets die Messwerte aufnehmen, ablesen und interpretieren muss. All dies kann statistischen Schwankungen unterliegen. Z.B. wird man bei einer mehrmaligen Zeitmessung mit einer Stoppuhr aufgrund schwankender Reaktionszeiten verschiedene Ergebnisse erhalten.

Statistische Fehler haben die Eigenschaft, dass die Messergebnisse zufällig um den „wahren Wert“ schwanken. Falls es möglich ist eine Messung mehrmals zu wiederholen, können solche Fehler mit Mitteln der Statistik aus der Streuung der Messwerte ermittelt werden.

Tabelle 1 zeigt ein Beispiel, bei dem eine elektrische Spannung x 20-mal gemessen wurde. Die Messwerte sind in Abbildung 1 eingetragen.

Gesucht ist ein Wert der die beste Schätzung des wahren Wertes darstellt. Mit Hilfe statistischer Überlegungen lässt sich zeigen, dass dieser Bestwert dem arithmetischen Mittelwert entspricht:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (5)$$

Dieser Wert ist in Abbildung 1 als waagrechte Linie eingezeichnet.

Neben der besten Schätzung des „wahren Werts“ (Mittelwert) müssen wir

Nr.	x [V]						
1	5,070	6	5,039	11	5,053	16	5,038
2	5,073	7	5,043	12	5,054	17	5,058
3	5,031	8	5,034	13	5,078	18	5,040
4	5,024	9	5,034	14	5,071	19	5,071
5	5,034	10	5,079	15	5,050	20	5,051

 Tabelle 1: *Ergebnisse einer 20-maligen Spannungsmessung.*

zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung machen. Dazu wiederholen wir die Messung nicht nur 20-mal sondern viele Male mehr. In Abbildung 2 sind z.B. 3500 Einzelmessungen aufgetragen. Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass die Messwerte symmetrisch um einen mittleren Wert streuen. Die meisten Messwerte liegen in der Nähe des Mittelwertes. Aber es gibt auch einzelne „Ausreißer“, die weiter weg vom Mittelwert liegen. Um dies zu quantifizieren empfiehlt sich eine andere grafische Darstellung der Messwerte in Form eines Histogramms. Dabei wird gezählt, wieviele Einzelmessungen innerhalb eines bestimmten Intervalls aufgetreten sind und die entsprechende Häufigkeit in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Solch ein Histogramm ist in Abbildung 3 dargestellt. Für sehr viele Messungen, streng genommen für unendlich viele, nähert sich das Histogramm einer bekannten Verteilung, die als Normal- bzw. Gaußverteilung bezeichnet wird und durch

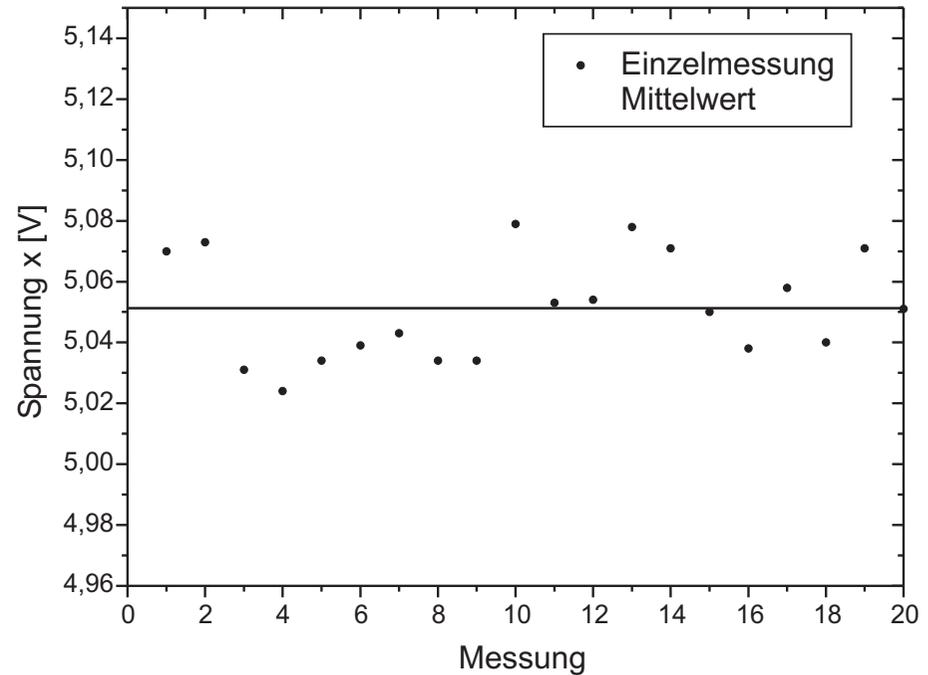
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

dargestellt wird. Die Gaußverteilung beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$\int_a^b P(x) dx \quad (7)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert x_i gemessen wird, der im Intervall $a \leq x_i \leq b$ liegt. Durch den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ ist die Verteilung normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1. \quad (8)$$


 Abbildung 1: *Darstellung von 20 unabhängigen Messungen einer elektrischen Spannung x . Die waagrechte Linie entspricht dem Mittelwert.*

Dies ist sofort einsichtig, da mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit irgendein Wert gemessen wird.

Eine Gaußverteilung besitzt zwei Parameter. Die Lage des Maximums der Verteilung wird durch die Größe μ bestimmt und entspricht dem wahrscheinlichsten Wert. Die Breite der Verteilung ist durch die Größe σ (Abbildung 3) gegeben.

Falls die Messwerte tatsächlich gaußverteilt sind - und das ist sehr häufig der Fall - können wir annehmen, dass wir das Messergebnis einer großen Anzahl von Einzelmessungen, ebenfalls durch die Parameter μ und σ beschreiben können.

Wie sich zeigen lässt, konvergiert der arithmetische Mittelwert \bar{x} für eine große

Anzahl von Einzelmessungen, gegen den wahrscheinlichsten Wert μ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu. \tag{9}$$

Der Mittelwert stellt somit, wie wir bereits zuvor erwähnt haben, die beste Schätzung des „wahren Werts“ dar.

Die Breite der Gaußverteilung wird durch σ bestimmt. Je größer σ , desto breiter ist die Verteilung und umso größer ist die Streuung der Messwerte um den wahrscheinlichsten Wert μ . Wir können daher σ als ein Maß für die Messgenauigkeit interpretieren.

Für eine große Anzahl von Einzelmessungen lässt sich zeigen, dass die Reihe (Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert)

$$S'_E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \tag{10}$$

gegen σ konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_E = \sigma. \tag{11}$$

S'_E wird als **Standardabweichung** einer Messreihe bezeichnet. Allerdings ist hier Vorsicht geboten. S'_E ist nur dann ein guter Schätzwert für die Streuung der Messwerte, wenn viele Einzelmessungen durchgeführt werden. Bei nur wenigen

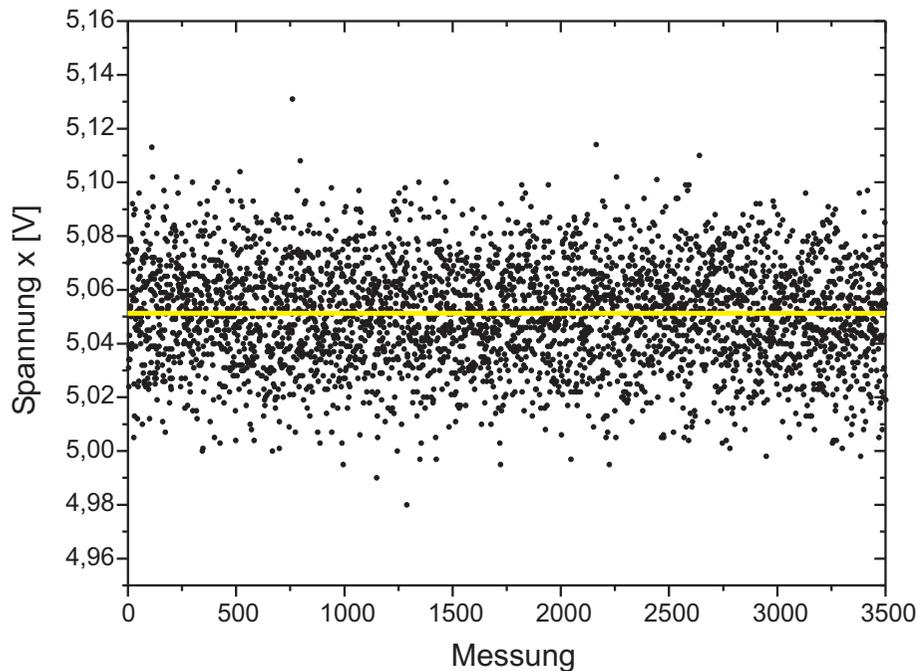


Abbildung 2: Darstellung von 3500 Messungen.

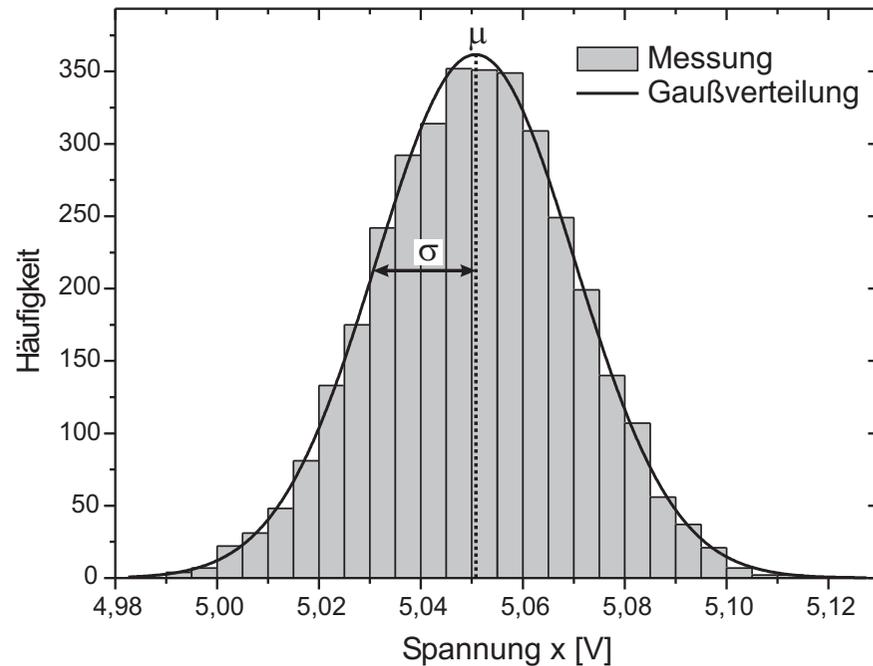


Abbildung 3: Histogramm von 3500 Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie zeigt die dazugehörige Gaußverteilung mit den Parametern μ und σ . Die Gaußverteilung ist hier nicht auf Eins normiert, sondern auf die Fläche des Histogramms.

Intervall	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
Wahrscheinlichkeit	68,3%	95,5%	99,7%

 Tabelle 2: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .*

Messungen wird die Streuung um den Mittelwert überschätzt. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es besser ist als Maß für die Streuung die Größe

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (12)$$

zu verwenden. S_E wird auch als der **mittlere Fehler einer Einzelmessung** bezeichnet.

Wird eine Messung viele male wiederholt und als beste Schätzung des „wahren Wertes“ der Mittelwert \bar{x} angegeben, so ist dieser natürlich genauer als der Messwert einer Einzelmessung und zwar um den Faktor $1/\sqrt{N}$:

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (13)$$

S_M wird auch als **mittlerer Fehler des Mittelwerts** oder einfach als **Standardfehler** bezeichnet.

Mit Hilfe von Gleichung (7) lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert x_i im Bereich von $\pm\sigma$ um den wahrscheinlichsten Wert μ schwankt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P(x) dx = 68,3 \%. \quad (14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung ein Wert im Bereich $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ auftritt beträgt 68,3 %. Analog lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für den 2σ bzw. 3σ -Bereich bestimmen.

Für das Endergebnis einer Messung gibt man in der Regel den 1σ -Fehler S_E bzw. S_M an. Wird ein größerer Fehlerbereich angegeben (z.B. 3σ -Fehler) ist dies gesondert zu vermerken.

Beispiel:

Für die in Tabelle 1 angegebenen Messdaten errechnen sich die Ergebnisse wie folgt:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{5,070 \text{ V} + \dots + 5,051 \text{ V}}{20} = 5,051 \text{ V}. \quad (15)$$

$$\text{Fehler einer Einzelmessung: } S_E = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0173 \text{ V}. \quad (16)$$

$$\text{Fehler des Mittelwerts: } S_M = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0039 \text{ V}. \quad (17)$$

Das Endergebnis wird in der Form

$$\bar{x} \pm S_M \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm \Delta x \quad (18)$$

angegeben. Anstatt S_M schreibt man auch häufig für den Fehler einfach Δx . In unserem Beispiel erhalten wir

$$x = (5,051 \pm 0,004) \text{ V}. \quad (19)$$

IV.2 Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Praktikumsversuchen reicht es nicht aus nur eine physikalisch Größe zu messen und dessen Fehler abzuschätzen. In der Regel sollen aus dem Messergebnis weitere Größen und dessen Genauigkeiten bestimmt werden.

Beispiel:

Es soll die Verlustleistung P eines ohmschen Widerstands R , an dem die Spannung U anliegt, bestimmt werden. Dazu wird der Widerstand R und die Spannung U gemessen und gemäß

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (20)$$

die Verlustleistung berechnet. Da sowohl R als auch U nur mit einer bestimmten Genauigkeit bestimmt wurden, besitzt auch die daraus abgeleitete Größe P eine endliche Genauigkeit.

Die Bestimmung dieser Genauigkeit geschieht mit Hilfe der Differentialrechnung.

Wenn die direkt gemessenen Größen x und y um kleine Beträge dx und dy geändert werden, verändert sich der Wert einer Funktion $f = f(x, y)$ um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{vollständiges Differential}) \quad (21)$$

Hier bedeutet $\partial f / \partial x$ die partielle Differentiation der Funktion f nach x , d.h. die Ableitung von f nach x , wobei die Variable y als Konstante behandelt wird.

Wenn wir in dieser Gleichung die Differentiale dx und dy durch die Fehler Δx und Δy der direkt gemessenen Größen ersetzen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich die Fehler im Mittel teilweise kompensieren werden, wenn sie voneinander unabhängig sind. Daher berechnet man den mittleren Fehler Δf durch „quadratische Addition“ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (22)$$

Hier und im Folgenden wird unter Δx bei zufälligen Fehlern, der mittlere Fehler S_M nach Gleichung (13), bei systematischen Fehlern die oben diskutierten Überlegungen verstanden.

Für das oben angeführte Beispiel (20) berechnet sich der Fehler wie folgt:

$$P = P(U, R) \quad (23)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (24)$$

$$= \sqrt{\left(2 \frac{U}{R} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2} \Delta R\right)^2} \quad (25)$$

Die funktionale Abhängigkeit der zu ermittelnden Größe von den direkt gemessenen hat häufig eine einfache Form. Es lohnt sich, die folgenden Formeln zu

merken, die aus der allgemeinen Gleichung (22) folgen:

$$f = ax \quad \Delta f = a \Delta x \quad (26)$$

$$f = x + y \quad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (27)$$

$$f = xy, \quad f = x/y \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (28)$$

$$f = x^{\pm b} \quad \frac{\Delta f}{f} = |b| \frac{\Delta x}{x}, \quad b = \text{const.} \quad (29)$$

Merken Sie sich:

1. „Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der absoluten Fehler der Summanden“.
2. „Der relative Fehler des Produkts oder des Quotienten zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der einzelnen relativen Fehler“.

Für eine Fehlerabschätzung kann man statt den Gleichungen (27) und (28) auch die einfacheren Formeln $\Delta f = \Delta x + \Delta y$ bzw. $\Delta f / f = \Delta x / x + \Delta y / y$ verwenden. Bevor man mit der Messung beginnt, sollte man sich mit Hilfe der Gleichungen (26) bis (29) überlegen, durch welche Fehler die Genauigkeit der Messung hauptsächlich begrenzt wird. Man kann dann versuchen, die empfindlich in das Resultat eingehenden Fehler klein zu halten.

V Ausgleichsrechnung

Bei vielen Praktikumsversuchen kommt es häufig vor, dass die Steigung m einer linearen Funktion bestimmt werden muss. Hier im Praktikum können Sie dies auf zwei verschiedene Arten machen. Eine grafische Methode die hier erläutert werden soll und eine rechnerische Methode die im nächsten Abschnitt *Lineare Regression* diskutiert wird.

Wir wollen die Bestimmung einer Geradensteigung anhand eines Beispiels mit Daten des Versuchs 35, *Fotoeffekt* erläutern. Bei diesem Versuch wird mit Hilfe einer Fotozelle das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Dazu wird die Fotozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenz (Farbe) beleuchtet und gemessen, bei welcher Sperrspannung U_S der Fotostrom verschwindet. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt. Das

Farbe	Frequenz [THz]	U_S [V]	ΔU_S [V]
gelb	518,7	-0,59	0,05
grün	549,0	-0,72	0,05
blau	687,9	-1,28	0,05
UV	821,3	-1,88	0,05

Tabelle 3: Messdaten aus dem Versuch Fotoeffekt.

Planck'sche Wirkungsquantum lässt sich aus der Steigung $\Delta U_S/\Delta f$ des Graphen gemäß

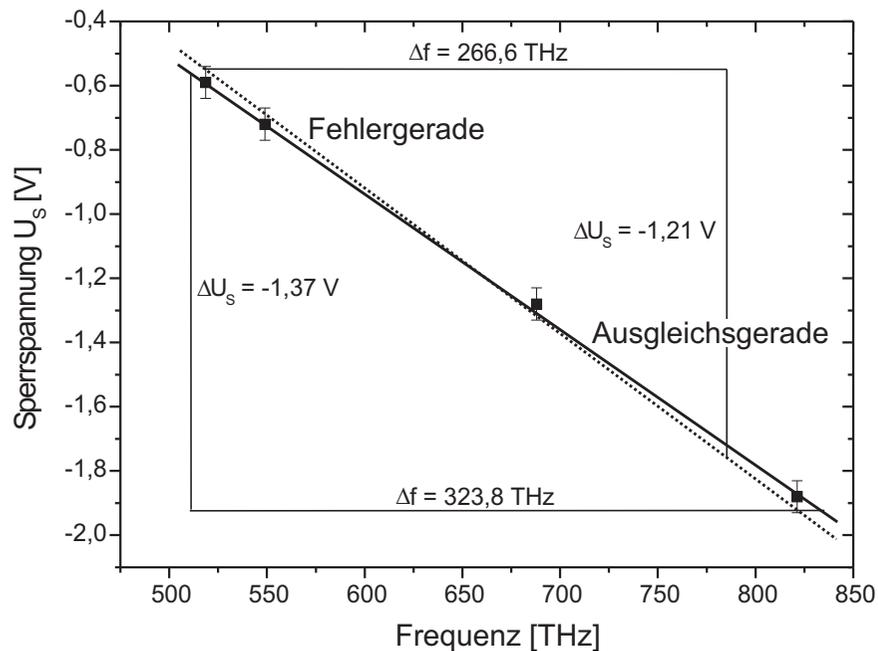


Abbildung 4: Bestimmung der Steigung und dessen Fehler mit Hilfe einer Ausgleichsgerade (durchgezogen) und Fehlergerade (punktiert).

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f}, \quad (30)$$

bestimmen, wobei e die Elementarladung darstellt. Um die Steigung zu berechnen legen wir zunächst durch alle Messpunkte unter Berücksichtigung der Messfehler eine Ausgleichsgerade. Dabei soll die Gerade so platziert werden, dass die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der Gerade im Mittel minimal wird.

Für das Planck'sche Wirkungsquantum berechnen wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,37 \text{ V}}{323,8 \text{ THz}} = 6,78 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (31)$$

Um den Messfehler abzuschätzen, legen wir durch die Messwerte eine zweite Gerade (Fehlergerade). Diese sollte maximal steil (oder maximal flach) sein aber noch innerhalb der Fehler der einzelnen Messungen liegen. Hieraus erhalten wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,21 \text{ V}}{266,6 \text{ THz}} = 7,27 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (32)$$

Den Fehler schätzen wir aus der Differenz der beiden Steigungen ab. Somit lautet das Ergebnis dieser Messung:

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (33)$$

VI Lineare Regression

Sofern bei einer Messung keine systematischen Fehler auftreten und die Messdaten normalverteilt sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, für x_i den Wert y_i zu messen:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta y_i} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}, \quad (34)$$

wobei Δy_i den Fehler von y_i bezeichnet. Die Gesamtwahrscheinlichkeit P alle N Messwerte zu messen, berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrschein-

lichkeiten P_i :

$$P = \prod_i P_i \tag{35}$$

$$= \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i} \right)^2 \right\}. \tag{36}$$

Gesucht werden nun die Funktionsparameter von $f(x)$, für die die Wahrscheinlichkeit P maximal wird. Der erste Term in (36) stellt eine Konstante dar, die nicht von den Funktionsparametern abhängt. Somit wird die Wahrscheinlichkeit maximal, wenn die Summe in der Exponentialfunktion minimal wird. Diese Summe wird auch als χ^2 -Summe bezeichnet.

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i} \right)^2. \tag{37}$$

Wir wollen uns im Folgenden auf lineare Funktionen beschränken, d.h.

$$f(x) = mx + n. \tag{38}$$

Für die Berechnung der Parameter m und n folgt dann:

$$\chi^2(m, n) = \sum_i \left(\frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i} \right)^2 = \text{Minimum} \tag{39}$$

Durch diese Methode wird eine Gerade mit den Parametern m und n bestimmt, für die die quadratischen Abstände der Messwerte y_i von der Geraden minimal wird. Durch den Faktor $1/\Delta y_i^2$ werden zusätzlich Messwerte mit einem kleinen Fehler Δy_i stärker gewichtet als Messwerte mit einem großen Fehler (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl.: least square method).

Für die Berechnung von m und n müssen wir die Nullstellen der partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = -2 \sum_i x_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial n} = -2 \sum_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0. \tag{41}$$

Auflösen nach den Funktionsparametern liefert:

$$m = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \tag{42}$$

$$n = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right), \tag{43}$$

$$\xi = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2. \tag{44}$$

Für den Fall, dass alle Fehler gleich groß sind, d.h. $\Delta y_i \equiv \Delta y$, vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - \bar{x}^2} \tag{45}$$

$$n = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \overline{xy}}{x^2 - \bar{x}^2}. \tag{46}$$

Da die Messwerte y_i fehlerbehaftet sind, besitzen auch die Funktionsparameter einen Fehler den wir mit Δm bzw. mit Δn bezeichnen. Die Fehler berechnen sich nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta m^2 = \sum_i \left(\frac{\partial m}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \tag{47}$$

$$\Delta n^2 = \sum_i \left(\frac{\partial n}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \tag{48}$$

Mit Hilfe von Gleichung (42) und (43) erhalten wir:

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \quad (49)$$

$$\Delta n^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}, \quad (50)$$

wobei ξ in Gleichung (44) definiert wurde. Sind wiederum alle $\Delta y_i \equiv \Delta y$ gleich groß, so vereinfachen sich diese Berechnungen zu

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{1}{x^2 - \bar{x}^2}, \quad (51)$$

$$\Delta n^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{\bar{x}^2}{x^2 - \bar{x}^2}. \quad (52)$$

Die hier ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für lineare Funktionen, sondern lassen sich auch auf andere Funktionen übertragen.

Wir wollen wieder eine Beispielrechnung mit den Daten des Versuchs Fotoeffekt (Tabelle 3) durchführen. Hier entspricht x = Frequenz, $U_S = y$ und $\Delta U_S = \Delta y$. Da die Fehler der einzelnen Messungen alle gleich groß sind, müssen wir nur die Mittelwerte in Gleichung (45) berechnen:

$$\bar{x} = 6,442 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (53)$$

$$\bar{y} = -1,118 \text{ V} \quad (54)$$

$$\overline{xy} = -7,815 \times 10^{14} \text{ VHz} \quad (55)$$

$$\overline{x^2} = 4,295 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (56)$$

$$\overline{x^2} = 4,150 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (57)$$

Für die Steigung folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz}. \quad (58)$$

Das Plank'sche Wirkungsquantum erhalten wir durch Multiplikation mit der Elementarladung:

$$h = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz} = 6,79 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (59)$$

Den Fehler berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (51):

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N(x^2 - \bar{x}^2)}, \quad (60)$$

wobei nach Tabelle 3 für $\Delta y = 0,05 \text{ V}$ und für $N = 4$ zu wählen ist. Wir erhalten für den Fehler von h :

$$\Delta h = e \Delta m = 0,33 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (61)$$

Das Messergebnis lautet somit

$$h = (6,8 \pm 0,3) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (62)$$

Versuch 11 Einführung

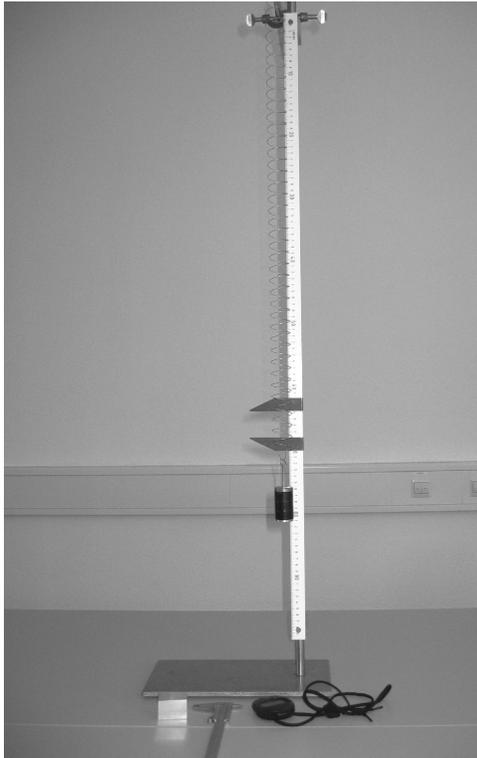


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Vorbemerkung

Ziel des Einführungsveruches ist es Sie mit grundlegenden Techniken des Experimentierens und der Auswertung der Messdaten vertraut zu machen. Diese Grundkenntnisse sind für eine erfolgreiche Durchführung des Praktikums notwendig.

Bei diesem Versuch werden Sie Messungen am Federpendel durchführen. Zunächst wird die Federkonstante gemessen. Das Ergebnis dieser Messung wird

verwendet um in einer zweiten Messung die Erdbeschleunigung zu bestimmen. Sie werden in diesem Versuchsteil den statistischen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Federpendels kennen lernen. Es soll auch gezeigt werden, dass zwei scheinbar identische Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer unterschiedliche Messgenauigkeiten besitzen. Um aus den Messdaten die Federkonstante und die Erdbeschleunigung zu extrahieren ist es notwendig die Ergebnisse graphisch darzustellen. Aus den Diagrammen die erstellt werden, kann man die zu bestimmenden Größen einschließlich des Messfehlers ablesen.

II Messmethode

Die Differentialgleichung für ein Federpendel lautet:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (1)$$

Wenn man das Federpendel zur Zeit $t = 0$ um x_0 auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (3)$$

Die Periodendauer T ist mit ω wie folgt verknüpft:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Somit ergibt sich für die Periodendauer zu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5)$$

Misst man die Periodendauer T als Funktion der Masse m so kann man hieraus die Federkonstante D bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse m belastet, so gilt:

$$mg = Dx \quad (6)$$

Da der Wert der Federkonstante D aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

III Durchführung

Aufgabe 1: Fehlerbestimmung zweier Messmethoden

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse von 200g. Messen Sie dann je 10 mal 3 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen. Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalauschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 10 mal 3 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes¹. Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden Methoden.

Aufgabe 2: Messen der Schwingungsdauer als Funktion der Masse

Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit Massen zwischen 50 g und 250 g in Schritten von 50 g. Für jede Masse werden dreimal drei Pendelschwingungen ausgemessen. Diese Messreihe wird dazu benutzt die Federkonstante des Pendels zu bestimmen.

Aufgabe 3: Bestimmung der Auslenkung als Funktion der Masse

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit den Massen 0g, 50g, 100g, 150g, 200g und 250g beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Notieren Sie die Ablesegenauigkeit für die Auslenkung!

IV Auswertung

Tragen Sie zunächst die Ergebnisse der Vergleichsmessungen der Schwingungsdauer in ein Histogramm ein. Wählen Sie für beide Histogramme den gleichen Abszissenbereich! Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Histogramm für eine Messreihe. Berechnen Sie für beide Methoden den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Welche Methode ist genauer? Was ist der Grund?

¹Für eine Messreihe mit n Messungen x_1, x_2, \dots, x_n und dem Mittelwert \bar{x} ist der mittlere Fehler der Einzelmessung (auch Standardabweichung) durch $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ definiert. Der mittlere Fehler des Mittelwertes ist durch $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$ gegeben.

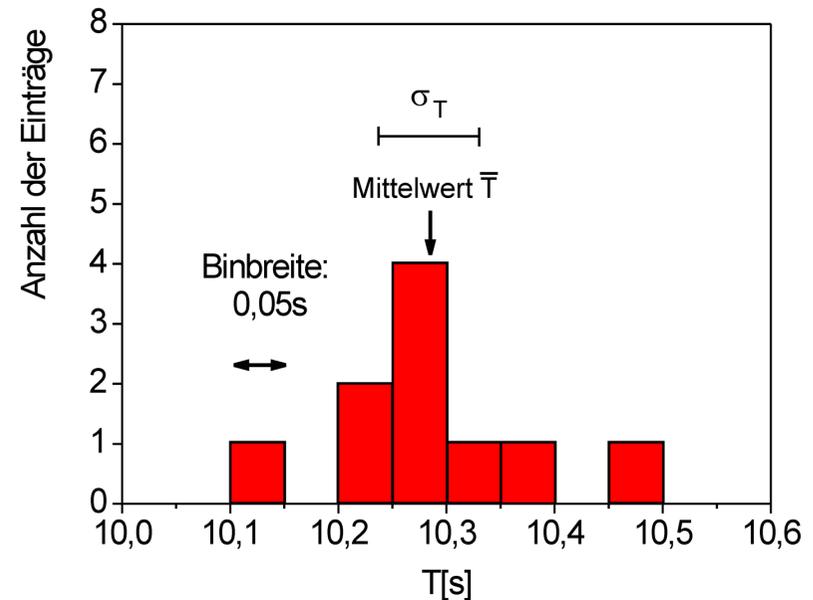


Abbildung 2: Histogramm einer Messreihe.

Messung	T [s]	\bar{T} [s]	σ_T [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	10,11	10,285	0,094	0,03
2	10,23			
3	10,34			
4	10,28			
5	10,26			
6	10,24			
7	10,28			
8	10,46			
9	10,27			
10	10,38			

Um die Federkonstante aus der Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse zu bestimmen, wird eine graphische Methode verwendet. Hierzu wird

Gleichung (5) geschrieben als

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m \quad (7)$$

Dies lässt sich als Geradengleichung

$$y = ax + b \quad (8)$$

interpretieren wenn man

$$\begin{aligned} x &= m \\ y &= T^2 \\ a &= \frac{4\pi^2}{D} \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

setzt. Daher wird im Diagramm das Quadrat der gemessenen Schwingungsdauer T gegen die Masse m aufgetragen. Der Wert von T^2 und von m sind fehlerbehaftet. Folglich müssen Fehlerbalken in das Diagramm eingezeichnet werden. Der Fehler wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern der Mittelwerte der Schwingungsdauern bestimmt. Als nächstes wird die Steigung aus dem Diagramm bestimmt in dem eine Gerade so in das Diagramm gelegt wird, dass die Gerade die Messwerte möglichst gut beschreibt. Die Steigung dieser Geraden kann nun aus dem Diagramm nach

$$a = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \quad (10)$$

abgelesen werden. Um den Fehler von a zu erhalten werden in dasselbe Diagramm zusätzlich Fehlergeraden eingezeichnet. Die Fehlergeraden werden so gelegt, dass sie noch gerade die Messungen unter Berücksichtigung des Messfehlers beschreiben könnten. Die Differenz der Steigungen der optimierten Geraden und der Fehlergeraden wird als Fehler der Steigung σ_a verwendet. Nach Gleichung (9) kann nun die Federkonstante und mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz der Messfehler der Federkonstanten berechnet werden.

Nach Gleichung (7) sollte man erwarten, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Dies ist aber nicht der Fall. Überlegen Sie sich die Ursache hierfür. Aus dem selben Grund ist es übrigens auch nicht möglich die Federkonstante für einzelne Messungen direkt aus Gleichung (5) zu bestimmen. Die graphische Bestimmung der Federkonstante ist in diesem Fall unerlässlich! Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem zweiten Diagramm die

Auslenkung des Federpendels gegen die Masse aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden, da Gleichung (6) wieder als Geradengleichung der Form

$$x = \frac{g}{D} m \quad (11)$$

dargestellt werden kann. Die Steigung

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta m} \quad (12)$$

und ihr experimenteller Fehler können nun nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Erdbeschleunigung wird nach

$$g = D \cdot a \quad (13)$$

berechnet. Um den Fehler der Erdbeschleunigung zu bestimmen muss die Fehlerfortpflanzung angewendet werden, da sowohl der Wert von D als auch der Wert von a fehlerbehaftet sind.

V Messprotokoll

Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer:

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Maximalauslenkung.

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Nulldurchgang

Ablesegenauigkeit der Stoppuhr:

Messung der Federkonstante:

m [g]	Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
50	1	3				
	2	3				
	3	3				
100	1	3				
	2	3				
	3	3				
150	1	3				
	2	3				
	3	3				
200	1	3				
	2	3				
	3	3				
250	1	3				
	2	3				
	3	3				

Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Start/Stop bei

.....

Messung der Erdbeschleunigung:

Δm [g]	Auslenkung x [mm]	Ablesefehler Δx [mm]

Messung der Auslenkung als Funktion der Masse

VI Beispiele für die Darstellung von Messergebnissen

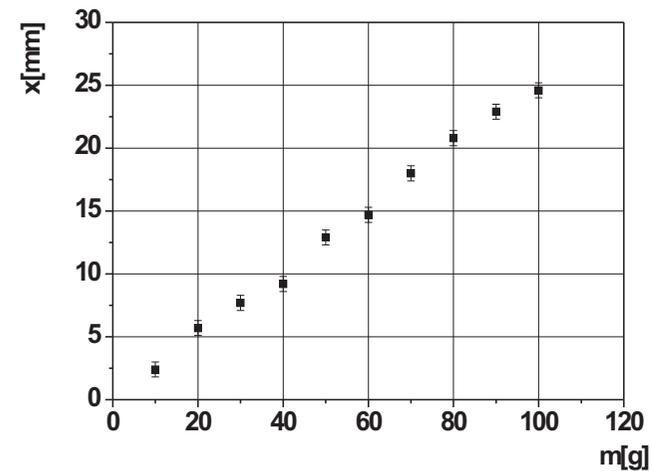
Abschließend werden noch ein paar Beispiele dafür gegeben, wie Messdaten graphisch dargestellt werden sollen. Es werden auch einige Beispiele für typische Fehlerquellen beim Zeichnen von Diagrammen gezeigt.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich zu

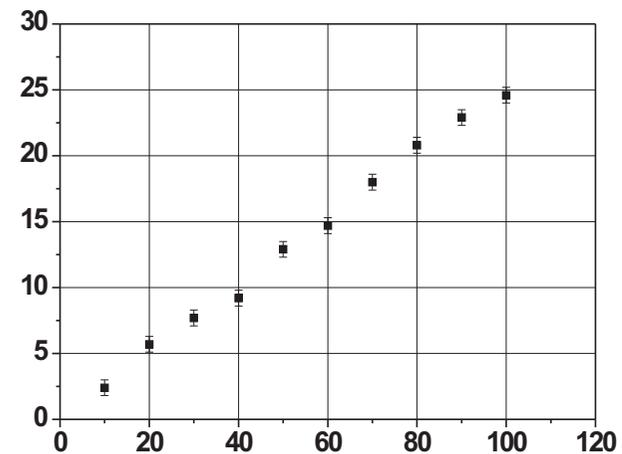
$$a_{\text{Ausgleich}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{20\text{mm}}{80\text{g}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

die der Fehlergeraden zu

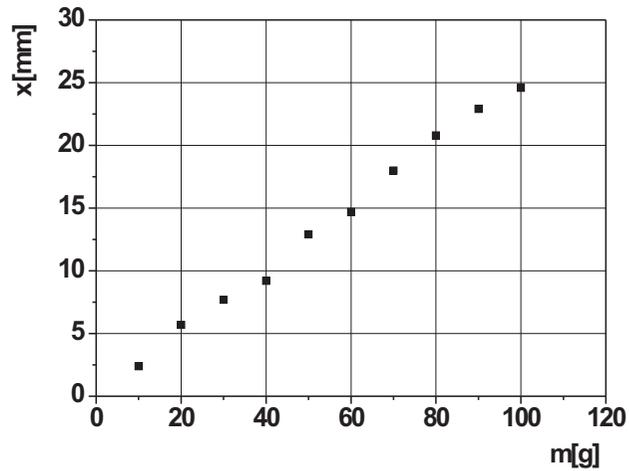
$$a_{\text{Fehler}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{21,5\text{mm}}{78\text{g}} = 0,276 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$



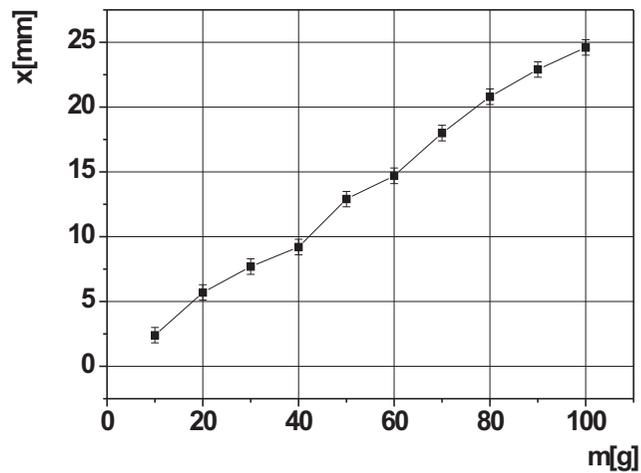
(a) Richtige Darstellung von Messwerten.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Achsenbeschriftungen fehlen.



(a) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Fehlerbalken fehlen.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Messpunkte sind durch eine (unphysikalische) Zick-Zack-Linie verbunden.

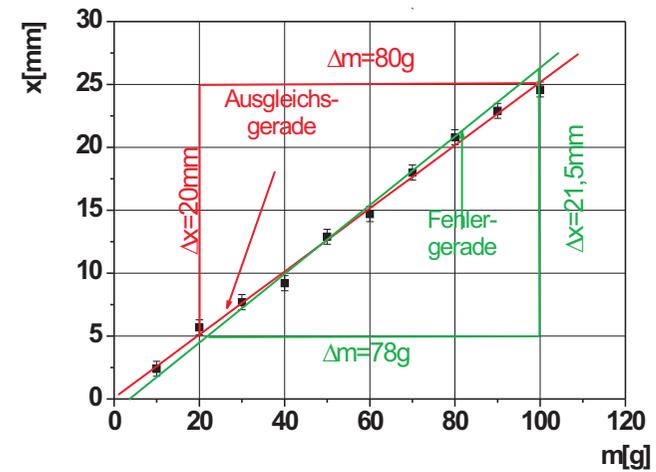


Abbildung 5: Richtiges Anpassung einer Ausgleichsgerade und Ermittlung der Geradensteigung.

Versuch 27 Wheatstonesche Brücke



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Schleifdraht
- μ -Amperemeter
- Taster mit Schutzwiderstand
- Zwei Vergleichswiderstände

- Thermoelement mit Kupferdraht, Widerstandsdraht und NTC-Widerstand in Paraffinöl
- Becherglas
- Heizplatte
- Spannungsversorgungsgerät 2 V, 1 A

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Calker und Kleinhanß, *Physikal. Kurspraktikum für Mediziner*,

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Elektrisches Potential, Spannung, Mechanismus der Stromleitung in Metallen und Halbleitern (Bänder-Modell), spezifischer Widerstand, Kirchhoff'sche Gesetze.

IV Aufgaben

- Bestimmung des spezifischen Widerstandes von Kupfer- und Widerstandsdraht.
- Messung der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes bei Kupfer- und Widerstandsdraht sowie eines NTC-Widerstandes.

V Versuchsaufbau und Grundlagen

Die aufgebaute Brückenschaltung besteht aus folgenden Elementen:

- R_1 : einstellbarer Vergleichswiderstand $0 - 10 \Omega \pm 0,5 \%$
- R_2 : einstellbarer Vergleichswiderstand $0 - 100 \Omega \pm 0,1 \%$
- R_x : unbekannter Widerstand

- R_s : Schutzwiderstand $47k\Omega$
- R_{var} : einstellbarer Widerstand aus Widerstandsdraht mit Abgriffschleifer zum Abgleich der Brücke, L_1 und L_2 sind die Längen des Widerstandsdrahtes rechts und links vom Abgriffschleifer. Die Gesamtlänge L des Widerstandsdrahtes beträgt 100 cm.
- U_b : Betriebsspannung 2 V

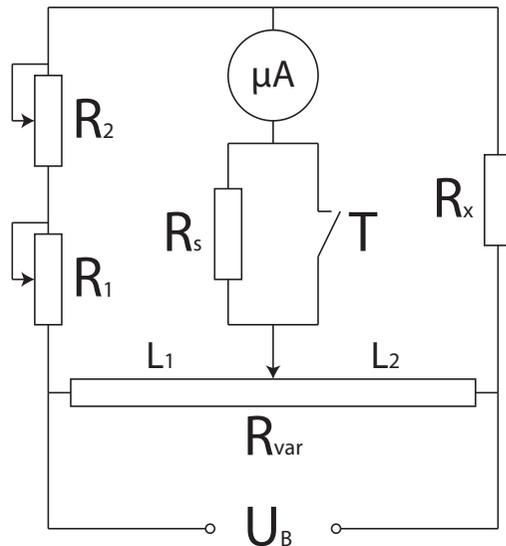


Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Messbrückenschaltung.

Die Brücke ist abgeglichen, wenn durch den Querzweig in dem das μ -Amperemeter sitzt, kein Strom fließt. Es gilt dann folgender Zusammenhang:

$$R_x = (R_1 + R_2) \left(\frac{L - L_1}{L_1} = \frac{L_2}{L_1} (R_1 + R_2) \right) \quad (1)$$

Der Abgleich wird in zwei Schritten vorgenommen.

1. Die Messgenauigkeit ist am größten, wenn $I_1 \approx I_2$ und $R_1 + R_2$ fehlerlos sind. Der Schleifkontakt wird aus diesem Grund in die Mitte des Schleifdrahtes geschoben. Anschließend werden R_1 und R_2 so variiert, dass der

Strom durch das μ -Amperemeter möglichst klein wird. Die Taste darf bei diesem Schritt nicht gedrückt werden.

2. Durch leichtes Verschieben des Schleifkontaktes wird der Abgriff solange variiert, bis beim Drücken des Tasters kein Bewegung der Anzeigenadel des μ -Amperemeters mehr zu sehen ist.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Vermessen der Brückenelemente und Abgleich der Brückenschaltung

Es werden zunächst bei Zimmertemperatur der Widerstand eines Kupfer- und eines Widerstandsdrahtes sorgfältig gemessen. Die Drähte befinden sich zu Spulen aufgewickelt in einem Glaskolben, der zum besseren Wärmeausgleich mit dem Temperaturbad mit Paraffinöl gefüllt ist. Diese Messung wird für $L_1 \approx L_2$ insgesamt 10 mal durchgeführt um die Einstellgenauigkeit zu bestimmen (Schleifkontakt jedes Mal neu einstellen!). Die Widerstände werden dazu in Wasser mit Zimmertemperatur gesetzt.

Aufgabe 2: Messen der Temperaturabhängigkeit

Die Temperaturabhängigkeit aller drei Widerstände wird gleichzeitig gemessen (wieder für $l_1 \approx l_2$), indem die Proben in dem mit Wasser gefüllten Becherglas erwärmt werden. Das Wasser wird auf ca. 80°C erwärmt. Nehmen Sie Messwerte für die Temperaturen von $20, 40, 60$ und 80°C auf. Als Messwerte werden die Temperatur, die Längen l_1 und l_2 sowie der Wert $R_1 + R_2$ notiert. Um die Messwertaufnahme zu erleichtern, können Sie kurz vor Erreichen der gewünschten Temperatur die Heizplatte ausschalten und dann kurz abwarten, bis sich ein stabiler Temperaturwert eingestellt hat. Berechnen Sie direkt die Werte der Widerstände und stellen Sie die Temperaturabhängigkeit von R_x graphisch in einem Diagramm dar.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Mittelwert von \bar{l}_1 und δl_1 . Berechnen Sie anschließend die Widerstände und geben Sie die Fehler an. Der Gesamtfehler für die Widerstände ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Fehler von $R_1 + R_2$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die 10 Werte für R_x und bilden Sie dann den Mittelwert und berechnen Sie dessen Fehler. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabe 1. Ist ein systematischer Fehler erkennbar?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den linearen Temperaturkoeffizienten α für den Kupfer- und den Widerstandsdraht aus der graphischen Darstellung $R_\vartheta = f(\vartheta)$, für den gilt

$$R_\vartheta = R_0(1 + \alpha\vartheta) \quad (2)$$

wobei R_ϑ der Widerstand bei der Temperatur ϑ ist und R_0 der Widerstand bei 0°C . Schätzen Sie den Fehler aus der graphischen Darstellung ab.

Aufgabe 4: Berechnen Sie den spezifischen Widerstand des Kupfer- und Widerstandsdrahtes bei einer Temperatur von 0°C . Entnehmen Sie diese Widerstandswerte R_0 aus dem Diagramm $R_\vartheta = f(\vartheta)$. Länge und Querschnitt der Drähte sind an der Apparatur angegeben.

Aufgabe 5: NTC-Widerstände (Negative Temperature Coefficient) sind Halbleiterwiderstände mit hohem negativem Temperaturkoeffizient. Die Temperaturabhängigkeit des NTC-Widerstandes lässt sich mit folgender Gleichung beschreiben:

$$R_T = A * e^{\frac{B}{T}}. \quad (3)$$

Hierbei ist R_T der Widerstand des NTC-Widerstandes bei der Temperatur T in Kelvin und A und B sind Materialkonstanten. Tragen Sie den Widerstandswert des NTC-Widerstandes logarithmisch (Einfachlogarithmisches Papier mit drei Dekaten verwenden) über $1/T$ auf. Warum ist es zweckmäßig eine logarithmische Skalierung zu wählen?

Versuch 31 Optische Abbildung

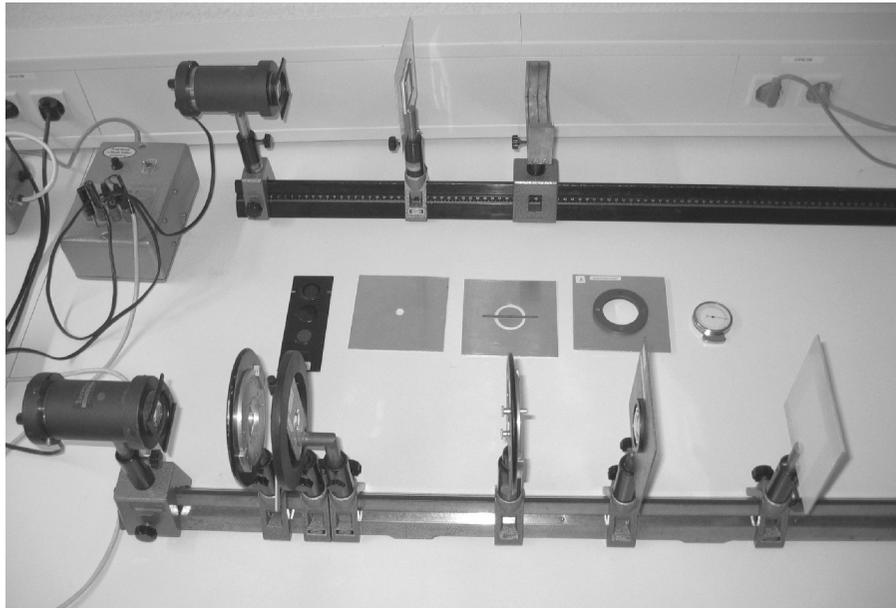


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Optische Abbildung.

I Messaufbau

- Optische Schiene.
- Lampe mit Kondensator und verschiebbaren Farbfiltern.
- 2 bikonvex Linsen, 1 Achromat- Linse.
- Loch- und Ringblende.
- Fassung zur Aufnahme der Linsen und Blenden.
- Schirm.
- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter.

- verstellbarer Messspalt (Spaltbreite ist in mm geeicht).
- Zwischenbild mit mm-Einteilung.

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer,
- W. Demtröder *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, Springer- Verlag.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Abbildung durch Linsen, Linsenfehler (speziell sphärische und chromatische Aberration), Snelliussches Brechungsgesetz, Dispersion, graphische Konstruktion der optischen Abbildung, Mikroskop: Strahlengang und Auflösungsvermögen, Beugung am Spalt, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung.

Verständnisfragen:

1. Konstruieren Sie die Abbildung eines Objekts durch eine Sammellinse und eine Streulinse.
2. Was ist der Unterschied zwischen den Begriffen Abbildungsmaßstab und Vergrößerung?
3. Was ist die physikalische Ursache für die chromatische- und sphärische Aberration?
4. Wie funktioniert die Entspiegelung einer Linse?
5. Wie groß ist das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges? Wodurch wird es limitiert? Wie können kleinere Gegenstände betrachtet werden?
6. Aus welchen optischen Elementen besteht ein Mikroskop?

7. Was ist die Aufgabe des Objektivs, was die Aufgabe des Okulars? Was ist das Messprinzip des Mikroskops?
8. Wie ist die Auflösung definiert?
9. Welche Vergrößerung kann man mit einem professionellen Mikroskop erreichen?
10. Auf einem Mikroskopobjektiv sind folgende Werte abgedruckt: Vergrößerung=40, Tubuslänge=160, NA=0,65. Wie groß ist die Brennweite des Objektivs und wie hoch ist das Auflösungsvermögen wenn mit grünem Licht beleuchtet wird?
11. Qualitativ: Was ist ein Elektronenmikroskop und warum erreicht man damit eine so viel höhere Auflösung als mit einem optischen Mikroskop?

IV Aufgabe

- Durch variieren der Bild- und Gegenstandsweite sollen die Eigenschaften der optischen Abbildung untersucht werden (Abbildungsmaßstab, virtuelles und reelles Bild, etc.)
- Es ist die Brennweite einer Sammellinse zu messen. Die chromatische Aberration ist experimentell zu untersuchen und der Einfluss der sphärischen Aberration ist qualitativ zu beobachten.
- Bauen Sie ein Mikroskop auf einer optischen Bank auf. Messen Sie a) die Gitterkonstanten der beiden Strichgitter, b) das Auflösungsvermögen des Objektivs in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Objektivs (quantitativ) und der Wellenlänge (qualitativ).

V Grundlagen

V.1 Reele und virtuelle Bilder

Bei einer optischen Abbildung werden die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel nach Durchgang durch ein optisches System (Linsen, Spiegel, Auge, „Lochkamera“) in einem Punkt, dem Bildpunkt, wieder vereinigt. Ein einfaches Beispiel für ein abbildendes optisches System ist der Planspiegel (Abbildung 2). Die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel werden am

Spiegel nach dem Reflexionsgesetz in den unteren Halbraum divergent reflektiert. Dadurch scheinen für einen Beobachter alle Lichtbündel aus einem Punkt hinter dem Spiegel zu kommen, obwohl die reflektierten Lichtbündel diesen Bildpunkt überhaupt nicht erreichen. Das Spiegelbild wird daher auch als virtuelles Bild bezeichnet. Allgemein entsteht ein virtuelles Bild im Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung divergenter Lichtbündel. Solche Bilder lassen sich nicht mit einem Schirm (Mattscheibe) auffangen.

Im Gegensatz zum Planspiegel erzeugt ein sphärischer Spiegel ein reelles Bild. Das Abbildungsprinzip beruht auch hier allein auf dem Reflexionsgesetz. Allerdings bedingt die Krümmung der Spiegeloberfläche, dass die Lichtbündel nicht divergieren sondern sich im Bildpunkt schneiden. Allgemein entsteht ein reelles Bild im Schnittpunkt von Lichtbündeln, die vom gleichen Objektpunkt ausgehen. Das reelle Bild lässt sich mit einem Schirm auffangen.

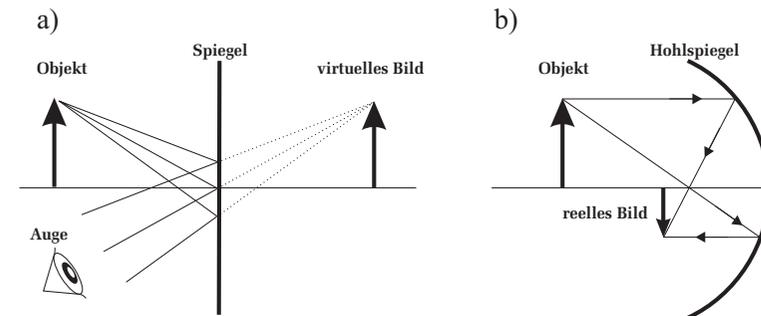


Abbildung 2: a) Virtuelles Bild eines Planspiegels. b) Reelles Bild eines Hohlspiegels.

Brechung an sphärischen Flächen

Treffen **parallel** zur optischen Achse verlaufende Lichtbündel auf eine transparente, kugelförmige Fläche, die das Medium 2 begrenzt, so werden alle Lichtbündel in einem Punkt auf der optischen Achse gebrochen (Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser Teilbündel wird als Brennpunkt F bezeichnet. Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Kugeloberfläche entlang der optischen Achse, heißt Brennweite f . Mit Hilfe einfacher geometrischen Überlegungen und unter Berücksichtigung des Brechungsgesetz folgt für die

Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \frac{1}{r}, \quad (1)$$

wobei n_i die Brechungsindizes der beiden Medien darstellen und r der Radius der Kugelkrümmung ist. Diese Gleichung gilt allerdings nur für kleine Einfallswinkel bzw. nur für Lichtbündel, die in einem geringen Abstand h zur optischen Achse auf die Linse treffen. In der Literatur wird diese Näherung auch als paraxiale oder als Gaußsche Näherung bezeichnet. Bereits mit einer einzigen sphärischen

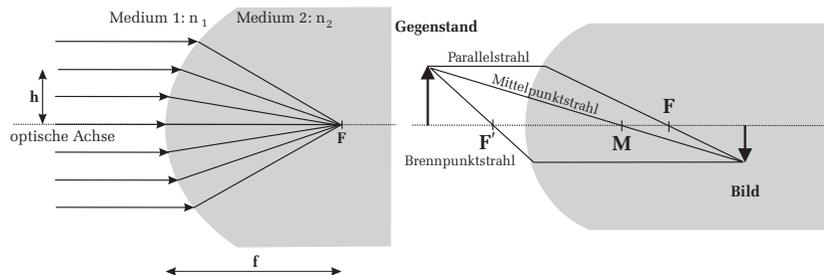


Abbildung 3: Links: Brechung von parallelen Lichtbündeln an einer sphärischen Fläche. Rechts: Abbildung eines Gegenstandes durch ein Kugelsegment.

Grenzfläche lässt sich ein Gegenstand abbilden (Abbildung 3 rechts). Um das Bild des Gegenstandes geometrisch zu konstruieren, bedarf es lediglich zweier Strahlenbündel¹, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen. Besonders einfach ist die Bildkonstruktion, wenn man spezielle Lichtbündel einzeichnet, nämlich einen der gegenstandsseitig parallel zur optischen Achse verläuft und einen der durch den Mittelpunkt M der Kugeloberfläche geht. Mittelpunktstrahlen fallen senkrecht auf die Kugeloberfläche und werden daher nicht gebrochen. Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie zu Brennpunktstrahlen werden (siehe Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entspricht dem abgebildeten Bildpunkt. Zur Konsistenzprüfung kann zusätzlich noch ein dritter Strahl eingezeichnet werden: Aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges folgt, dass ein Strahl, der im Medium 2 parallel zur optischen Achse läuft, im Medium 1 die optische Achse im gegenstandsseitigen Brennpunkt F' schneidet. Von der Gegenstandsseite aus gesehen bedeutet dies, dass ein Brennpunktstrahl zu einem bildseitigen Parallelstrahl wird.

¹Der Begriff Strahlenbündel und Strahl wird in diesem Text synonym verwendet.

Zusammenfassend sind bei der geometrischen Abbildung eines Gegenstandspunktes, folgende drei Regeln zu beachten:

1. Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt
2. Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen
3. Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen

V.2 Linsen

Linsen, speziell sphärische Linsen, bestehen aus einem transparenten Material mit dem Brechungsindex n und sind durch eine kugelförmige Fläche begrenzt. Trifft ein Lichtbündel auf die Linse ist zu berücksichtigen, dass der Strahl insgesamt zweimal an den Grenzflächen mit den Radien r_1, r_2 gebrochen wird. Für dünne Linsen, bei denen die Dicke klein gegenüber der Krümmungsradien ist, ergibt sich für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

Die Brennweite hängt also nur vom Brechungsindex und von den Radien der Grenzflächen ab. Je nach Vorzeichen und Kombination der Grenzflächen definiert man verschiedene Linsentypen. Eine Zusammenfassung kann Abbildung 4 entnommen werden. Bei der geometrischen Konstruktion der Abbildung durch eine dünne Linse, gelten die gleichen Merksätze wie bei der Brechung an einer einzelnen sphärischen Fläche: **Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt, gegenstandsseitige Parallelstrahlen werden zu bildseitigen Brennpunktstrahlen und gegenstandsseitige Brennpunktstrahlen werden zu bildseitigen Parallelstrahlen.** Die Brechung erfolgt dabei an der Mittelebene der Linse (Abbildung 5). Es soll nochmals betont werden, dass dies nur für dünne Linsen gilt. Im allgemeinen Fall hat eine Linse zwei sogenannte Hauptebenen, an denen die Brechungen erfolgen. Nur für dünne Linsen fallen diese Hauptebenen zusammen. Bei der optischen Abbildung mit einer Linse sind die Größen Bildweite b , Gegenstandsweite g und Brennweite f durch die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (3)$$

miteinander verknüpft. Bildweite und Gegenstandsweite stehen im direkten Zusammenhang mit der Gegenstandsgröße G und der Bildgröße B . Man definiert

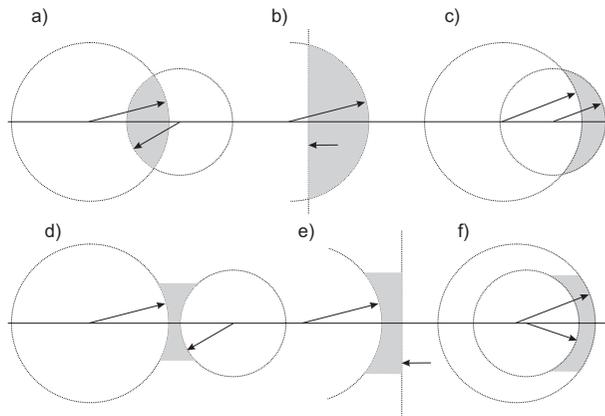


Abbildung 4: *Klassifizierung von Linsen: a) bikonvex b) plankonvex c) positiver Meniskus d) bikonkav e) plankonkav f) negativer Meniskus.*

den Abbildungsmaßstab β durch:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \tag{4}$$

der sich mit Gleichung (3) schreiben lässt als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{b}{f} - 1. \tag{5}$$

V.3 Messung der Brennweite einer Linse

Die Bestimmung der Brennweite einer Linse kann prinzipiell durch Messung der Gegenstands- und Bildweite unter Anwendung der Abbildungsgleichung (3) erfolgen. Allerdings ist diese Methode in der Regel mit größeren Fehlern behaftet, da die Abstände absolut gemessen werden. Dies setzt voraus, dass die Linse gut zentriert in die Fassung montiert sein muss. Für reale, „dicke“ Linsen kommt hinzu, dass sich die Abstände g und b nicht auf die Mittelebene sondern auf die Hauptebenen beziehen, deren genaue Lage im allgemeinen unbekannt ist. Diese Nachteile treten bei der sogenannten *Bessel-Methode* nicht auf. Bei diesem Verfahren (Abbildung 6) wird ausgenutzt, dass es bei einem konstanten Abstand

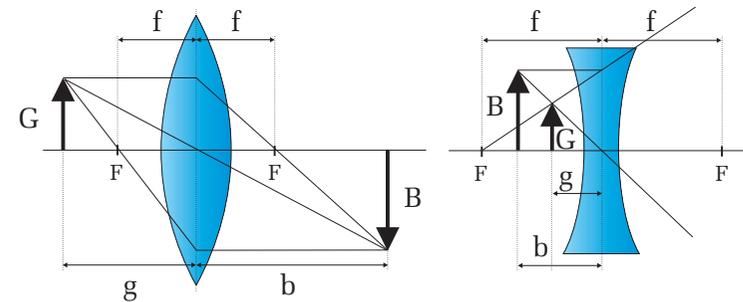


Abbildung 5: *Optische Abbildung durch eine dünne bikonvex Linse und eine bikonkav Linse.*

$L > 4f$ zwischen Bild und Gegenstand zwei Linsenstellungen gibt, die zu einer scharfen Abbildung führen. Bei einer Stellung findet eine Vergrößerung, bei der anderen eine Verkleinerung statt. Ist d der Abstand zwischen diesen beiden Stellungen, der über eine Differenzmessung recht genau ermittelt werden kann, so gilt für die Brennweite:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{6}$$

Die Genauigkeit des Besselverfahrens reicht aus, um bestimmte Abbildungsfehler (Linsenfehler) zu untersuchen. Bei sphärischen Linsen gilt Gleichung (3) nur für achsennahe Strahlen. Lichtbündel, die auf weiter außen von der optischen Achse gelegenen Zonen der Linse treffen, werden nicht mehr in den gleichen Punkt fokussiert und haben daher eine etwas andere Brennweite als das Linsenzentrum. Dieser Linsenfehler wird als sphärische Aberration bezeichnet. Es gibt mehrere Methoden die sphärische Aberration einer Linse zu minimieren. Am einfachsten gelingt dies durch Abblenden d.h. mit Hilfe einer Lochblende werden nur achsennahe Lichtbündel zur Abbildung zugelassen. Allerdings geht dies auf Kosten der Lichtstärke, die proportional zur Fläche der Linse ist. Je kleiner der Blendendurchmesser, desto schärfer ist zwar das Bild aber auch umso dunkler. Eine andere Methode ist die Verwendung von asphärischen Linsen. Solche Linsen sind so geschliffen, dass auch achsenferne Strahlen in den selben Punkt fokussiert werden wie achsennahe. Die Herstellung dieser Linsen ist allerdings sehr aufwendig, so dass diese vorwiegend nur in teuren Spezialoptiken eingesetzt werden.

Ein weiterer Linsenfehler ist die chromatische Aberration. Bei der Abbildung

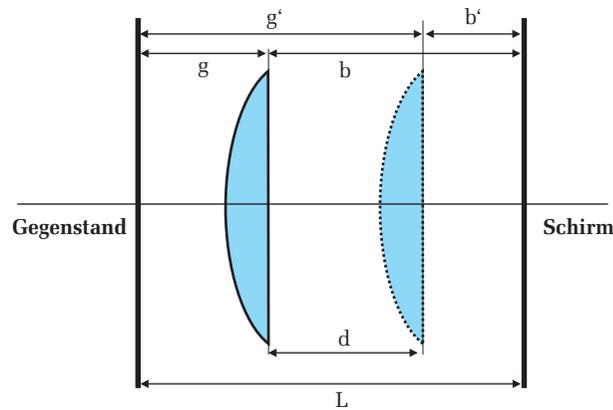


Abbildung 6: Prinzip des Bessel-Verfahren zur Brennweitenbestimmung.

eines Gegenstandes der mit weißem Licht beleuchtet wird, treten im Bild Farbsäume auf. Diese beruhen auf der Dispersion des Linsenmaterials. Nach Gleichung (2) geht in die Brennweite der Brechungsindex n ein, der wiederum von der Wellenlänge abhängt. Im Fall der normalen Dispersion hat blaues Licht beispielsweise einen größeren Brechungsindex als rotes und wird daher stärker gebrochen. Somit ist die Brennweite für kurzwelliges Licht kleiner als für Licht mit einer größeren Wellenlänge.

Da achsenferne Lichtbündel am meisten zur Aberration beitragen, lässt sich der Farbfehler ebenfalls durch Abblenden reduzieren. Eine bessere Methode ist die Verwendung von sogenannten Achromaten. Dabei handelt es sich um Linsensysteme mit unterschiedlicher Dispersion und Brechkraft, die den Farbfehler für zwei Wellenlängen vollständig ausgleichen können.

V.4 Vergrößerung des Seh winkels: Lupe und Mikroskop

Wenn Sie einen kleinen Gegenstand möglichst groß sehen möchten, so verringern Sie den Abstand zwischen Ihrem Auge und dem Gegenstand, indem Sie beispielsweise den Gegenstand näher an Ihr Auge herantreiben. Dadurch wird das Bild auf der Netzhaut größer dargestellt und Sie können feinere Details erkennen. Aus dem linken Teilbild in Abbildung 7 ist zu erkennen, dass das Bild auf der Netzhaut um so größer ist je geringer der Abstand zum Gegenstand ist oder um so größer der Sehinkel α ist. Allerdings können Sie den Gegenstand

nicht beliebig nah an das Auge herantreiben, da die Ziliarmuskulatur des Auges den Krümmungsradius der Linse nur bedingt variieren kann (Akkommodation). Unterhalb einer bestimmten Entfernung kann der Gegenstand nicht mehr auf die Netzhaut fokussiert werden und der Gegenstand erscheint verschwommen. Der kleinste Abstand auf dem ein gesundes Auge über einen längeren Zeitraum ermüdungsfrei akkomodieren kann, heißt deutliche Sehweite s_0 . Der Wert von s_0 ist auf 25 cm festgelegt. Überprüfen Sie doch mal die deutliche Sehweite bei Ihnen selbst, in dem Sie z.B. diese Anleitung an Ihr Auge herantreiben und den Abstand messen, bei dem Sie auch über einen längeren Zeitraum den Text ohne Anstrengung lesen können. Sollen noch feinere Details eines Objekts erkannt

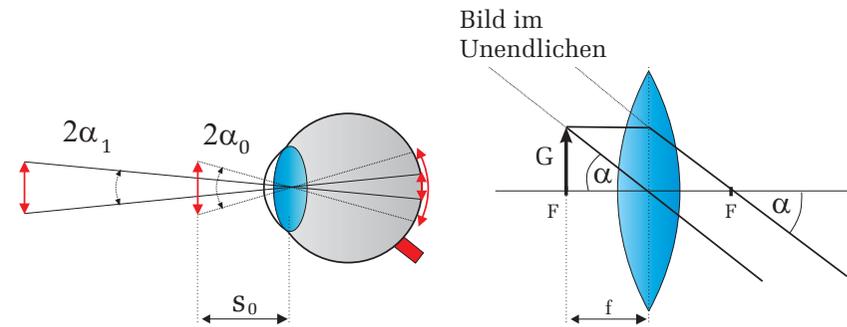


Abbildung 7: Links: Je größer der Sehinkel α desto größer ist das Bild auf der Netzhaut. Für Abstände kleiner als die deutliche Sehweite $s_0 \doteq 25$ cm kann das Bild in der Regel nicht mehr scharf auf die Netzhaut abgebildet werden. Rechts: Wirkungsweise einer Lupe.

werden, so benötigt man optische Instrumente, die den Sehinkel und damit die Bildgröße auf der Netzhaut vergrößern. Das einfachste Instrument ist die Lupe. Eine Lupe besteht lediglich aus einer einfachen biconvexen Linse mittlerer Brennweite. Ist bei der Abbildung die Gegenstandsweite kleiner oder gleich der Brennweite so erfolgt eine Vergrößerung des Seh winkels. In Abbildung 7 rechts liegt der Gegenstand z.B. genau in der Brennebene der Linse. In diesem Fall ist das Auge völlig entspannt und somit auf Unendlich akkomodiert. Für den Sehinkel α_L , wobei der Index L für Lupe steht, ergibt sich:

$$\tan \alpha_L = \frac{G}{f}. \quad (7)$$

Ohne Lupe, bei dem sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite $s_0=25\text{ cm}$ befindet, erhält man dagegen für den Sehwinkel α_0 :

$$\tan \alpha_0 = \frac{G}{s_0}. \tag{8}$$

Definiert man als Vergrößerung V das Verhältnis der Sehwinkel mit Lupe (bzw. allgemein mit einem zusätzlichen optischen Instrument) und ohne Lupe (allgemein ohne optisches Instrument) in der deutlichen Sehweite, so ergibt sich für die Vergrößerung V :

$$V_{Lupe} = \frac{\tan \alpha_L}{\tan \alpha_0} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \tag{9}$$

Wenn im Folgenden von Vergrößerung gesprochen wird, ist grundsätzlich die Vergrößerung des Sehwinkels gemeint!

Typische Werte für die Brennweite einer Lupe liegen zwischen 25 mm und 50 mm. Werte unter 25 mm können nicht realisiert werden, da dann die Abbildungsfehler zu groß werden. Somit kann mit einer gewöhnlichen Lupe maximal eine 10-fache Vergrößerung erreicht werden.

Weitaus größere Vergrößerungen lassen sich mit einem Mikroskop erreichen. Ein Mikroskop besteht im wesentlichen aus zwei Linsen, dem Objektiv und dem Okular, die die Abbildung und Vergrößerung bewirken. Der Strahlengang ist in Abbildung 8 dargestellt. Der zu beobachtende Gegenstand G befindet sich in der Gegenstandsweite g etwas außerhalb der Brennweite des Objektivs. Mit dem Objektiv wird dieser Gegenstand in die Bildebene abgebildet. Es entsteht ein reelles, umgekehrtes Bild B , das im Folgenden als Zwischenbild bezeichnet wird. Mit dem Okular wird dieses Zwischenbild als Lupe betrachtet, d.h das Zwischenbild befindet sich genau in der Brennweite der Okularlinse, so dass das Auge auf Unendlich akkomodiert.

Um die Vergrößerung des Mikroskops zu bestimmen, muss wieder der Sehwinkel mit und ohne Mikroskop bestimmt werden. Für den Sehwinkel mit Mikroskop ergibt sich aus Abbildung 8:

$$\tan \alpha_M = \frac{B}{f_2}, \tag{10}$$

wobei B die Bildgröße des Zwischenbilds und f_2 die Okularbrennweite darstellt. Aus dem unteren Teilbild in Bild 8 kann zusätzlich abgelesen werden, dass sich

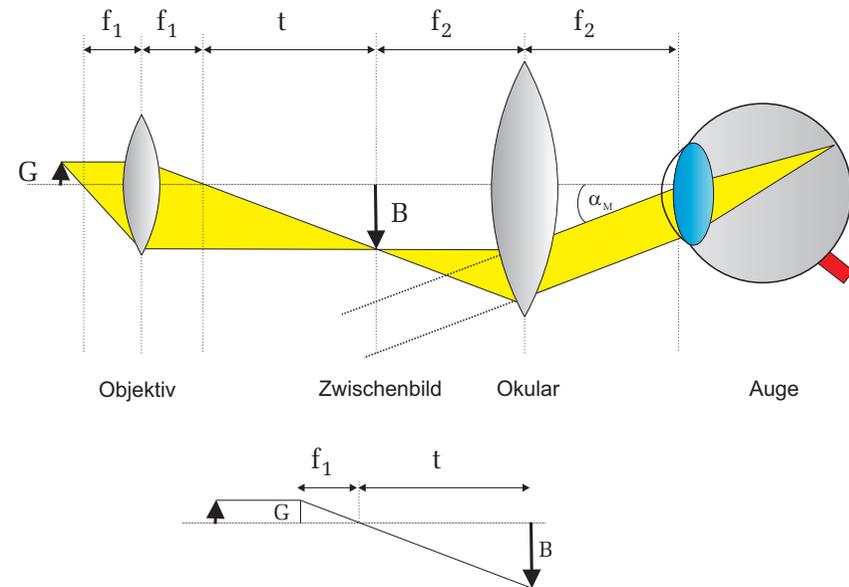


Abbildung 8: Strahlengang eines Mikroskops. Die untere Skizze dient zur Berechnung der Mikroskopvergrößerung.

$G : f_1$ genauso verhält wie $B : t$:

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B}{t}. \tag{11}$$

Die Größe t wird als Tubuslänge bezeichnet und gibt den Abstand zwischen gegenstandsseitigen Objektivbrennpunkt und bildseitigen Okularbrennpunkt an. Setzt man Gleichung (11) in (10) ein, so ergibt sich für den Sehwinkel:

$$\tan \alpha_M = \frac{Gt}{f_1 f_2} \tag{12}$$

und für die Vergrößerung

$$V_M = \frac{\tan \alpha_M}{\tan \alpha_0} = \frac{Gt}{f_1 f_2} / \frac{G}{s_0} = \frac{s_0}{f} = \frac{s_0 t}{f_1 f_2}. \tag{13}$$

Definiert man nun die Objektivvergrößerung durch

$$v_1 = \frac{t}{f_1} \tag{14}$$

und schreibt für die Okularvergrößerung nach Gleichung (9)

$$v_2 = \frac{s_o}{f_2}, \tag{15}$$

so ist die Gesamtvergrößerung das Produkt dieser beiden Einzelvergrößerungen:

$$V_M = v_1 v_2 = \frac{t}{f_1} \frac{s_o}{f_2}. \tag{16}$$

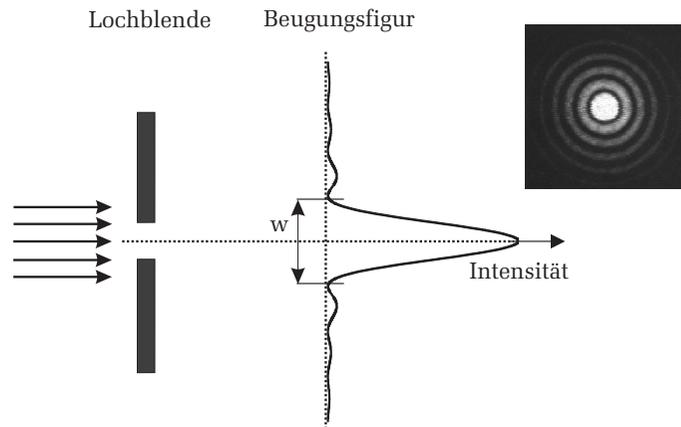


Abbildung 9: *Beugung an einem Spalt.* Auf einem hinter dem Spalt befindlichen Schirm wird nicht ein scharfer Lichtstreifen dargestellt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern eine Beugungsfigur mit einem sehr hellen Maximum, gefolgt von Nebenmaxima, dessen Intensität mit höherer Ordnung rasch abfällt. Das Bild rechts zeigt die Beugungsfigur einer Lochblende.

Offenbar könnte man meinen, dass die Gesamtvergrößerung beliebig erhöht werden kann, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Mikroskops sehr groß wählt. In der Realität ist aber die nutzbare Vergrößerung aufgrund der Wellennatur des Lichtes durch die Beugung begrenzt.

Die Beugung ist eine spezielle Interferenzerscheinung von Wellen an geometrischen Hindernissen (Spalt, Lochblende etc.). Bei einem Mikroskop entspricht solch ein Hindernis beispielsweise dem endlichen Durchmesser des Objektivs, das als Lochblende wirkt.

Wird eine Lochblende mit parallelem Licht beleuchtet, so erkennt man auf einem dahinter stehenden Schirm nicht einen hellen Lichtpunkt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern ein Beugungsbild mit einer Intensitätsverteilung wie sie in Abbildung 9 zu sehen ist. Ihr Betreuer wird Ihnen dies mit Hilfe eines Lasers und einer Spaltblende demonstrieren. Das Beugungsbild besitzt ein sehr helles zentrales Maximum, gefolgt von mehreren Minima und Nebenmaxima, dessen Intensitäten allerdings schnell abnehmen. Bei einem

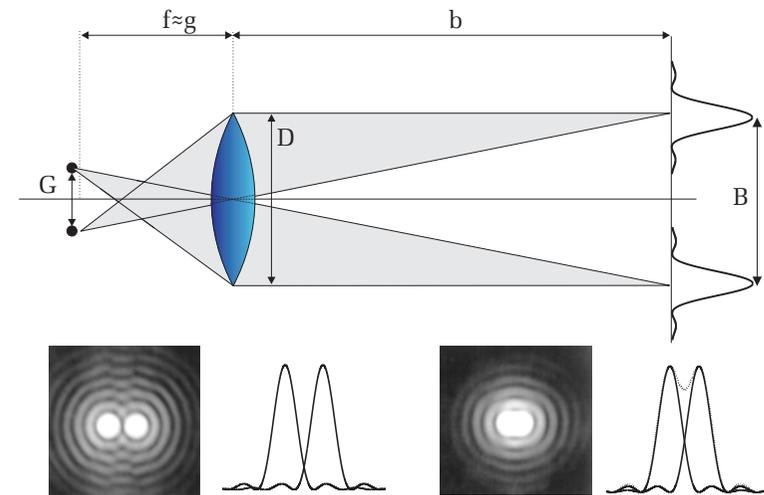


Abbildung 10: *Jeder Objektpunkt erzeugt im Zwischenbild eine Beugungsfigur.* Damit zwei Punkte noch getrennt zu erkennen sind, dürfen sich die Beugungsbilder nicht zu stark überlappen. Im unteren rechten Bild sind die beiden Punkte nicht mehr unterscheidbar.

Mikroskop erzeugt nun jeder Punkt des darzustellenden Gegenstands solch ein Beugungsbild im Zwischenbild (Abbildung 10). Die Breite w des zentralen Maximums beträgt:

$$w = 2,44 \frac{\lambda b}{D}. \tag{17}$$

Die Herleitung dieser Gleichung können Sie z.B. im Demtröder, *Experimentalphysik 2*, nachlesen.

Je kleiner der Abstand g zweier Objektpunkte, desto näher rücken auch die Beugungsbilder dieser Punkte im Zwischenbild zusammen. Ab einem gewissen Abstand b_{min} überschneiden sich die Beugungsbilder so stark, dass sie nicht mehr als zwei getrennte Objekte wahrnehmbar sind. Um dies zu quantifizieren, definiert man das Auflösungsvermögen nach dem Rayleigh-Kriterium: Zwei Objektpunkte sind nur dann voneinander unterscheidbar, wenn der Abstand der beiden Beugungsfiguren größer ist als die halbe Breite des zentralen Maximums. Die Auflösungsgrenze ist also dann erreicht, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das Beugungsminimum des anderen fällt. Der minimale Abstand der Beugungsfiguren ist dann nach Gleichung (17):

$$B_{min} = 1,22 \frac{\lambda b}{D}. \tag{18}$$

Mit Hilfe von (4) erhält man mit $B_{min}/b = G_{min}/g$ den kleinsten Abstand G_{min}

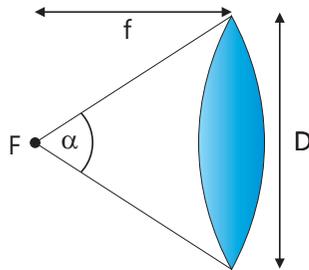


Abbildung 11: Numerische Apertur einer dünnen Linse.

zweier Objektpunkte, der mit dem Mikroskop noch aufgelöst werden kann:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda g}{D}. \tag{19}$$

Da die Objektpunkte praktisch in der Brennebene der Objektivlinse liegen ($g \approx f$), können wir auch schreiben:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}. \tag{20}$$

Der Quotient D/f ist mit der sogenannten numerischen Apertur NA verknüpft (Abbildung 10). Diese ist definiert durch den Sinus des halben Öffnungswinkels

der Objektivlinse multipliziert mit dem Brechungsindex n des Materials zwischen Objektiv und Präparat (Stichwort Immersionsöl):

$$NA = n \sin \alpha = n \sin \left[\arctan \left(\frac{D}{2f} \right) \right] \approx n \frac{D}{2f}. \tag{21}$$

Somit folgt schließlich für das Auflösungsvermögen:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}, \tag{22}$$

bzw.:

$$G_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{NA}, \tag{23}$$



Abbildung 12: Kommerzielles Objektiv eines Lichtmikroskops. Die Objektivvergrößerung beträgt 40. Die Zahl 160 besagt, dass das Objektiv nur für Mikroskope mit einer Tubuslänge von 160 mm verwendet werden kann. Zusätzlich ist noch die numerische Apertur, $NA=0,65$ und die zu verwendene Deckglasdicke von $0,17$ mm angegeben.

VI Durchführung des Versuchs

Hinweis: Die Bilder dienen nur als Identifizierungshilfe für die einzelnen optischen Objekte und zeigen nicht den korrekten Aufbau für die einzelnen Aufgaben!

Aufgabe 1: Bestimmung der Linsenparameter der achromatisch korrigierten Linse



Abbildung 13: Optische Objekte für Aufgabe 1.

Bauen Sie auf der optischen Schiene einen Aufbau bestehend aus Lampe mit Kondensorlinse, Gegenstand, Linse und Bildschirm auf. Verwenden Sie dabei die achromatisch korrigierte Linse (Achromat). Als Gegenstand stehen zwei Dias mit einer Teststruktur zur Verfügung. Verändern Sie nun die Bild- oder Gegenstandsweite so, dass Sie ein scharfes Bild erkennen können. Notieren Sie die Bild- und Gegenstandsweiten und berechnen Sie sofort die Brennweite.

Fertigen Sie folgende Tabelle an und messen Sie bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten, die Bildweite/Bildgröße, die Art des Bildes (reell oder virtuell) und die Ausrichtung. In den Bereichen $\infty > g > 2f$ und $2f > g > f$ sind jeweils drei verschiedenen Positionen auszumessen. Falls das Bild zu klein wird, verwenden Sie das Dia mit großen Doppelpfeil als Gegenstand. Andernfalls nehmen Sie das Dia mit der komplexen Teststruktur. Notieren Sie sich auch bei jeder Messung die Fehler.

	g	G	b	B	Art	Richtung
$\infty > g > 2f$					reel/virtuell	aufrecht/umgekehrt
$g = 2f$						
$2f > g > f$						
$g = f$						
$f > g$						

Aufgabe 2: Messung der Brennweite der bikonvex Linse L_1 nach dem Besselverfahren

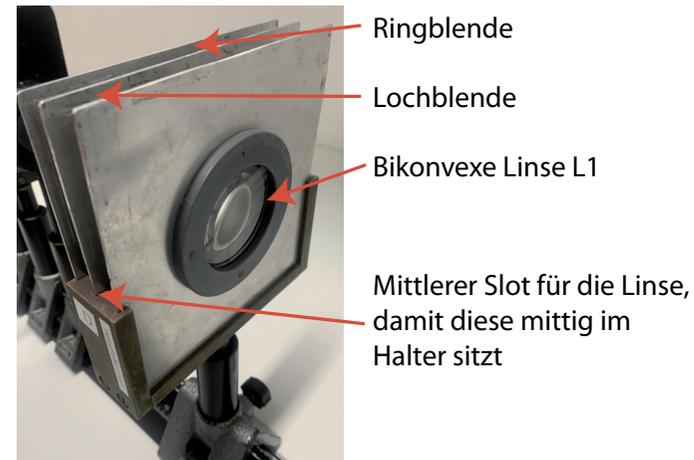


Abbildung 14: Optische Objekte für Aufgabe 2 und 3.

Stellen Sie auf der optischen Bank einen geeigneten Abstand zwischen dem Objekt und dem Abbildungsschirm ein (etwa $L \approx 5f$ bis $6f$, ein Wert für f ist am Linsenhalter angegeben). Platzieren Sie den Halter der bikonvexen Linse dazwischen und überprüfen Sie, ob die Linse im mittleren Slot eingesteckt ist. Suchen Sie die beiden Scharfeinstellungen auf. Beachten Sie dabei, dass der weiße Schirm nicht in der Mitte der Halterung sitzt. Sie müssen daher die Dicke des Alu-Blechtes (2 mm) beim Abstand L berücksichtigen (Die Seite mit dem Gitter ist in der Mitte).

Vermessen Sie je dreimal abwechselnd die beiden Positionen der Linse L_1 , die für ein scharfes Bild sorgen.

Aufgabe 3: Untersuchung der chromatischen Aberration

Wiederholen Sie die Messung der vorherigen Aufgabe je einmal mit einem Rotfilter und einmal mit einem Blaufilter. Am Ende müssen Sie 6 Positionsmessungen der Linse für jedes verwendetes Filter notiert haben.

Beobachten Sie qualitativ die sphärische Aberration, indem Sie einmal die Lochblende und einmal die Ringblende vor die Linse stellen: Wie ändert sich d ? (Größeres d heißt kleineres f .)

Aufgabe 4: Aufbau eines Mikroskops auf der optischen Bank

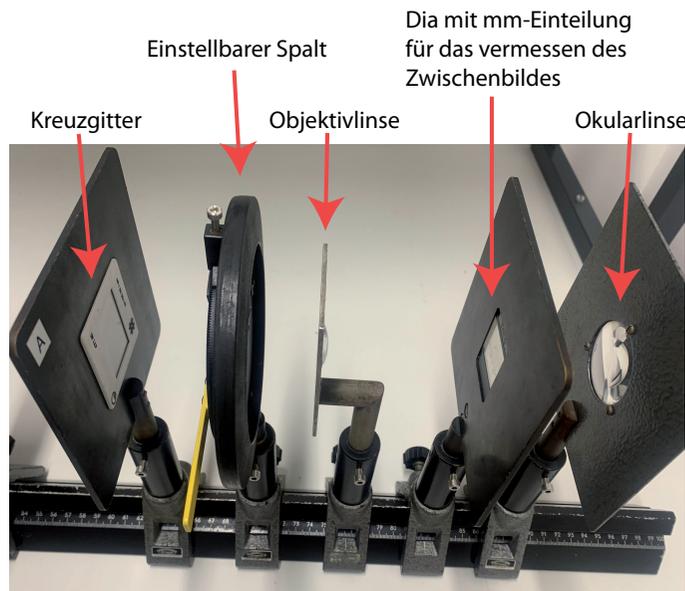


Abbildung 15: Optische Objekte für Aufgabe 4.

Bauen Sie das Objekt (Dia mit Kreuzgitter) hinter die Lampe mit dem eingesetzten Grünfilter ein. Dicht dahinter wird der einstellbare Spalt platziert. Dicht meint hier wenige mm dahinter. Wieder dicht hinter dem einstellbaren Spalt wird das Objektiv eingesetzt. Der Abstand Linsenebene des Objektivs bis zur Mitte des Reiters beträgt genau 3 cm. Der Schirm für das Zwischenbild (Dia mit mm-Teilung) wird im Abstand von 25 cm vom Objektiv aufgestellt. Vergessen Sie nicht die 3 cm zusätzlichen Abstand zwischen Objektivlinse und dem Objektivlinsenhalter. Hinter dem Dia für das Zwischenbild wird im Abstand

f_2 die Okularlinse. Die Brennweite der Okularlinse ist auf dem Linsenhalter notiert. Ganz am Ende der optischen Bank platzieren Sie die Abbildungsebene. Zur Scharfeinstellung verschieben Sie das Kreuzgitter bis ein scharfes Bild der Gitterstrukturen auf dem Schirm zu sehen ist. Vergewissern Sie sich, dass der einstellbare Spalt voll geöffnet ist. Lampe und Kondensor werden so eingestellt, dass das Bild des Gitters in vernünftiger Helligkeit erscheint. Zu diesem Zweck kann der Lampensockel im Gehäuse verschoben werden.

a) Aus der Bildweite b und f_1 lässt sich der Abbildungsmaßstab berechnen (Gleichung (5)). Bestimmen Sie aus der Größe des Zwischenbildes (z.B. Zahl der Striche pro 5 mm) bei weit geöffnetem Spalt und mit grünem Licht den Strichabstand des Gitters.

b) Verringern Sie nun die Öffnung des Messspalts und beobachten Sie dabei wie die senkrechten Strukturen des Kreuzgitters verschwinden. Messen Sie dreimal die Spaltbreite bei der die senkrechten Strukturen gerade nicht mehr auflösbar sind. Notieren Sie den Abstand des Spalts zum Objekt. Machen Sie sich klar, dass durch das Verengen des Spalts das Auflösungsvermögen nur in einer Dimension eingeschränkt wird! Beobachten Sie qualitativ den Einfluss der Wellenlänge auf das Auflösungsvermögen, in dem Sie das rote und das blaue Farbfilter benutzen.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Werten Sie Ihre Ergebnisse anhand folgender Tabelle aus (β bezeichnet den Abbildungsmaßstab.) Konstruieren Sie grafisch die Abbildung eines Objekts für die jeweiligen Gegenstandsweiten.

Nr.	g	b	Art	Richtung	β
I	$\infty > g > 2f$	z.B. $2f = b > f$	reel/ virtuell	aufrecht/ umgekehrt	z.B. > 1
II	$g = 2f$				
III	$2f > g > f$				
IV	$g = f$				
V	$f > g$				

Zeichnen Sie Ihre gemessenen Werte für die Bild- und Gegenstandsweite in ein Diagramm ein. Tragen Sie dazu immer ein Wertepaar b, g so auf, dass die Gegenstandsweite auf der Abszisse und die Bildweite auf der Ordinate liegt und

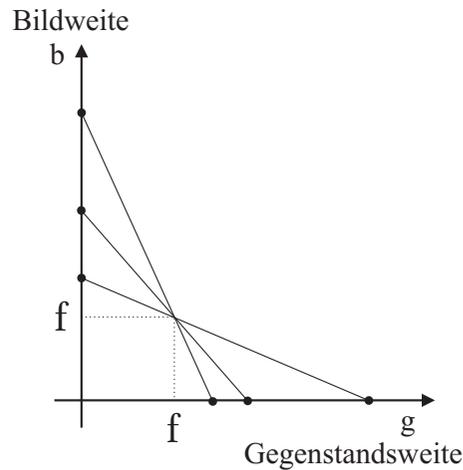


Abbildung 16: Grafische Bestimmung der Brennweite.

verbinden Sie die beiden Punkte durch eine Gerade (Abbildung 16). Alle Linien schneiden sich in einem Punkt, aus dem die Brennweite abgelesen werden kann. Schätzen Sie den Fehler ab.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Brennweite nach dem Besselverfahren und geben Sie auch die Fehler Ihrer Messungen an.

Aufgabe 3: Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse bezüglich der untersuchten Linsenfehler.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Gitterkonstante des Kreuzgitters und bestimmen Sie das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Berechnen Sie aus der Breite des Spalts und seinem Abstand vom Objekt den Öffnungswinkel des Systems und damit das Auflösungsvermögen; für λ wird der Wert 550 nm eingesetzt. Der erhaltene Wert wird mit der zuvor bestimmten Gitterkonstante verglichen.

Versuch 41 Temperaturmessung



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Pyrometer
- Pt100-Thermometer (Klasse B)
- Konstantstromquelle 1 mA
- Dewargefäß
- Gasthermometer
- Heizbad mit Rührvorrichtung

- Thermoelement für hohe Temperaturen (PtRh, Typ B oder Typ S) mit Eichabelle
- Multimeter
- Butangas-Bunsenbrenner
- Schutzbrille und Schutzhandschuhe

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Temperatur, absoluter Nullpunkt, Gasgesetze, Zustandsänderungen des idealen Gases, reale Gase, van der Waals- Gleichung, Thermoelement, Plancksches Strahlungsgesetz.

Verständnisfragen:

1. Was ist Wärme und was ist Temperatur?
2. Was für Thermometer gibt es? Auf welchen physikalischen Prinzipien beruhen sie? Welche Vor- oder Nachteile bei der Anwendung ergeben sich daraus?
3. Wie funktioniert ein Gasthermometer? Warum ist dieses Thermometer für eine absolute Temperaturmessung gut geeignet? Kann man ein beliebiges Gas nehmen? Bis zu welchen Temperaturen halten Sie ein Gasthermometer für geeignet? Welches Gas würden Sie also nehmen?
4. Als Temperaturfixpunkte werden die Temperatur des kochenden Wassers und die Schmelztemperatur des Eises (Eis-Wassermischung) genommen, die

relativ leicht realisiert werden können. Von welchen äußeren Parametern hängen diese Fixpunkte ab?

5. Welche prinzipielle Möglichkeit zur Festlegung der Temperatur, unabhängig von einer Arbeitssubstanz, gibt es?
6. Wie funktioniert ein Thermoelement?
7. Wie lässt sich die Oberflächentemperatur von Sternen bestimmen? Wie unterscheiden sich die Spektren von Sirius ($T \approx 10000 \text{ K}$) und der Sonne ($T \approx 6500 \text{ K}$)?

IV Aufgaben

- Temperaturmessung mit Hilfe eines Gasthermometers und eines Platin- Widerstandsthermometers im Bereich zwischen dem Siedepunkt des Wassers und dem Siedepunkt von flüssigem Stickstoff.
- Messungen mit einem Infrarot- Thermometer im Bereich von 0°C bis 100°C .
- Als typische Anwendung eines Thermoelementes wird mit dem PtRh-Element die Temperaturverteilung einer Bunsenbrennerflamme gemessen.

V Grundlagen

Der thermische Zustand eines Stoffes wird durch die Temperatur charakterisiert. Zur Messung dieser Größe benutzt man Instrumente (Thermometer), die die Temperaturabhängigkeit verschiedener physikalischer Größen ausnutzen. Dazu gehören zum Beispiel Ausdehnungsthermometer (Flüssigkeitsthermometer, Gasthermometer), deren Prinzip auf der Temperaturabhängigkeit des Volumens eines Stoffes beruht. Eine weitere große Klasse von Thermometern sind Widerstandsthermometer wie Platin-Thermometer oder Halbleiterthermometer (NTC, PTC). Bei diesen hängt der elektrische Widerstand von der Temperatur ab. Thermoelemente bestehen aus zwei unterschiedlichen, miteinander kontaktierten Metalldrähten. Zwischen den Anschlüssen entsteht eine elektrische Spannung an, die von der Temperaturdifferenz der Kontaktstelle und den Anschlüssen abhängt. In diesem Versuch werden Sie auch Messungen mit einem Pyrometer durchführen. Solch ein Thermometer misst die von einem Körper ausgehende „Wärmestrahlung“, die im Idealfall nur von der Temperatur abhängt.

Weltweit gibt es verschiedene Temperaturskalen wie z.B. Celsius oder Fahrenheit, die auf zwei unterschiedlichen Fixpunkten aufbauen. Bei der Celsiuskala sind dies der Schmelz- und der Siedepunkt von Wasser. Der untere Fixpunkt der Fahrenheitskala entspricht der Temperatur einer speziellen Kältemischung, der obere Fixpunkt der „Körpertemperatur eines gesunden Menschen“. Solche Definitionen sind nicht besonders gut reproduzierbar. Aus physikalischer Sicht gibt es nur eine Temperaturskala, die sich aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableiten lässt: Die thermodynamische Temperatur- oder auch Kelvinskala.

Die derzeit gültige internationale Temperaturskala wurde 1990 (ITS-90) festgelegt. Sie definiert spezielle Temperaturfixpunkte im Bereich von $0,65 \text{ K}$ bis 2200 K . Zwischen diesen Temperaturwerten wird mittels definierter Thermometer interpoliert, die zuvor an den Fixpunkten kalibriert wurden. Zu diesen gehören insbesondere die Platin- Widerstandsthermometer (Messbereich ca. 10 K bis ca. 1200 K), das He-Gasthermometer und das He-Dampfdruckthermometer für Temperaturen kleiner als 30 K , sowie im Hochtemperaturbereich die Strahlungsthermometer.

V.1 Das Gasthermometer

Das Funktionsprinzip eines Gasthermometers lässt sich mit Hilfe der Idealen Gasgleichung beschreiben:

$$pV = NkT, \quad (1)$$

wobei p den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur, N die Teilchenzahl und k die Boltzmann- Konstante darstellen.

Befindet sich ein Gas in einem abgeschlossenen Behälter, so kann bei konstant gehaltenem Volumen die Temperatur des Gases durch eine Druckmessung bestimmt werden (Gesetz von Amontons):

$$T \propto p \quad \text{für } V = \text{konstant.} \quad (2)$$

Den Aufbau des im Praktikum eingesetzten Gasthermometers ist in Abbildung 2 dargestellt. Es besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon, der über eine Kapillare mit einem elektrischen Manometer verbunden ist. Die Genauigkeit, mit der die Temperatur gemessen werden kann, hängt von der Konstanz des Volumens und dem verwendeten Gas ab. Dabei müssen zwei systematische Fehler berücksichtigt werden. Zum einen dehnt sich der Glasballon bei Erwärmung

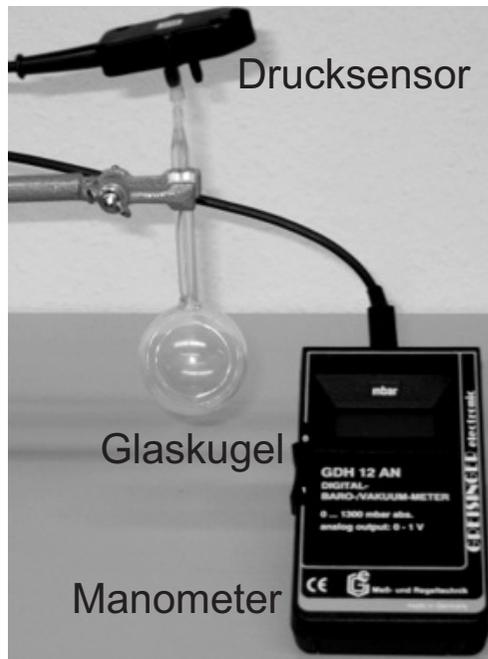


Abbildung 2: Aufbau eines Gasthermometers

aus, wodurch sich das Luftvolumen ändert. Dieser Fehler kann für diesen Versuch aber aufgrund des viel größeren Ausdehnungskoeffizienten von Luft gegenüber dem von Glas vernachlässigt werden. Zum anderen bleibt die in der Kapillare zwischen Glaskugel und Manometer eingeschlossene Luft annähernd auf Zimmertemperatur. Temperaturänderungen im Glasballon bewirken daher, dass dieses „schädliche Volumen“ komprimiert bzw. expandiert wird, wodurch sich ebenfalls das Luftvolumen ändert. Desweiteren ist Luft nur bedingt als ideales Gas anzusehen. Weit oberhalb des Verflüssigungspunktes und bei geringem Druck sind die Voraussetzungen eines idealen Gases sicherlich gut erfüllt. Allerdings werden Sie auch Messungen bei Temperaturen des flüssigen Stickstoffs durchführen. Da der Druck im Glasballon bei dieser Temperatur deutlich geringer ist als Atmosphärendruck, tritt keine Verflüssigung auf und die Luft im Glasbehälter kann immer noch als ideal angesehen werden.

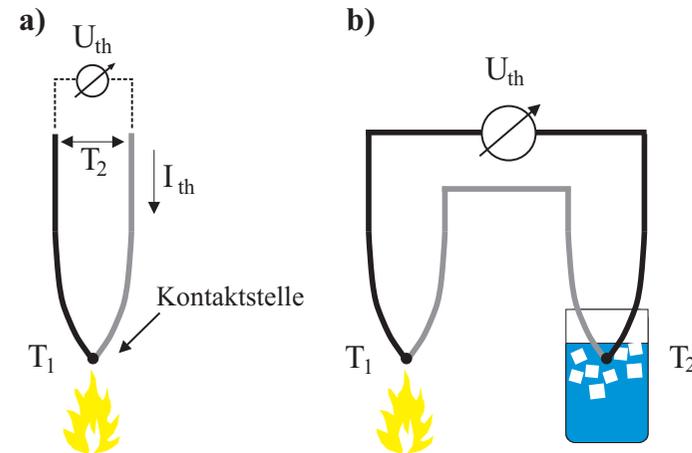


Abbildung 3: Funktionsprinzip eines Thermoelements

V.2 Das Thermoelement

Die Wirkungsweise eines Thermoelementes beruht auf dem Seebeck-Effekt: Bringt man zwei unterschiedliche Metalle miteinander in Kontakt, so baut sich an der Kontaktstelle eine elektrische Spannung auf, deren Betrag von der Art des Metalls und der Temperatur abhängt (Abbildung 3 links). Aus dem Metall mit der geringeren Austrittsarbeit fließen Elektronen in das Metall mit der größeren Austrittsarbeit. Es entsteht eine Thermospannung U_{th} . Bei geschlossenem Stromkreis fließt ein Thermostrom I_{th} ; die dafür „benötigte Energie“ wird der Wärmequelle entnommen.

Beträgt die Temperatur an der Kontaktstelle T_1 und an den beiden Enden der Metalle T_2 , so folgt für die Thermospannung:

$$U_{th} = K(T_1 - T_2), \quad (3)$$

wobei K eine Konstante darstellt, die von der Kombination der verwendeten Metalle abhängt.

Thermoelemente werden in Industrie und Technik sehr häufig eingesetzt. Die Vorteile dieser Sensoren sind kleine Dimensionen, gute mechanische und chemische Stabilität, die Anwendbarkeit über einen sehr großen Temperaturbereich sowie die geringen Herstellungskosten. Allerdings besitzen Thermoelemente auch

Nachteile. Es lassen sich nur relative Temperaturen messen. Soll die Temperatur T_1 absolut bestimmt werden, so muss die Vergleichstemperatur T_2 bekannt sein. Für einfache Messungen geringer Genauigkeit begnügt man sich mit der ungefähr konstanten Raumtemperatur T_2 als Vergleichstemperatur (Bei Messungen von sehr hohen Temperaturen ist auch diese Methode sehr genau). Für präzise Messungen der absoluten Temperatur wird aber eine konstante Vergleichstemperatur benötigt. Dazu verwendet man ein Thermoelement mit zwei Kontaktstellen (Abbildung 3 rechts), wobei ein Kontakt auf eine definierte Vergleichstemperatur T_2 eingestellt wird.

Die Spannung die an einem Thermoelement anliegt ist sehr gering. Bei dem hier verwendeten Platin-Rhodium Thermoelement beträgt die Spannung bei 50°C $2\ \mu\text{V}$, bei 1000°C $4,9\ \text{mV}$. Die Kennlinie (Zusammenhang Temperatur zu Thermospannung) der verwendeten Thermoelemente liegt in Form von Listen im Versuchsraum aus.

V.3 Das Platinwiderstandsthermometer

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren¹:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2), \quad (4)$$

mit den Koeffizienten

$$A = 3,9083 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$$

$$B = -5,775 \times 10^{-7} [^\circ\text{C}^{-2}].$$

R_0 ist der Nennwiderstand bei 0°C . Für ein Pt100-Thermometer gilt $R_0 = 100\ \Omega$. Damit kann aus dem gemessenen Widerstand R die Temperatur berechnet werden. Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0A + \sqrt{R_0^2A^2 - 4R_0B(R_0 - R)}}{2R_0B}. \quad (5)$$

Platinthermometer sind in vier Genauigkeitsklassen erhältlich. Die im Praktikum eingesetzten Thermometer sind in der Genauigkeitsklasse B eingeordnet.

¹Die DIN IEC 751 legt für den Platin-Widerstand eigentlich zwei Temperaturbereiche fest (-200°C bis 0°C und 0°C bis 850°C), die durch unterschiedliche Polynome definiert sind. Bei diesem Versuch reicht es aber aus, stets die angegebene quadratischen Näherung zu verwenden.

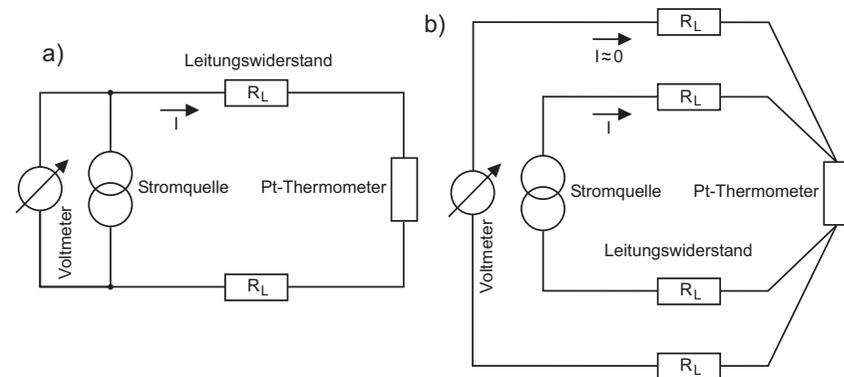


Abbildung 4: a) Zweileiterschaltung und b) Vierleiterschaltung zur Messung des Widerstands eines Pt-Thermometers.

In dieser Klasse beträgt der Temperaturfehler:

$$\Delta T = 0,30^\circ\text{C} + 0,005 |T|. \quad (6)$$

Der Widerstand eines Pt-Thermometers kann im einfachsten Fall nach dem Ohmschen Gesetz durch zwei verschiedene Methoden bestimmt werden. Entweder wird an den Pt-Widerstand eine konstante Spannung angelegt und der Strom gemessen oder es wird ein konstanter Strom eingeprägt und der Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand gemessen. Bei beiden Messmethoden tritt stets eine Eigenerwärmung des Pt-Thermometers auf, die die eigentliche Temperaturmessung verfälscht. Es ist daher sinnvoll, die Widerstandsmessung mit einem möglichst kleinen, konstanten Messstrom durchzuführen und den Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand mit einem Voltmeter zu messen. Im Praktikum verwenden Sie hierfür eine Konstantstromquelle die einen Strom von $1\ \text{mA}$ liefert. Bei der Spannungsmessung muss berücksichtigt werden, dass der Pt-Widerstand in der Regel an mehr oder weniger langen Zuleitungen angeschlossen ist, die wiederum selbst einen elektrischen Widerstand besitzen. Bei der Zweileiterschaltung in Abbildung 6 a) geht in die Widerstandsmessung der Widerstand der Messleitungen mit ein. Dieser Messfehler kann durch eine sogenannte Vierleiterschaltung vermieden werden. Dabei dienen zwei Leiter der Stromzufuhr und zwei weitere zur Messung des Spannungsabfalls. Da die Spannungsmessung mit hochohmigen Voltmetern (Innenwiderstand einige $\text{M}\Omega$) erfolgt, fließt nur ein sehr kleiner Strom durch die Leitungen und der Spannungsabfall an den

Zuleitungen ist vernachlässigbar klein.

V.4 Das Pyrometer

Jeder Körper dessen Temperatur größer als 0 K ist sendet Wärmestrahlung aus, deren Intensität nur von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen $\epsilon = 1$. Die Intensitätsverteilung der emittierten Strahlung eines solchen Körpers wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (7)$$

wobei M_λ die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement dA im Wellenlängenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$ in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt. Die gesamte von einem Körper abgestrahlte Leistung wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben. Integration von Gleichung (7) über die gesamte strahlende Fläche A und über alle Wellenlängen ergibt

$$P = \epsilon(T)\sigma AT^4, \quad (8)$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur beschreiben. Der Faktor $\epsilon(T) \leq 1$ berücksichtigt, dass reale Körper ein kleineres Emissionsvermögen aufweisen als der idealisiert schwarze Körper. Die abgestrahlte Leistung eines Körpers hängt demnach nur von der Fläche und der Temperatur ab. Auf dieser Eigenschaft beruhen berührungslose Pyrometer und Wärmebildkameras.

Bei Zimmertemperatur (≈ 300 K) liegt das Strahlungsmaximum im langwelligen Infrarotbereich bei einer Wellenlänge von etwa $10 \mu\text{m}$ (Abbildung 5). In diesem Bereich arbeiten kommerzielle IR-Pyrometer. Die im Praktikum eingesetzten Pyrometer integrieren die von einem Körper ausgehende Strahlung im Bereich von $8 \mu\text{m}$ bis $14 \mu\text{m}$.

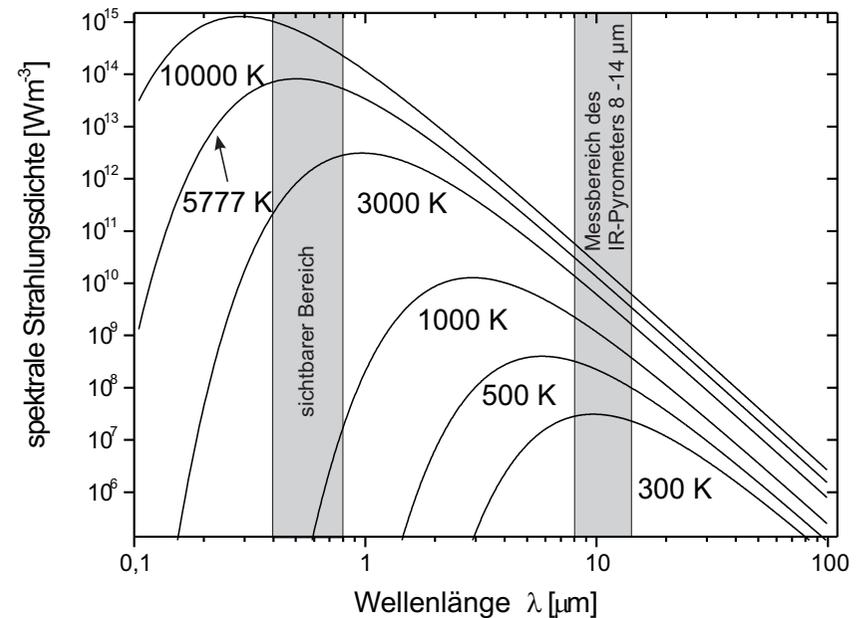


Abbildung 5: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

VI Durchführung des Versuchs

Achtung:

Kontakt mit flüssigem Stickstoff bzw. mit Trockeneis verursacht schwere Erfrierungen und Augenschäden. Beim Hantieren mit Trockeneis und flüssigem Stickstoff unbedingt Handschuhe anziehen und Schutzbrille aufsetzen. Da während des Versuchs erhebliche Mengen Stickstoff und Kohlendioxid verdampfen, sollte der Raum gut belüftet werden.

Aufgabe 1: Eichung der Thermometer bei 0°C

Inbetriebnahme des Pt100-Thermometer: Bauen Sie eine Vierleiterschaltung auf. Stecken Sie dazu den Stecker des Pt100-Thermometers in die Adapterbox. Die vier Anschlussleitungen können Sie dann an den 4 mm-Buchsen abgreifen. Verbinden Sie als nächstes je eine weiße und eine rote Buchse mit den entsprechenden Buchsen der Stromquelle. Wenn Sie das Voltmeter an die beiden noch freien Buchsen der Stromquelle anschließen (rote Buchse an den Anschluss Com des Voltmeters), haben Sie eine Zweileiterschaltung (siehe Abbildung 6) und Sie messen den Spannungsabfall über den Kabeln mit. Um eine Vierleiterschaltung zu bekommen, müssen Sie das Voltmeter direkt an die Adapterbox anschließen. Sie sollten bei der folgenden Messung wenigstens einmal beide Schaltungen ausprobieren. Bei 0°C beträgt der Pt100-Widerstand 100 Ω . Bei einem Messstrom von 1 mA erhalten Sie bei der Vierleiterschaltung einen Spannungsabfall von 100 mV. In der Zweileiterschaltung werden Sie einen größeren Wert messen, da Sie die Zuleitungswiderstände mitmessen. Allerdings sind die Kabel relativ kurz und der Effekt daher sehr klein.

Wenn Sie möchten, können Sie beide Schaltungen mit sehr langen Kabeln aufbauen. Ein entsprechendes vieradriges Kabel liegt im Labor aus.

Benutzen Sie für die Messung bei 0°C eine Wasser-Eis-Mischung. Füllen Sie des Becherglas zur Hälfte mit klein zerstoßenem Eis Gießen Sie mit Wasser bis zur Hälfte der Höhe des Becherglases auf. Platzieren Sie anschließend den Glasballon mittig im Becherglas. Die Glaskugel muss völlig mit Wasser bedeckt sein! Beobachten Sie gleichzeitig die Spannung am Pt100 sowie die am Pyrometer angezeigte Temperatur. Die Temperatur des schmelzenden Eises in Wasser als Fix- und Nullpunkt der später zu erstellenden Temperaturskala muss möglichst gut erreicht werden. Sie müssen dazu das Minimum des Spannungswertes des Pt100-Thermometers abwarten. Wenn sich die Spannung stabilisiert hat, protokollieren Sie die Spannung, den Druck des Gasvolumens und die Pyrometertemperatur. Die Pyrometertemperatur wird auf der Wasseroberfläche gemessen. Sie wird sich systematisch von der „wahren“ Temperatur unterscheiden, weil das Absorptionsvermögen von Wasser nicht Eins ist. Zusätzlich steht Ihnen ein Flüssigkeitsthermometer zu Verfügung, um die Temperatur des Wasser-Eis-Gemisches zu überprüfen. Allerdings müssen Sie berücksichtigen, dass diese Thermometer nur genau sind, wenn die auf dem Thermometer angegebene Immersionstiefe angegeben ist. Manche der Thermometer müssten für eine genaue Anzeige der Temperatur vollständig in das zu messende Medium eingetaucht werden. Folglich kann damit nur die Temperatur abgeschätzt werden. **Gerade für die Ablesung höherer Temperaturwerte empfiehlt es sich, die**

Tabelle mit der Pt100-Kennlinie für die Temperaturbestimmung zu nutzen!

Aufgabe 2: Temperaturmessung bis $T = 100^\circ\text{C}$

Schalten Sie jetzt die Heizplatte ein (**Heizeinstellung max. auf 300°C stellen, sonst kann das Heizelement durchbrennen!**) an und starten zusätzlich den Rührmechanismus, sodass sich kein sichtbarer Wirbel ausbildet. Warten Sie bis das Wasser auf etwa 10°C erhitzt wurde. Registrieren Sie bei Erreichen dieses Temperaturwertes Druck, Pyrometeranzeige und Pt100-Spannung. Wiederholen Sie diese Messungen in Schritten von ungefähr 10 Grad. Welcher Wert sich letztlich einstellt, ob 10°C oder eben $11,5^\circ\text{C}$, ist völlig unerheblich. Warten sie bis sich die Wassertemperatur um ca. 10°C erhöht hat und lesen Sie dann für jeden Schritt die Spannung am Pt100, den Druck und die Pyrometeranzeige ab. Nehmen Sie als letzten Messpunkt die Temperatur des siedenden Wassers auf. Lesen Sie den Luftdruck am Barometer im Gang ab und notieren Sie diesen Wert. Achtung: Das Pyrometer nicht direkt über das Wasser halten sondern von der Seite schräg auf die Wasseroberfläche richten. Sonst kann eindringender Wasserdampf die Messwerte verfälschen.

Aufgabe 3: Temperatur von Trockeneis und flüssigem Stickstoff am Siedepunkt

Lassen Sie den Glasballon zunächst einige Zeit abkühlen. Füllen Sie dann das Dewargefäß mit Trockeneis und Alkohol. Durch den Alkohol wird der Wärmekontakt zum Glasballon verbessert. Verwenden Sie dazu die schon fertige Trockeneis- Alkoholmischung in den beiden Dewargefäßen auf dem Waschbecken. Geben Sie wenn nötig noch etwas Trockeneis hinzu. Warten Sie zunächst bis sich die Temperatur stabilisiert hat. Dabei gut umrühren! Sobald sich die Messwerte stabilisiert haben, notieren Sie die Spannung und den Druck. Das Pyrometer ist bei diesen tiefen Temperaturen nicht mehr einsetzbar.

Schütten Sie nach Beendigung der Messung das Trockeneis-Alkohol Gemisch wieder zurück in die Dewargefäße auf dem Waschbecken.

Füllen sie jetzt das Dewargefäß schrittweise mit flüssigem Stickstoff und schieben Sie die Glaskugel **langsam** ein bis sie ganz vom Stickstoff bedeckt ist. Warten Sie bis die starke Verdampfung aufgehört hat und sich die Temperaturwerte stabilisieren. Registrieren sie PT100-Spannung und den Druck im Gasthermometer.

Nach Beendigung der Messung gießen Sie bitte den restlichen

flüssigen Stickstoff zurück in das große Dewargefäß.

Aufgabe 4: Messung von sehr hohen Temperaturen mit dem PtRh-Thermoelement

Hinweis: Diese Messung wird der Tutor mit beiden Thermoelementtypen vorführen und Sie notieren sich die Messwerte und fotografieren bzw. skizzieren die Flamme bei starker und schwacher Luftzufuhr!

Messen Sie die Temperaturverteilung in der Flamme mit dem PtRh-Thermoelement bei starker Luftzufuhr und bei schwacher Luftzufuhr des Gasbrenners. Das PtRh-Thermoelement besteht aus zwei Platindrähten, die aber unterschiedlich stark mit Rhodium legiert sind. Achtung: Beim Versuch sind verschiedene Thermoelemente vorhanden (Typ S und Typ B). Achten Sie darauf die richtige Eich Tabelle zu verwenden. Zeichnen Sie die ungefähre Gestalt der Flamme und tragen Sie für verschiedene Stellen die Thermospannung ein (fünf Messungen bei starker und schwacher Luftzufuhr).

VII Auswertung

Tragen Sie die bei den Fixpunkten gemessenen Druckwerte gegen die Temperatur in ein Diagramm ein. Wählen Sie auf der x -Achse einen Temperaturbereich von -280°C bis 110°C . In einem ersten Diagramm eichen Sie die Temperaturskala, indem Sie die Temperatur des Wasser-Eisgemisches als 0°C ansetzen. Tragen Sie dort den gemessenen Druck ein. Einen zweiten Eichpunkt erhalten Sie, indem Sie die den Druck p_{gem} , den Sie bei der Temperatur des kochenden Wassers gemessen haben. Dieser Messwert muss auf Normalbedingung umrechnen:

$$p_{NB} = p_{gem} \frac{1013,25 \text{ hPa}}{p_{LD}}, \quad (9)$$

Dabei beschreibt p_{LD} den gemessenen Luftdruck und p_{NB} den gemessenen Druckwert umgerechnet auf Normalbedingung. Ordnen Sie diesem Druckwert die Temperatur 100°C zu und tragen Sie den Wert in das Diagramm ein. Jetzt können sie die Eichgerade des Gasthermometers durch beide Messpunkte zeichnen. Bei welcher Temperatur wird der Druck Null? Tragen Sie jetzt den Druckmesswert bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs ein. Welchen Temperaturwert lesen sie ab? Wie vergleicht sich dieser mit dem Literaturwert $T_{N_2} = 77 \text{ K}$ ($-195,8^{\circ}\text{C}$).

Sie können diesen Literaturwert auch als weiteren Eichpunkt in einem zweiten Diagramm benutzen um den absoluten Nullpunkt besser zu bestimmen. Bei welcher Temperatur bekommen Sie jetzt den Druck $p = 0 \text{ hPa}$? Tragen Sie schließlich auch den Druck ein, den Sie bei der Messung mit Trockeneis aufgenommen haben. Welche Temperatur erhalten Sie dafür? Ergänzen Sie das Diagramm durch eine Kelvin-Skala.

Bestimmen Sie mit Hilfe der zuvor angefertigten Eichkurve die aus den gemessenen Druckwerten resultierenden Temperaturwerte des Gasthermometers im Bereich von 0°C bis 100°C .

Tragen Sie den Widerstand des Pt100- Elements gegen die Temperatur in ein weiteres Diagramm ein. Welchen Zusammenhang finden Sie? Legen Sie durch die Messwerte im Bereich von 0°C bis 100°C eine Ausgleichsgerade. Vergleichen Sie die Steigung mit dem linearen Glied des Polynoms in Gleichung (4) und interpretieren Sie knapp das Ergebnis des Vergleichs.

Tragen Sie die Temperaturmessungen mit dem Pyrometer gegen die Temperatur des Gasthermometers in einem vierten Diagramm auf. Was beobachten Sie? Wie erklären Sie Ihre Beobachtung?

Versuch 248 RC-Glied

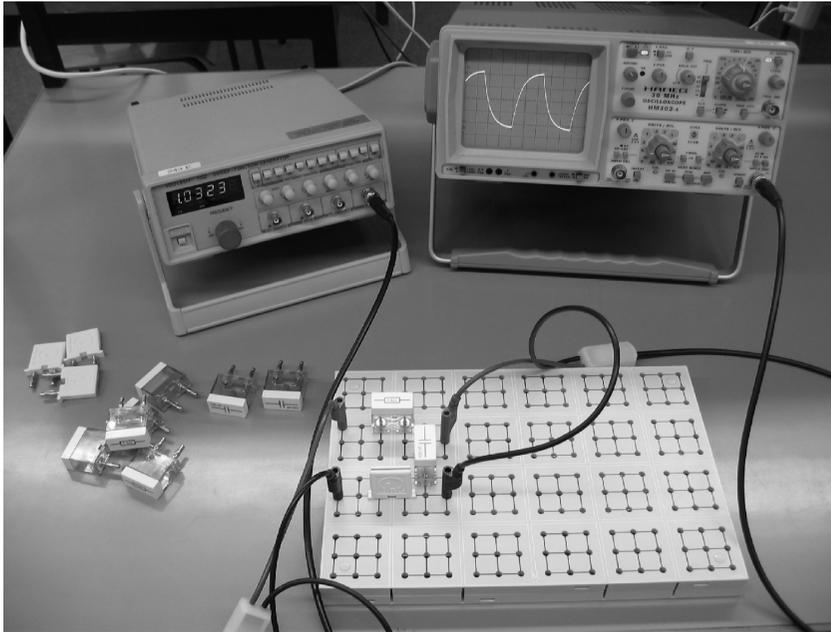


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Oszilloskop
- Funktionsgenerator
- Verschiedene Widerstände und Kondensatoren im Steckgehäuse
- Steckbrett zum Verschalten der Bauelemente

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- K.-H. Rohe, *Elektronik für Physiker*, Teubner Verlag.
- Homepage des Praktikums: <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Motivation

Elektrische Schaltungen mit RC-Gliedern stellen in der Wissenschaft und Technik ein elementares Schaltungskonzept dar. So liefern beispielsweise RC-Glieder die Zeitbasis für viele elektrisch erzeugte Schwingungsabläufe. Der Funktionsgenerator, mit dem Sie hier im Praktikum arbeiten, erhält seine Zeitinformation letztendlich von einem internen RC-Glied. Eine weitere wichtige Anwendung von RC-Gliedern stellen Filter-Schaltungen dar. Die Spannung, die in einer RC-Schaltung über dem Kondensator abfällt, hängt von der Frequenz der eingepprägten Spannung ab. Mit anderen Worten: Der Wechselstromwiderstand (Impedanz) ist frequenzabhängig. Somit lassen sich Schaltungen aufbauen, die nur tiefe, nur hohe oder nur einen bestimmten Frequenzbereich durchlassen. Denken Sie beispielsweise an ein Radio bzw. an den Verstärker Ihrer Stereoanlage. Auch hier sind Filterschaltungen auf Basis von RC-Gliedern vorhanden, mit denen Sie die Höhen, Mitten und Tiefen des Audiosignals nach Ihrem Musikempfinden durch Filterung einstellen können.

Neben solch technisch sehr wichtigen Schaltungen dient das Studium von RC-Gliedern auch zum Erkennen von parasitären Effekten in der Messtechnik. Jedes Kabel und jedes Messgerät besitzen ohmsche und kapazitive Eigenschaften, die die Messung einer physikalischen Größe beeinflussen und somit verfälschen können. Es ist daher wichtig diese Einflüsse schon vor einer Messung zu erkennen und entsprechend zu kompensieren.

Um einen Bezug zur Biologie herzustellen, werden Sie in diesem Versuch die passiven Eigenschaften eines Axons mit Hilfe von RC-Gliedern simulieren. Unter passiven Eigenschaften ist gemeint, dass wir ein Axon als eine Art Kabel betrachten. Verstärkende Mechanismen, die bei einem realen „Nerv“ zusätzlich vorhanden sind, werden hier nicht berücksichtigt¹. Mit Hilfe einfacher Überlegungen sollen Sie Analogien zwischen einem realen Axon und

¹Auch das wäre physikalisch möglich, würde aber den Rahmen dieses Versuchs sprengen.

entsprechenden elektrischen Schaltungen herstellen und so das elektrische Ersatzschaltbild modellieren. Anhand dieses Modells werden Sie erkennen, dass die Stärke eines Reizes sehr schnell entlang eines Axons abfällt und dass die Geschwindigkeit mit dem sich solch ein Signal ausbreitet, von elementaren elektrischen Größen wie Widerstand und Kapazität abhängt.

IV Vorbereitung

Dieser Versuch setzt voraus, dass Sie mit den Begriffen Ladung, Strom, Spannung und Widerstand absolut vertraut sind. Informieren Sie sich zusätzlich über das Ohmsche- und die Kirchhoffschen Gesetze sowie über den Aufbau und die Kenngrößen (Kapazität, Impedanz) eines Kondensators. Da einzelne Aufgaben dieses Versuchs sehr nah an die Biologie angelehnt sind, sollten Sie Ihr Wissen bezüglich des biologischen Aufbaus einer Membran eines Neurons auffrischen.

Für das Verständnis eines RC-Glieds im Wechselstromkreis müssen Sie sich über die Eigenschaften von Wechselspannungen wie Frequenz, Periodendauer, Amplitude und Phase informieren.

V Aufgaben

1. Untersuchung des Lade- und Entladevorgangs eines Kondensators und Bestimmung der Zeitkonstante.
2. Aufbau einer Schaltung aus RC-Gliedern zur Simulation der passiven elektrischen Eigenschaften der Membran eines Axons. Messung der Längskonstante.
3. Untersuchung der Eigenschaften eines RC-Glieds im Frequenzbereich: Aufbau eines Tiefpassfilters und Messung des Frequenzgangs.

VI Grundlagen

Verhalten eines RC-Glieds im Zeitbereich

Ein Kondensator C und ein Widerstand R werden über einen Schalter S an eine Gleichspannungsquelle U_E angeschlossen (Abbildung 2). Wir interessieren uns für den zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator U_C : Wird der

Schalter geschlossen, so fließt durch den Widerstand ein Strom zum Kondensator. Allerdings können die Ladungen nicht durch den Kondensator fließen, da die beiden Kondensatorelektroden durch ein nichtleitendes Dielektrikum getrennt sind. Es kommt daher zu einer Ansammlung von Ladungsträgern an den Kondensatorelektroden, wodurch sich über dem Kondensator die Spannung U_C aufbaut. Man spricht dabei auch vom „Aufladen eines Kondensators“. Mit zunehmender Aufladung wird der Ladestrom immer geringer, denn die sich am Kondensator aufbauende Spannung, wirkt der Gleichspannungsquelle entgegen, so dass sich pro Zeiteinheit immer weniger Ladungen an den Elektroden ansammeln können. Schließlich ist nach einer gewissen Zeit die Kondensatorspannung genau so groß wie U_E , d.h. der Kondensator ist aufgeladen.

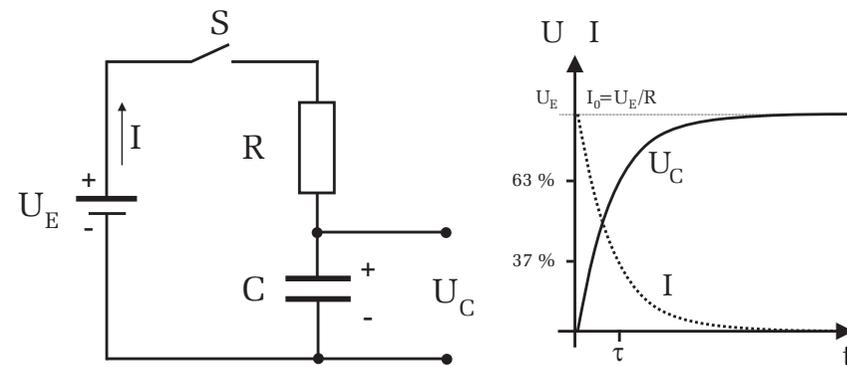


Abbildung 2: Links: Schaltbild. Rechts: Spannungs- und Stromverlauf beim Laden eines Kondensators. $I_0 = U_E/R$ entspricht dem Ladestrom direkt nach dem Schließen des Schalters und U_E ist die Spannung des aufgeladenen Kondensators die gerade der Eingangsspannung entspricht. Die Zeitkonstante τ entspricht der Zeit, bei der die Kondensatorspannung auf 63% des Endwerts U_E angestiegen, bzw. der Ladestrom auf 37% des Endwerts abgefallen ist.

Die Spannung am Kondensator erreicht demnach nur allmählich den Wert der Eingangsspannung U_E . Der Ladestrom verhält sich genau umgekehrt. Beim Einschalten fließt ein hoher Ladestrom der während des Aufladevorgangs immer geringer wird und schließlich auf Null zurückgeht (Abbildung 2).

Der Ladevorgang eines Kondensators gemäß dem Schaltbild in Abbildung 2 lässt sich mathematisch unter Zuhilfenahme des Ohmschen Gesetz einfach beschrei-

ben². Für den Ladestrom ergibt sich:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (1)$$

wobei I_0 durch U_E/R gegeben ist und für $\tau = RC$ gilt. Ein ähnliches funktionales Verhalten gilt für die Kondensatorspannung U_C :

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2)$$

Direkt nach dem Einschalten fließt im RC-Kreis ein Maximalstrom I_0 , der den Kondensator auflädt und der mit der Zeitkonstante τ exponentiell auf Null abklingt. Entsprechend steigt die Spannung U_C des Kondensators exponentiell mit der Zeitkonstante τ an, bis schließlich der Endwert, die Eingangsspannung U_E , erreicht wird.

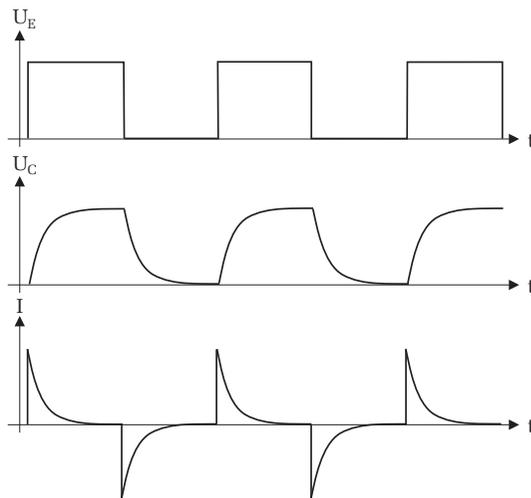


Abbildung 3: eine rechteckförmige Eingangsspannung U_E bewirkt ein kontinuierliches Laden und Entladen des Kondensators. Beachten Sie, dass sich die Richtung des Ladestroms I beim Entladen umkehrt.

Das zeitliche Verhalten des Ladevorgangs wird allein durch die Zeitkonstante $\tau = RC$ bestimmt. Je größer τ , desto länger dauert es bis der Kondensator

²Die genaue Herleitung finden Sie in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik

aufgeladen ist. Dies ist leicht einzusehen, denn ein hochohmiger Widerstand R bewirkt, dass im Mittel nur ein kleiner Ladestrom fließt. Entsprechend lange dauert es bis der Kondensator vollständig aufgeladen ist. Zudem bedeutet eine große Kapazität ein hohes „Fassungsvermögen“ für Ladungen. Daher benötigt eine große Kapazität bei gegebenem Ladestrom eine längere Ladezeit als eine kleine Kapazität.

Die Zeitkonstante τ kann durch Messung der Halbwertszeit T_H der Kondensatorspannung experimentell bestimmt werden. Aus Gleichung (2) folgt für die Halbwertszeit

$$\frac{U_E}{2} = U_E(1 - e^{-T_H/\tau}) \quad (3)$$

und damit

$$\tau = \frac{T_H}{\ln 2}. \quad (4)$$

Statt einer Gleichspannungsquelle und einem Schalter wird das RC-Glied nun an eine Rechteckspannung mit der Periodendauer T angeschlossen. Steigt die Spannung von Null auf den Wert U_E , so wird der Kondensator wie zuvor diskutiert mit der Zeitkonstante τ aufgeladen. Fällt die Spannung dann wieder auf Null zurück, so wird der Kondensator über den Widerstand R entladen. Der Entladevorgang erfolgt mit der gleichen Zeitkonstante τ wie der Ladevorgang. Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung und des Ladestroms ist in Abbildung 3 dargestellt.

Beschreibung der elektrischen Eigenschaften einer Membran eines Axons mit Hilfe von RC-Gliedern

Abbildung 4 zeigt den schematischen Aufbau eines Membranabschnitts eines Axons. Der Extrazellulärraum wird vom Intrazellulärraum durch eine elektrisch nicht leitende Doppellipidschicht getrennt. In dieser Schicht sind Ionenkanäle eingebettet. Sie arbeiten spezifisch, d.h. sie lassen beispielsweise nur Natrium- oder Kalium- Ionen durch. Zwischen Extra- und Intrazellulärraum besteht ein Membranruhespannung U_0 von typischerweise 70 mV. Die Ursache dieser Spannung ist auf die unterschiedliche Verteilung der Ionen zurückzuführen. Aufgrund der Diffusion wandern nun die einzelnen Ionen in Richtung des Konzentrationsgradienten durch die spezifischen Ionenkanäle auf die andere

Seite der Membran. Dadurch würde sich der Konzentrationsunterschied mit der Zeit ausgleichen und die Membranruhespannung würde auf Null absinken. Um dies zu verhindern, befinden sich in der Doppellipidschicht zusätzlich noch Ionenpumpen, die kontinuierlich Ionen entgegen dem Konzentrationsgradienten befördern.

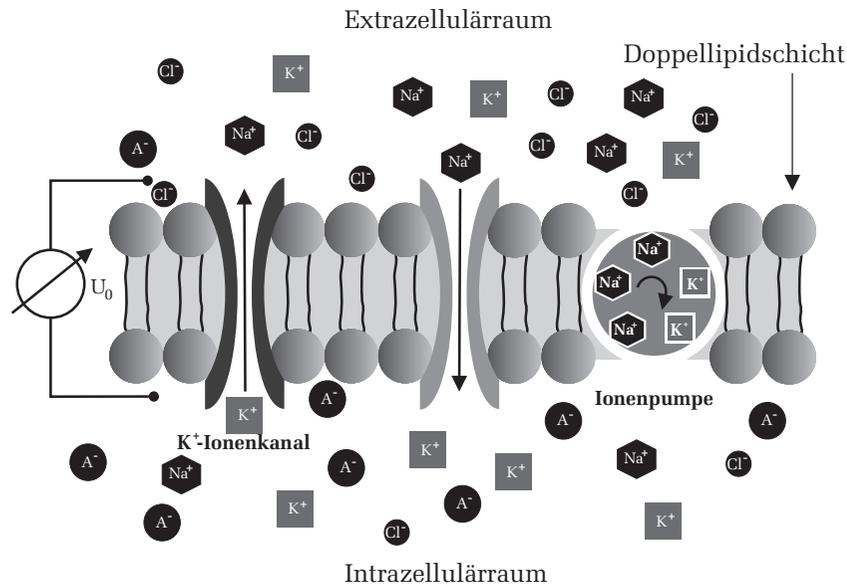


Abbildung 4: Schematischer Aufbau der Membran eines Axons.

Die elektrischen Eigenschaften solch einer Membran lassen sich mit Hilfe einfacher elektrischer Bauelemente wie Widerstand, Kondensator, Spannungs- und Stromquelle sehr gut modellieren. Betrachten wir dazu zunächst die unterschiedlichen Ionenkonzentrationen (Abbildung 5a). Im Inneren der Membran ist die Konzentration von Kaliumionen höher als im Außenbereich. Die damit verbundene Potentialdifferenz kann im Ersatzschaltbild durch eine Spannungsquelle U_K beschrieben werden. Diese Spannungsquelle ermöglicht ein Fluss von Kaliumionen durch die Membran (**Diffusionsstrom**). Die Ionen können aber nur durch den Ionenkanal die Membran durchqueren. Der Kalium- Ionenkanal stellt somit einen elektrischen Leiter für Kalium dar. Da jeder Leiter, abgesehen von den Supraleitern, einen endlichen Widerstand besitzt, wird der Kalium- Ionen-

kanal im Ersatzschaltbild durch den Widerstand R_K dargestellt (Abbildung 5b). Neben Kalium werden die elektrischen Eigenschaften der Membran noch von anderen Ionenarten bestimmt. Wir berücksichtigen dies indem wir die Potentialdifferenzen bezüglich aller Ionenarten durch verschiedene Spannungsquellen und die dazugehörigen Ionenkanäle durch unterschiedliche Widerstände darstellen. Dabei gilt es die richtige Polung der einzelnen Spannungsquellen zu beachten.

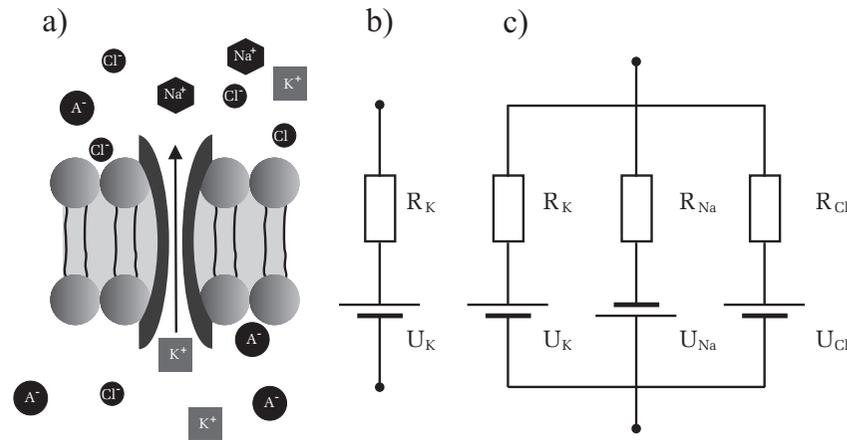


Abbildung 5: a) Doppellipidschicht mit einem Ionenkanal. b) Elektrisches Ersatzschaltbild einer Ionenart unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Ionenkonzentration und der Wirkungsweise des Ionenkanals. c) Ersatzschaltbild für drei verschiedene Ionenarten und Ionenkanäle.

Da sich die Ionen auf der Oberfläche der Membran im Gegensatz zu deren Durchquerung vergleichbar gut bewegen können, dürfen wir die einzelnen Ersatzschaltbilder parallel schalten (Abbildung 5c). Dies gilt aber nur für einen kurzen Membranabschnitt. Für längere Abschnitte müssen zusätzlich noch Längswiderstände der Membran berücksichtigt werden. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Als nächstes müssen wir die Ionenpumpen in unser Ersatzschaltbild mit einbeziehen (Abbildung 6). Die Ionenpumpen sorgen dafür, dass stets ein ausreichender Ionenüberschuss einer Ionenart auf **einer** der Membranseiten vorhanden ist. Damit wirken sie dem konzentrationsabbauenden Diffusionsstrom durch die Ionenkanäle entgegen. Die Ionen, die durch Diffusion durch die Ionenkanäle, die

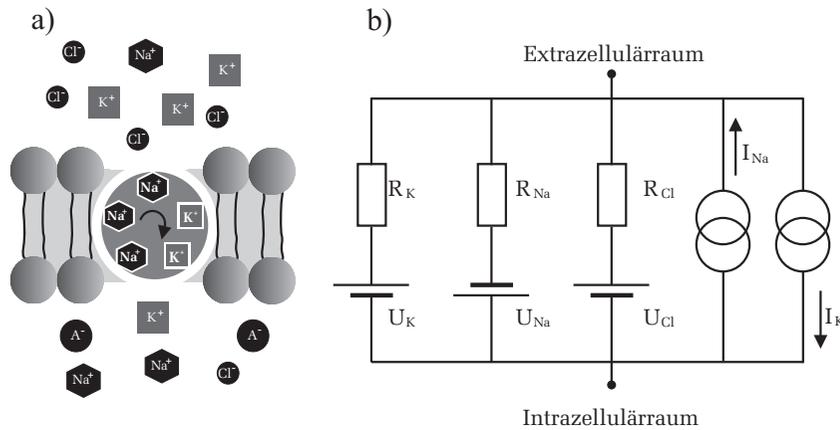


Abbildung 6: Berücksichtigung einer Ionenpumpe der Membran. Für jede Ionenart, die durch eine Ionenpumpe befördert wird, muss im Ersatzschaltbild eine Stromquelle (im Schaltbild zwei ineinander greifende Kreise) parallel hinzugefügt werden. Da die Förderrichtungen für K^+ - und Na^+ -Ionen entgegengesetzt verlaufen, fließen auch die einzelnen Ströme in entgegengesetzten Richtungen.

Membran durchqueren, werden mit Hilfe der Ionenpumpe wieder zurück transportiert. Elektrisch gesehen stellt somit eine Ionenpumpe eine Stromquelle dar. In Abbildung 6 ist eine Ionenpumpe dargestellt, die zum einen K^+ -Ionen in den Intrazellulärraum transportiert und gleichzeitig Na^+ -Ionen in den Außenbereich der Zelle befördert. Wir berücksichtigen dies im Ersatzschaltbild, indem wir zwei Stromquellen einzeichnen, eine für K^+ -Ionen und eine für Na^+ -Ionen.

Schließlich müssen wir noch die elektrischen Eigenschaften der Doppellipidschicht untersuchen. Wie bereits angemerkt wurde, können sich die Ionen auf der Oberfläche der Doppellipidschicht gut bewegen. Die Doppellipidschicht selbst ist für die Ionen undurchlässig; sie stellt einen elektrischen Isolator dar. Solch eine Anordnung, aus zwei leitenden Elektroden (die Ober- und Unterseite der Doppellipidschicht), die durch einen Isolator getrennt sind, entspricht im Ersatzschaltbild einem Kondensator mit der Kapazität C_M . Typische Werte für die Membrankapazität C_M eines Neurons liegen bei etwa $1 \mu F/cm^2$.

In Abbildung 7 ist das gesamte Ersatzschaltbild eines Membranabschnitts dargestellt. Auf den ersten Blick scheint dieses recht kompliziert zu wirken. Allerdings kann dies durch weitere Überlegungen noch vereinfacht werden: Nach dem

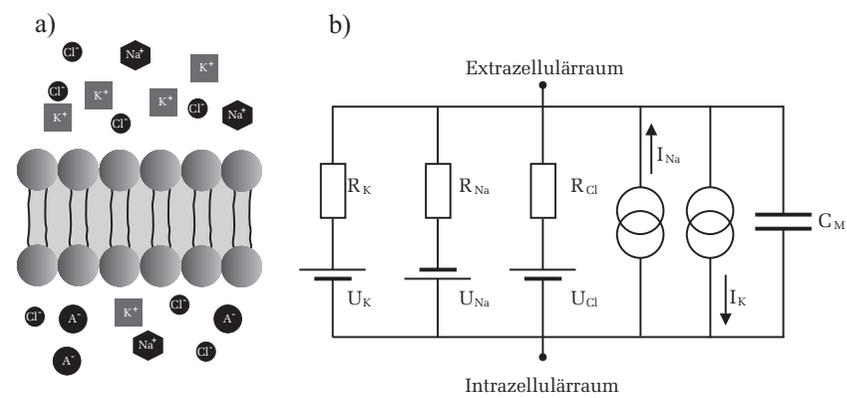


Abbildung 7: Der Membranbereich, der allein aus der nichtleitenden Doppellipidschicht besteht, wird im Ersatzschaltbild durch eine Kapazität beschrieben.

Theorem von Thévenin, auf das hier nicht näher eingegangen werden soll, kann eine Stromquelle auch durch eine Spannungsquelle und einen zusätzlichen Serienwiderstand beschrieben werden. Weiterhin können alle Spannungsquellen und Widerstände (und somit auch die Stromquellen) zu einer Gesamtspannungsquelle und einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Ist man zudem nur an den passiven Eigenschaften der Membran interessiert, so kann auch die Spannungsquelle vernachlässigt werden. Die Spannungsquelle hat nur Einfluss auf den Absolutwert der Membranruhespannung. Diese ist aber für die passiven Eigenschaften völlig belanglos. Die passiven Eigenschaften eines Membranabschnitts können also allein durch einen Widerstand R_M und einen parallel geschalteten Kondensator C_M beschrieben werden (Abbildung 8a).

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf einen Membranabschnitt des Axons. Sollen größere Bereiche eines Axons untersucht werden, so müssen auch Längswiderstände berücksichtigt werden. Das Ersatzschaltbild eines längeren Membranabschnitts ist in Abbildung 8b dargestellt. Mehrere RC-Glieder sind durch Längswiderstände, die die Leitfähigkeit der Ionen berücksichtigen, parallel geschaltet. R_L^e stellt den Widerstand im extrazellulären Raum dar. Der Wert für R_L^a ist in der Regel sehr klein und kann daher vernachlässigt werden. Der Widerstand R_L des cytoplasmatischen Innenraums ist dagegen nicht zu vernachlässigen. Er hängt von der Querschnittsfläche des Axons und vom spezifischen Widerstand des Cytoplasmas ab.

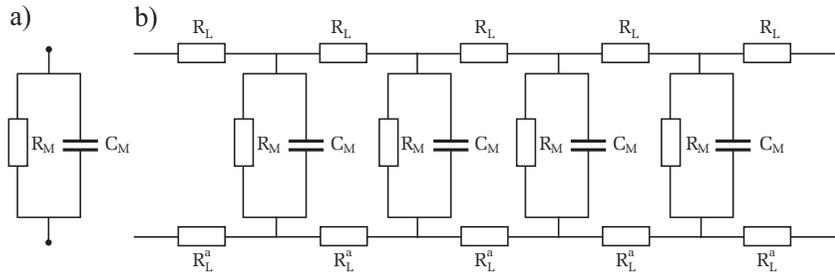


Abbildung 8: Links: Ersatzschaltbild zur Beschreibung der passiven Eigenschaften eines Membranabschnitts. Rechts: Für längere Membranabschnitte müssen zusätzlich noch Längswiderstände, die die Leitfähigkeit der Ionen entlang der Membran wiedergeben, berücksichtigt werden. Aus Symmetriegründen wurden hier Längswiderstände sowohl im Extra- als auch im Intrazellulärraum eingezeichnet.

Ausbreitung eines Signals entlang eines Axons

Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich das Membranpotential $U(x, t)$ entlang eines Axons mit der Entfernung und der Zeit ändert, wenn man an einer Stelle einen Strom injiziert. Dabei beschränken wir uns wieder auf die passiven Membraneigenschaften, d.h. signalverstärkende Mechanismen, wie z.B. spannungsgesteuerte Ionenkanäle, werden nicht berücksichtigt.

Die Behandlung dieses Problems ist mathematisch sehr aufwendig und wird daher hier nicht analytisch durchgeführt. Wir wollen jedoch die Ergebnisse anhand einiger Grafiken diskutieren.

Nehmen wir zunächst an, dass am Anfang des Axons bei $x = 0$, bzw. am Eingang (Knoten 0) unseres Ersatzschaltbilds, eine rechteckförmige Reizspannung U_0 angelegt wird. Der Spannungsverlauf $U(x, t)$ entlang des Axons (bzw. analog an den Knotenpunkten im Ersatzschaltbild) ist im mittleren Teil in Abbildung 9 an vier unterschiedlichen Orten skizziert. Den Bildern kann man entnehmen, dass mit zunehmendem Abstand von der Einkopplungsstelle, die Signale immer stärker gedämpft werden und der Signalanstieg immer langsamer verläuft. Eine exakte Berechnung dieser Signalverläufe ist in Abbildung 10 zu sehen. Die linke Abbildung zeigt den Signalverlauf an unterschiedlichen Orten des Axons (oder analog an den Knoten im Ersatzschaltbild) als Funktion der Zeit.

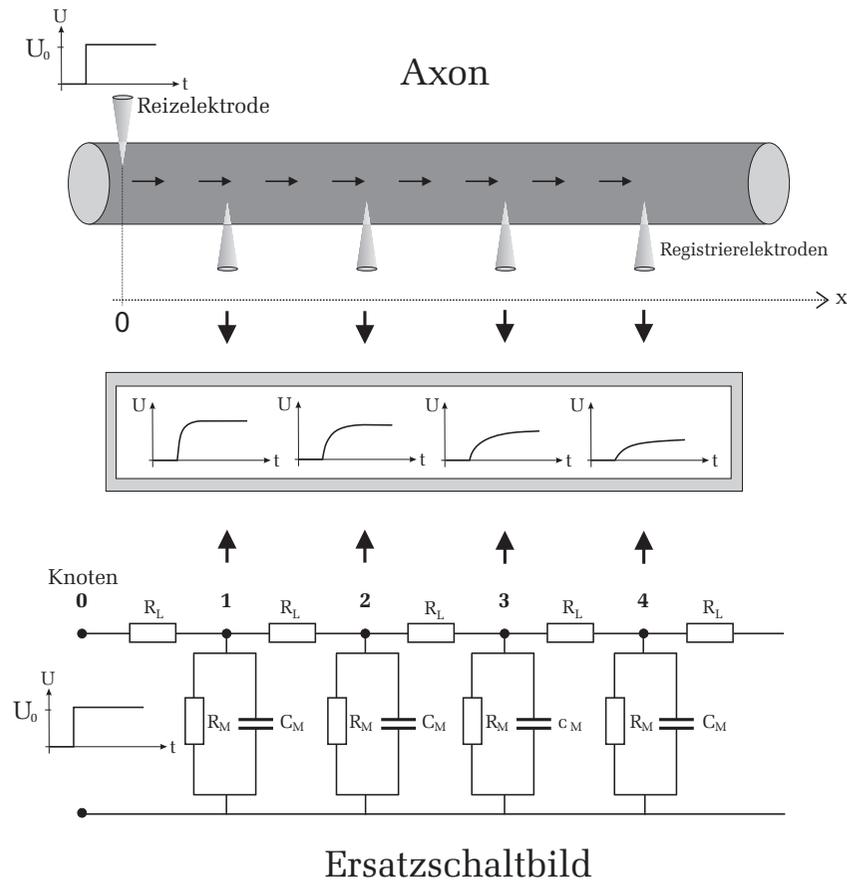


Abbildung 9: Oben: Ausbreitung eines Reizes entlang eines Axons. Bei $x = 0$ wird ein rechteckförmiges Reizsignal in den Axon eingespeist. Die Ausbreitung dieses Signals wird mit Hilfe von Registrierelektroden gemessen. Unten: Elektrisches Ersatzschaltbild. Das Reizsignal wird hier am Eingang (Knoten 0) eingekoppelt. Der zeitliche Verlauf des sich ausbreitenden Signals wird an den verschiedenen Knoten untersucht. Mitte: Qualitativer Signalverlauf an unterschiedlichen Orten als Funktion der Zeit.

Die einzelnen Kurven zeigen alle ein ähnliches Verhalten. Beim Einschalten des rechteckförmigen Reizes zum Zeitpunkt $t = 0$ (gepunktete Kurve), steigen auch die an den verschiedenen Orten anliegenden Spannungen an. Mit zunehmender Zeit wird die Steigung der Signale immer geringer bis schließlich ein zeitlich konstantes Spannungsniveau \hat{U} (Gleichgewichtsspannung) erreicht wird. Diese Gleichgewichtsspannung fällt mit zunehmendem Abstand vom Ort der Anregung rasch ab. Eine genauere Analyse zeigt, dass die Gleichgewichtsspannung exponentiell mit dem Abstand x abfällt (Abbildung 10 Rechts):

$$\hat{U}(x) = U_0 e^{-x/\lambda}, \quad (5)$$

wobei hier \hat{U} die Gleichgewichtsspannung bezeichnet und λ die sogenannte Längskonstante darstellt.

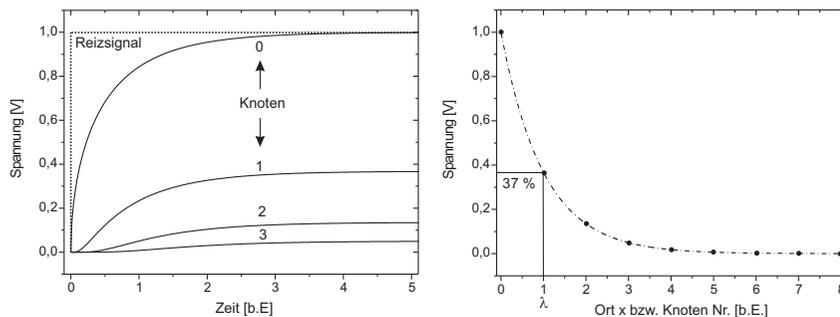


Abbildung 10: Links: Auf dem Ersatzschaltbild basierte Rechnungen des Spannungsverlaufs an unterschiedlichen Orten (Knoten). Für große Zeiten ändern sich die Spannungen nicht mehr. Diese zeitlich konstanten Spannungen werden im Folgenden als Gleichgewichtsspannungen \hat{U} bezeichnet. Die Abkürzung b.E. steht für „beliebige Einheit“. Rechts: Die Gleichgewichtsspannung fällt mit zunehmendem Abstand exponentiell ab. Der Ort λ , bei dem die Spannung auf 37% des Ursprungswertes abgesunken ist, heißt Längskonstante (hier zufällig am Knoten 1).

Die Längskonstante ist die Entfernung von der Strominjektionsstelle zu dem Ort auf dem Axon, an dem \hat{U} auf den 1/e-ten Teil bzw. auf 37% seines Ursprungswertes abgefallen ist. Sie hängt nur von den Längs- und Membranwiderständen ab. Eine genaue Rechnung für λ ergibt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\tilde{R}_M}{\tilde{R}_L}}. \quad (6)$$

Die beiden Widerstände \tilde{R}_L und \tilde{R}_M wurden hier mit einer Tilde gekennzeichnet, da diese bei einem realen Axon von dessen Geometrie abhängen. \tilde{R}_M und \tilde{R}_L sind daher längenspezifische Widerstände: \tilde{R}_M ist der Membranwiderstand einer Längeneinheit des Axons und \tilde{R}_L der Längswiderstand des cytoplasmatischen Innenraums pro Längeneinheit. Im Ersatzschaltbild sind die Widerstände \tilde{R}_L und R_L bzw. \tilde{R}_M und R_M vom Betrag her aber identisch.

Die Längskonstante entspricht der Wurzel aus dem Verhältnis von Membranwiderstand und Längswiderstand. Je größer λ desto geringer ist die Dämpfung eines sich ausbreitenden Reizsignals. Typische Werte für λ sind einige Millimeter, wobei dickere Nerven in der Regel eine größere Längskonstante aufweisen als dünne Axone.

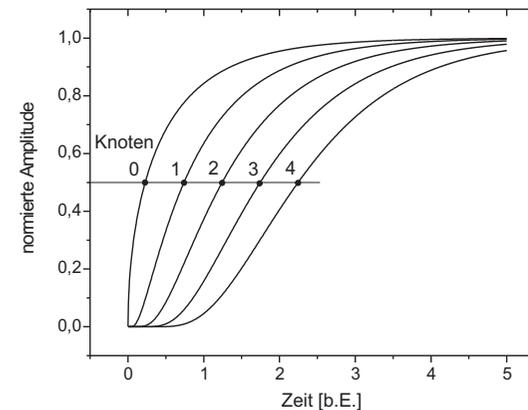


Abbildung 11: Normierter Spannungsverlauf an unterschiedlichen Orten des Axons (bzw. unterschiedliche Knoten im Ersatzschaltbild).

Wie wir gesehen haben, hängt die Signaldämpfung nur von den beiden Widerständen \tilde{R}_L und \tilde{R}_M ab, nicht aber von der Membrankapazität C_M . Die Membrankapazität hat aber ebenfalls großen Einfluss auf die Reizweiterleitung. Ihnen ist wahrscheinlich schon in der linken Abbildung 10 aufgefallen, dass neben der Gleichgewichtsspannung auch der Anstieg der Signale (also die Steigung)

mit zunehmenden Abstand vom Ort der Einkoppelung immer geringer wird. Allerdings ist dies wegen des exponentiellen Abfalls der Gleichgewichtsspannung nur qualitativ zu erkennen. Für eine quantitative Untersuchung ist es günstiger die einzelnen Spannungsverläufe auf die jeweilige Gleichgewichtsspannung zu normieren (d.h. wir skalieren die einzelnen Kurven so, dass sie den gleichen relativen Spannungsbereich überdecken). Das Gleiche machen Sie übrigens auch, wenn Sie die Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop messen. Durch Variierung der y-Ablenkung werden die Signale so eingestellt, dass sie möglichst den ganzen vertikalen Bildschirm ausnutzen. Damit normieren Sie die Signale auf den Schirmbereich des Oszilloskops. Wie Sie Abbildung 11 entnehmen können, erfolgt der Spannungsanstieg an weiter vom Ort der Reizeinkopplung gelegenen Punkten später als an nähergelegenen. Dieser Sachverhalt unterliegt sogar einer einfachen Gesetzmäßigkeit: Misst man die Zeit an einem Ort des Axons (bzw. an einem Knoten im Ersatzschaltbild), die vergeht, bis die dort anliegende Spannung gerade die Hälfte der Gleichgewichtsspannung erreicht hat und trägt darüber den Ort bzw. die Knoten- Nummer auf, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung v . Zu Erkennen ist dies in Abbildung 11 darin, dass die Halbwertszeiten der Signale benachbarter Knoten den gleichen Abstand voneinander aufweisen. Mit Hilfe einiger mathematischen Überlegungen kann man eine Art Leitungsgeschwindigkeit v einführen:

$$v = \frac{\lambda}{\tau_M} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{R}_L \tilde{R}_M C_M^2}}, \tag{7}$$

wobei für die Zeitkonstante $\tau_M = \tilde{R}_M C_M$ gilt. Die Leitungsgeschwindigkeit eines Reizes hängt demnach von beiden Widerständen und von der Membrankapazität ab. Um eine hohe Geschwindigkeit der Signalausbreitung zu erzielen, muss demnach die Längskonstante λ möglichst groß und die Zeitkonstante τ möglichst klein sein.

Frequenzverhalten von RC-Gliedern

Bisher haben wir nur das Verhalten von RC-Gliedern im Zeitbereich untersucht. Um das Verhalten von Kondensatoren in Wechselstromkreisen zu verstehen, soll im Folgenden untersucht werden, wie ein RC-Glied auf eine sinusförmige Anregung reagiert.

Betrachten wir zunächst die Schaltung in Abbildung 12. Zwei in Serie geschalte-

te Widerstände sind an einer Wechselspannungsquelle $U_E(t) = \hat{U}_E \sin \omega t$ angeschlossen. Dabei steht \hat{U}_E für die Amplitude und $\omega = 2\pi f$ für die Kreisfrequenz der Wechselspannung. Für die Spannung, die am Widerstand R_2 abfällt, folgt nach dem ohmschen Gesetz:

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_E(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \hat{U}_E \sin \omega t. \tag{8}$$

An R_2 fällt demnach eine Spannung ab, die die gleiche Frequenz und Phase aufweist wie die Eingangsspannung $U_E(t)$. Allerdings ist die Amplitude um den Faktor $R_2/(R_1+R_2)$ geringer als \hat{U}_E . Sind beispielsweise die Widerstände gleich groß, so misst man an R_2 nur die Hälfte der Amplitude der Eingangsspannung. Die Amplitude hängt aber nicht von der Frequenz ab!

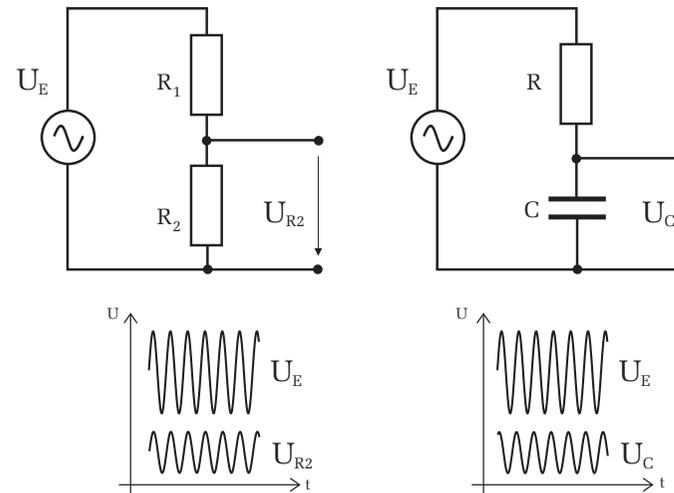


Abbildung 12: Links: Ein- und Ausgangsspannung bei rein ohmschen Widerständen. Beide Spannungen sind phasengleich. Die Amplitude der Ausgangsspannung hängt nur von den beiden Widerstanswerten ab. Rechts: Bei einem kapazitiven Widerstand (Kondensator) kommt es zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung zu einer Phasenverschiebung. Zudem hängt die Amplitude der Ausgangsspannung von der Frequenz ab.

Wir ersetzen nun den Widerstand R_2 durch einen Kondensator der Kapazität C und interessieren uns wiederum für die Spannung U_C die am Kondensator

abfällt. Eine mathematische Behandlung dieses Problems liefert:

$$U_C = \hat{U}_C(\omega) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U}_E}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (9)$$

Die Spannung U_C hat demnach die gleiche Frequenz wie die Eingangsspannung U_E . Allerdings tritt hier zusätzlich eine Phasenverschiebung φ auf, die zudem von der Frequenz abhängt. Eine weitere wichtige Eigenschaft lässt sich aus dem Vorfaktor ablesen. Im Gegensatz zu der Schaltung mit den beiden Widerständen ist die Amplitude beim RC-Glied frequenzabhängig. Für kleine Frequenzen, d.h. $\omega \rightarrow 0$, nimmt der Nenner den Wert Eins an. Die Amplitude \hat{U}_C entspricht dann gerade der Amplitude \hat{U}_E des Eingangssignals. Für größere Frequenzen wird die Amplitude immer geringer und geht für $\omega \rightarrow \infty$ schließlich gegen Null. Das RC-Glied verhält sich wie ein Tiefpassfilter. Nur **tiefe** Frequenzen können den Filter **passieren**, höhere Frequenzen werden entsprechend stark gedämpft (Abbildung 13).

Vertauscht man den Kondensator mit dem Widerstand und misst die Spannung U_R über dem Widerstand so zeigt das RC-Glied ein Hochpassverhalten:

$$U_R = \hat{U}_R(\omega) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U}_E}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

Entsprechend werden beim Hochpassfilter tiefe Frequenzen stark gedämpft, während hohe Frequenzen nicht unterdrückt werden.

Um die Wirkung eines Filters, d.h. dessen Bandbreite zu quantifizieren, definiert man die Grenzfrequenz

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}. \quad (11)$$

Durch Einsetzen von ω_g in Gleichung (9) bzw. Gleichung (10) erkennt man, dass bei der Grenzfrequenz die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$ -fache abgefallen (Tiefpass), bzw. angestiegen ist (Hochpass).

VII Durchführung des Versuchs

1. Lade- und Entladeverhalten eines RC-Glieds

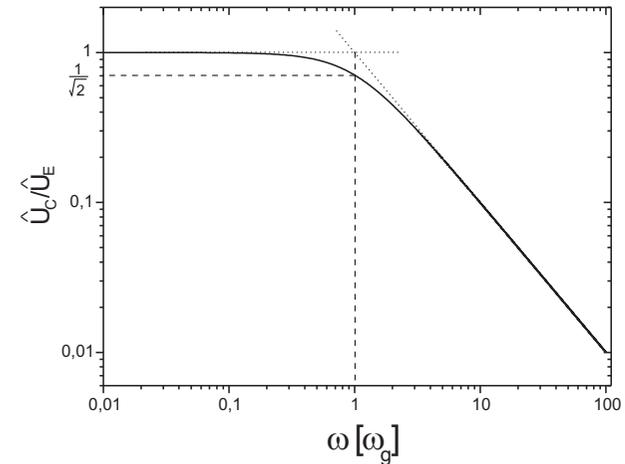


Abbildung 13: Frequenzgang eines Tiefpassfilters. Aufgetragen ist das Verhältnis der Amplitude am Kondensator zur Amplitude der Eingangsspannung über die Frequenz in Einheiten der Grenzfrequenz ω_g . Beachten Sie den logarithmischen Maßstab beider Achsen. Die Grenzfrequenz ergibt sich in dieser Auftragung aus dem Schnittpunkt der Verlängerung (gepunktete Geraden) der linearen Bereiche bei kleinen und großen Frequenzen.

Bauen Sie mit Hilfe der Steckelemente (Widerstände, Kondensatoren und Verbindungsleitungen) die Schaltung nach Abbildung 14 auf dem Steckbrett auf. Einige Buchsen des Steckbretts sind bereits intern miteinander elektrisch verbunden. Diese Verbindungen sind auf der Oberfläche des Steckbrettes durch schwarze Linien zwischen den Buchsen markiert.

Verbinden Sie nun den Ausgang des Funktionsgenerators mit Ihrer Schaltung. Beachten Sie dabei, dass das schwarze Kabel an Masse (Symbol \perp im Schaltbild) angeschlossen wird und das rote an den Widerstand. Zur Darstellung der Signale verwenden wir ein Oszilloskop. Schließen Sie den Ausgang U_C Ihrer Schaltung an Kanal 2 und das Eingangssignal U_E an Kanal 1 an. Beachten Sie auch hier wieder, dass das schwarze Kabel an Masse angeschlossen wird.

Drücken Sie am Funktionsgenerator die Taste für die Signalform „Rechteck“. Die Frequenz müssen Sie bei jeder Messung so einstellen, dass Sie am Oszilloskop den gesamten Lade- bzw. Entladevorgang beobachten können ($f \ll \tau$).

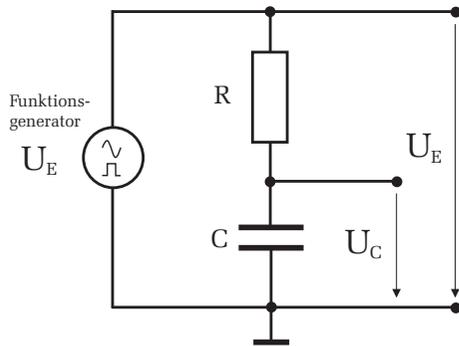


Abbildung 14: Schaltung zum Lade- und Entladeverhalten eines RC-Glieds.

Messen Sie für die folgenden drei RC-Kombinationen die Halbwertszeit $T_{1/2}$ des Lade- oder Entladevorgangs und skizzieren Sie für eine RC-Kombination den Spannungsverlauf des Lade- **und** Entladevorgangs:

- C=100 nF, R=4,7 kΩ
- C=10 nF, R=4,7 kΩ
- C=10 nF, R=47 kΩ.

Vertauschen Sie für eine RC- Kombination den Kondensator mit dem Widerstand und skizzieren Sie den Spannungsverlauf U_R über dem Widerstand der beim Laden **und** Entladen des Kondensators auftritt.

2. Ersatzschaltbild der Membran eines Axons

Bauen Sie die Schaltung nach Abbildung 15 auf dem Steckbrett auf. Wählen Sie für die Membrankapazität $C_M=100$ nF und für die Längswiderstände $R_L=1$ kΩ. Die Membranwiderstände sind durch R_{M1} und R_{M2} gekennzeichnet. Wählen Sie hierfür zunächst die Widerstände R_{M1} . Dem letzten Membranwiderstand muss eine besondere Beachtung geschenkt werden: Bei der Behandlung der elektrischen Eigenschaften eines Axons im Kapitel Grundlagen sind wir davon ausgegangen, dass der Axon sehr lang ist. In unserem Ersatzschaltbild besteht dieser aber nur aus sechs Abschnitten. Da die Schaltung abrupt endet und somit keine weitere Signalleitung mehr möglich ist, würden sich die Messungen am letzten Knoten erheblich verfälschen. Wir können dies kompensieren, indem wir annehmen, dass hinter dem letzten Knoten noch viele weitere Membranabschnitte vorhanden sind. Berechnet man von diesen fiktiven Abschnitten den Gesamtwi-

derstand R_{M1}^∞ und benutzt diesen Wert am letzten Knoten für den Membranwiderstand, so verhält sich die Schaltung an allen Knoten wie ein unendlich langer Axon. Für den letzten Widerstand am Knoten 5 müssen Sie daher den Widerstand R_{M1}^∞ einsetzen.

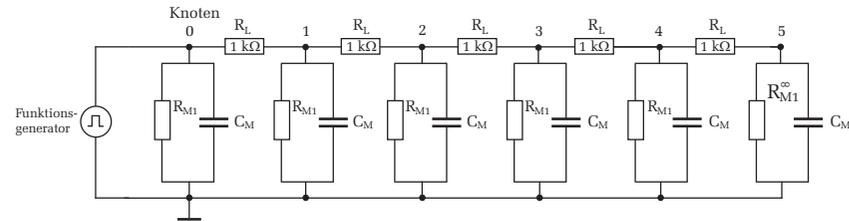


Abbildung 15: Ersatzschaltbild der Membran eines Neurons.

Messung der Längskonstante λ :

Schließen Sie dazu den Funktionsgenerator an den Eingang am Knoten 0 Ihrer Schaltung an. Beachten Sie dabei, dass das schwarze Kabel wieder an Masse angeschlossen wird. Im Folgenden sind alle Messungen massebezogen, d.h. wenn Sie den Spannungsverlauf an einem Knoten mit dem Oszilloskop messen, so muss das rote Kabel mit dem entsprechenden Knoten und das schwarze Kabel mit Masse verbunden werden.

Überprüfen Sie, ob am Funktionsgenerator die Signalform noch auf Rechteck eingestellt ist. Die Frequenz und Amplitude müssen Sie am Funktionsgenerator so einstellen, dass Sie zum einen die Signalamplitude am **letzten** Knoten noch gut messen können und zum anderen den gesamten Ladevorgang bis zum Erreichen der Gleichgewichtsspannung (vergleiche Abbildung 10) auf dem Oszilloskopschirm darstellen können. Verbinden Sie dazu den letzten Knoten 5 an Kanal 2 des Oszilloskops und stellen Sie entsprechend die Amplitude und Frequenz ein. An Kanal 1 des Oszilloskops sollten Sie zusätzlich noch das vom Funktionsgenerator kommende Eingangssignal darstellen.

Messen Sie nun ausgehend vom letzten Knoten die Gleichgewichtsspannung an allen Knoten Ihrer Schaltung (Knoten 5 bis Knoten 0). Nutzen Sie dabei, wenn möglich, den gesamten vertikalen Bildschirm des Oszilloskops aus und vergewissern Sie sich, dass der Einstellknopf für die y-Ablenkung auf „calibriert“ steht. Fertigen Sie in Ihr Protokollheft eine Skizze der Schaltung an und tragen Sie die Messwerte in eine Tabelle ein, die die Größen: Knoten-Nr., Frequenz am

Funktionsgenerator, Gleichgewichtsspannung und den Ablesefehler der Gleichgewichtsspannung dokumentiert.

Ersetzen Sie nun die Membranwiderstände R_{M1} durch die Widerstände R_{M2} und R_{M2}^∞ und wiederholen Sie die Messung für diese Widerstandswerte.

Abschließend sollen Sie noch qualitativ verifizieren, dass die Gleichgewichtsspannung nach Gleichung (5) und Gleichung (6) unabhängig von der Membrankapazität ist. Entfernen Sie alle Membrankapazitäten und vergleichen Sie die Gleichgewichtsspannung mit den zuvor gemessenen Werten. Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse mit einigen Sätzen in Ihrem Protokollheft.

3. Frequenzverhalten von RC-Gliedern: Tiefpassfilter

Für die Messung des Frequenzverhaltens von RC-Gliedern bauen Sie wieder die Schaltung nach Abbildung 14 auf. Wählen Sie für $R=4,7 \text{ k}\Omega$ und für $C=100 \text{ nF}$. Schalten die Signalform am Funktionsgenerator auf Sinus und stellen Sie die Amplitude \hat{U}_E auf einen glatten Wert (z.B. 4 V_{SS}) ein. Messen Sie nun mit dem Oszilloskop die Amplitude der Spannung über dem Kondensator als Funktion der Frequenz. Fertigen Sie am besten eine Tabelle mit den Spalten: Frequenz, Amplitude am Kondensator \hat{U}_C mit Fehlerangabe und das Verhältnis \hat{U}_C/\hat{U}_E . Beginnen Sie Ihre Messung bei kleinen Frequenzen und erhöhen Sie diese in selbst zu wählenden Schritten bis etwa 10 kHz (mindestens 10 Messwerte).

VIII Auswertung

Zu Aufgabe 1:

Berechnen Sie aus den gemessenen Halbwertszeiten die Zeitkonstante τ und tragen Sie die Ergebnisse in einer zusammenfassenden Tabelle ein. Die Tabelle soll die Größen C , R , f , $\tau_{\text{exp.}}$, $\tau_{\text{theo.}}$ enthalten.

Interpretieren Sie den Spannungsverlauf von U_R . Aus welchem Grund entspricht der Verlauf dem Ladestrom ?

Zu Aufgabe 2:

Tragen Sie die gemessenen Gleichgewichtsspannungen für die Membranwiderstände R_{M1} und R_{M2} in ein halblogarithmisches Diagramm über die Knotennummer auf. Sie erhalten bei dieser Auftragsung eine Gerade. Berechnen Sie aus der jeweiligen Steigung die Längskonstante λ unter Berücksichtigung der Fehler.

Bestimmen Sie mit Hilfe der beiden Werte für λ die Werte für die Membranwiderstände R_{M1} und R_{M2} .

Zu Aufgabe 3

Tragen Sie das Verhältnis \hat{U}_C/\hat{U}_E gemäß Abbildung 13 in ein Diagramm auf doppelt-logarithmisches Papier (2 auf 4 Dekaden) über die Frequenz auf. Bestimmen Sie hieraus die Grenzfrequenz und vergleichen Sie diesen Wert mit dem theoretisch zu erwartenden Wert.

Versuch 254 Absorption und Dosimetrie II Literatur von Röntgenstrahlen



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Röntgengerät mit Röntgenröhre
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF-Kristall
- Computer
- Filterrad mit Aluminiumfiltern verschiedener Dicke

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Röntgenröhre, Bragg-Reflexion, Röntgenspektren (Bremsstrahlung, charakteristische Röntgenstrahlung), Moseley'sches Gesetz, Absorption von Röntgenstrahlung.

Verständnisfragen:

1. Erklären Sie den Aufbau und das Funktionsprinzip einer Röntgenröhre. In welchem Bereich liegt die Beschleunigungsspannung? Welche Größe bestimmt die Intensität der Röntgenstrahlung?
2. Das Spektrum einer Röntgenröhre ist eine Überlagerung aus einem Bremspektrum und einem charakteristischen Spektrum. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser beiden Spektren. Wovon hängt das charakteristische Spektrum ab?
3. Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 30 kV durchlaufen hat?
4. Was besagt das Moseley'sche Gesetz?
5. Wie lautet das Braggsche Gesetz? Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Röntgenbeugung das Spektrum einer Röntgenquelle messen kann.
6. Geben Sie für folgende Größen den Zusammenhang zwischen dem messbaren Zählraten vor und hinter einem Absorber der Dicke d an: Energie, Intensität, Anzahl der Röntgenquanten.
7. Der Absorptionskoeffizient des menschlichen Körpers (Weichteile) entspricht dem von Wasser (Massenabsorptionskoeffizient bei 50 keV: $\mu/\rho=0,2 \text{ cm}^2/\text{g}$). Berechnen Sie für monoenergetische Röntgenstrahlung von 50 keV jeweils für $d = 1 \text{ cm}$, 5 cm , 10 cm , 20 cm und 30 cm den Energieanteil der Strahlung, der an den Körper abgegeben wird.

IV Aufgaben

- Nehmen Sie bei einer Röhrensorgung von 35 kV das Röntgenspektrum der eingebauten Röntgenröhre auf.
- Messen Sie den Reflexionswinkel der L_{α} - Linie in der ersten Beugungsordnung und bestimmen Sie daraus die Wellenlängen und Energie dieser Linie.
- Röntgenabsorption: Messen Sie die Intensität der L_{α} - Linie in Abhängigkeit unterschiedlich dicker Absorberfolien.

V Grundlagen

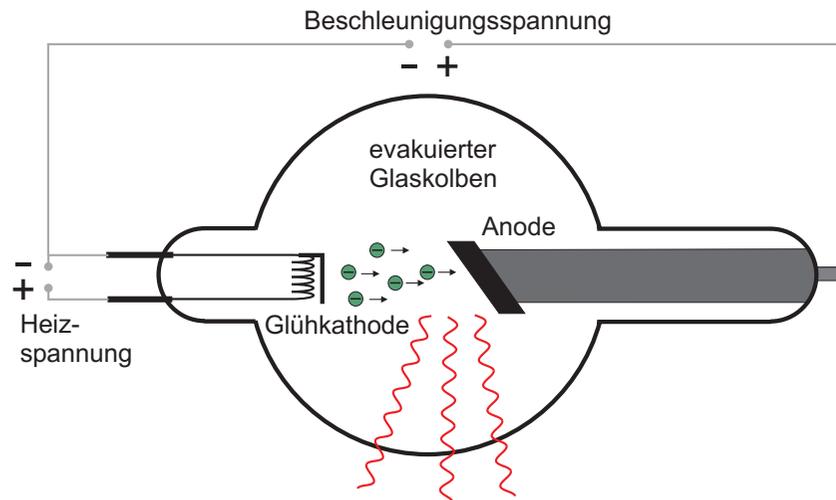


Abbildung 2: Aufbau einer Röntgenröhre.

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden. An der Kathode werden durch Glühemission freie Elektronen erzeugt. Zwischen Kathode und Anode liegt eine Beschleunigungsspannung von typischerweise 10 kV bis 100 kV an. Dadurch werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt und beim Aufprall durch das Coulombfeld der Atomkerne des Anodenmaterials abgebremst. Die dabei verlorene Energie wird teilweise in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Da der Energieverlust der

Elektronen beim Abbremsen unterschiedlich groß ist, entsteht ein kontinuierliches Spektrum, welches als Bremsspektrum bezeichnet wird (Abbildung 3). Auf der kurzwelligen Seite setzt das Bremsspektrum erst oberhalb einer Grenzwellenlänge λ_{gr} ein. Dies folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung: Haben die Elektronen die Spannung U durchlaufen, so besitzen sie eine Energie $E = eU$. Wird nun ein Elektron in einem einzigen Prozess abgebremst, so wird diese Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie $h\nu$ umgewandelt. Für die Grenzwellenlänge λ_{gr} ergibt sich dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h\frac{c}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU}, \tag{1}$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen. Bei entsprechend hohen Beschleunigungsspannungen ist dem kontinuierlichen Bremsspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert.

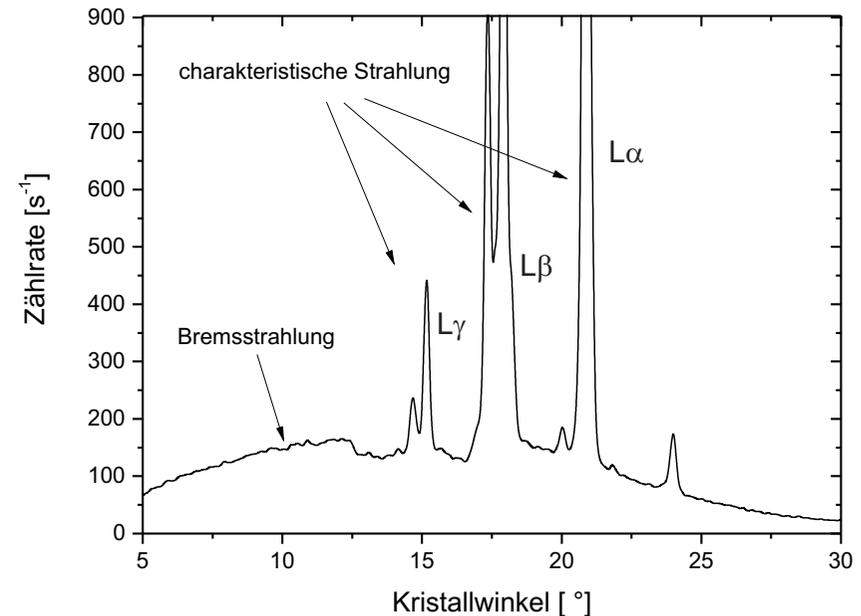


Abbildung 3: Röntgenspektrum

lichen Bremsspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert.

Da dieses vom Anodenmaterial der Röntgenröhre abhängt wird es auch als charakteristisches Spektrum bezeichnet. Die in der Röntgenröhre beschleunigten Elektronen können ihre Energie auch durch Ionisation des Anodenmaterials verlieren. Wird ein Elektron aus den innersten Elektronenschalen herausgeschlagen, so kann die entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer höher liegenden Schale gefüllt werden. Dabei wird die freiwerdende Bindungsenergie in Form eines Röntgenquants abgestrahlt. Je nachdem von welcher auf welche Schale

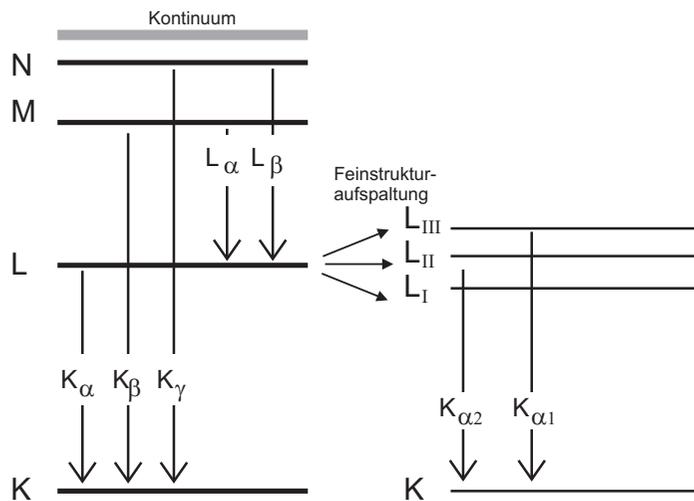


Abbildung 4: Vereinfachtes Termschema eines Atoms

der Elektronenübergang stattfindet, gibt es mehrere mögliche Übergänge die sich zu Serien zusammenfassen lassen können. Erfolgt der Übergang stets auf die innerste Schale, die K-Schale, so spricht man von Übergängen der K-Serie: Beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale wird K_α -Strahlung emittiert, beim Übergang von der M-Schale auf K-Schale handelt es sich um K_β -Strahlung. In Abbildung 4 links, sind mögliche Übergänge anhand des Termschemas von Molybdän dargestellt.

Die Energie der charakteristischen Linien, lässt sich mit Hilfe des Moseley'schen Gesetz abschätzen. Für den Übergang von der n -ten auf die m -te Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = h c R_\infty (Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, R_∞ die Rydbergkonstante ($R_\infty = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$), Z die Kernladungszahl und n bzw. m die jeweiligen Hauptquantenzahlen darstellen. Bei der Größe A handelt es sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung der Kernladung durch Elektronen berücksichtigt. Bei der K_α -Strahlung wird der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt. Hierfür gilt in guter Näherung $A \approx 1$:

$$K_\alpha\text{-Strahlung: } E_{2 \rightarrow 1} = h c R_\infty (Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} h c R_\infty (Z - 1)^2. \quad (3)$$

Für die Energie der K_α -Strahlung von Molybdän erhält man aus dem Moseley'schen Gesetz $E = 17,2 \text{ keV}$. Dies ist eine gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert von $E = 17,4 \text{ keV}$.

Das Moseley'schen Gesetz liefert nur eine Abschätzung der Energie der charakteristischen Strahlung. Tatsächlich besitzen alle Energieniveaus bis auf das K-Niveau noch eine Feinstruktur dessen Energie neben der Hauptquantenzahl auch von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt (Abbildung 4 rechts). So ist beispielsweise das L-Niveau dreifach entartet. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene K_α -Übergänge. Der Übergang $L_{III} \rightarrow K$ wird als $K_{\alpha 1}$ und $L_{II} \rightarrow K$ als $K_{\alpha 2}$ bezeichnet. Der Übergang $L_I \rightarrow K$ ist unter Berücksichtigung von Erhaltungssätzen nicht möglich. Diese zusätzlichen Niveaus führen dazu, dass die K_α -Linie eine Doppellinie darstellt. Diese Doppellinien sind mit den im Praktikum verwendeten Geräten nicht messbar, da deren Energieauflösung dafür zu gering ist.

Die meisten im Praktikum verwendete Röntgengerät besitzt eine Wolfram-anode. Die Energien der K-Linien liegen bei 59 keV bzw. 67 keV . Da die maximale Energie des Röntgengeräts nur 35 keV beträgt, können diese nicht angeregt werden. Im Spektrum sind daher nur die L-Linien sichtbar. Bei denjenigen Geräten, die eine Molybdänanode eingebaut haben, werden Sie die vorher genannten K_α und K_β -Linien beobachten.

V.1 Bragg-Reflexion

Zur Untersuchung des Spektrums einer Strahlungsquelle greift man in der Regel auf zwei verschiedene physikalische Prinzipien zurück: Die Dispersion und die Beugung, die im sichtbaren Bereich Anwendung im Prismenspektrometer bzw. im Gitterspektrometer finden. Für Röntgenstrahlung kann die Dispersion

nicht ausgenutzt werden, da der Brechungsindex von Materie in diesem Wellenlängenbereich kaum von Eins abweicht. Auch die Ausnutzung von Beugungseffekten ist für Röntgenstrahlung komplizierter. Da Beugungserscheinung nur dann auftreten, wenn die Größe des beugenden Objekts etwa der Größenordnung der Wellenlänge ($\lambda \approx 0,1 \text{ pm bis } 10 \text{ nm}$) entspricht, benötigt man ein Gitter mit äußerst kleinen Strukturen. Solche Dimensionen sind technisch kaum realisierbar.

1912 hat Max von Laue einen Kristall mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Dabei beobachtete er ein gleichförmiges Beugungsmuster, woraus er schloss, dass die Atome im Kristall regelmäßig angeordnet sind. Da die Atomabstände im Kristall von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, eignen sich solche Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen. 1913 gelang es schließlich William Henry Bragg und seinem Sohn William Lawrence Bragg den Zusammenhang zwischen der Kristallstruktur und den entstehenden Beugungsmustern zu erklären. Die Röntgenbeugung an Kristallen wird daher auch als Bragg-Reflexion bezeichnet. Trifft Röntgenstrahlung unter dem Winkel ϑ (Abbildung 5a) auf die Oberfläche eines Kristalls, so wird dieser gemäß des Reflexionsgesetzes reflektiert. Da die Strahlung tief in den Kristall eindringen kann, finden zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt. Die Intensität der reflektierten Gesamtstrahlung hängt vom Gangunterschied Δs der teilreflektierten Strahlung ab. Beträgt dieser für zwei benachbarte Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so interferieren diese konstruktiv. Ist dies nicht der Fall, so löschen die teilreflektierten Strahlen aus (Vielstrahlinterferenz). Ist d der Netzebenenabstand, so folgt aus Abbildung 5a) für den Gangunterschied Δs :

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \tag{4}$$

und damit das Bragg'sche Gesetz:

$$2d \sin \vartheta = n \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz.} \tag{5}$$

Die unter dem Winkel ϑ reflektierte und konstruktiv interferierende Strahlung hängt demnach von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie von der Kristallstruktur (Netzebenenabstand) ab. Somit eignet sich die Bragg- Reflexion zur Monochromatisierung von Röntgenstrahlung und damit zur Messung des Spektrums einer Röntgenquelle. Bei der Drehkristallmethode (Abbildung 5b) wird

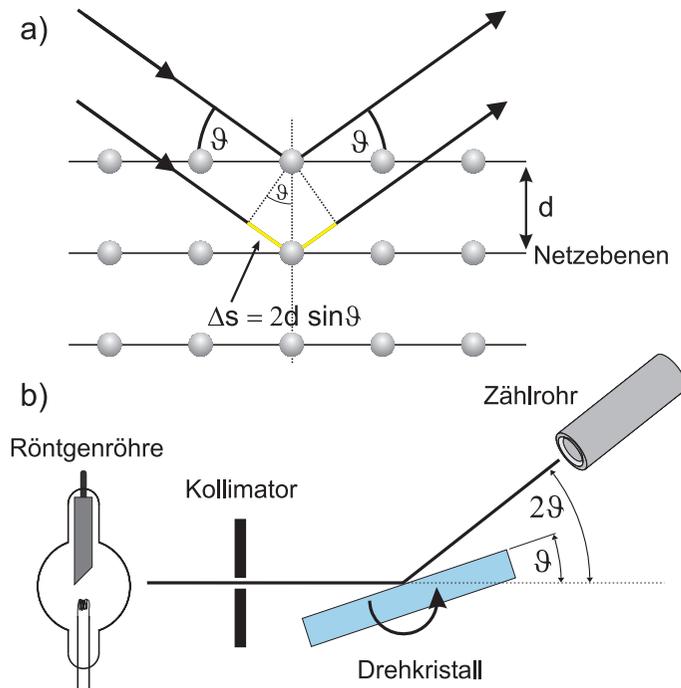


Abbildung 5: a) Bragg- Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Drehkristallmethode zur Messung des Spektrums einer Röntgenröhre.

der Einfallswinkel ϑ variiert, in dem der Kristall um eine Achse senkrecht zur einfallenden Strahlung gedreht wird. Bei jeder Winkelstellung besitzt die reflektierte Röntgenstrahlung eine bestimmte Wellenlänge dessen Intensität z.B. mit einem Zählrohr gemessen werden kann. Das Spektrum in Abbildung 3 wurde nach diesem Verfahren gemessen.

V.2 Wechselwirkung mit Materie

Die Schwächung von Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie hängt im wesentlichen von zwei Mechanismen ab (Abbildung 6):

1. Photoeffekt: Ein Röntgenquant gibt seine Energie an ein Elektron in der Atomhülle ab und schlägt dieses aus der Hülle. Durch Nachrücken äußerer

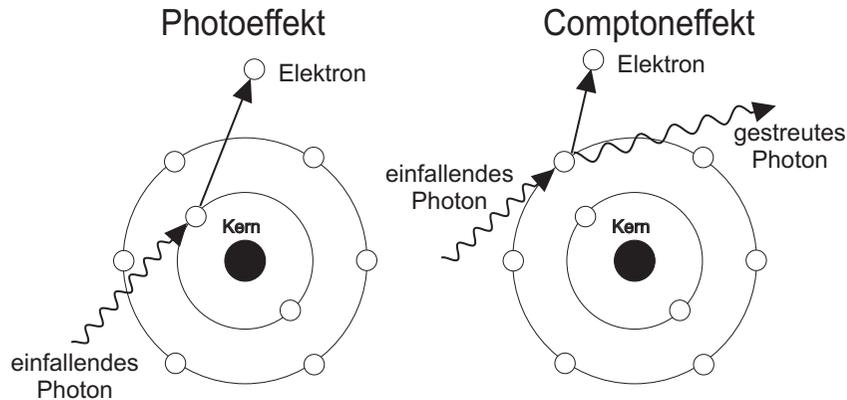


Abbildung 6: Absorption von Röntgenstrahlung durch Photoeffekt und Comptoneffekt.

Elektronen, kommt es zu charakteristischer Strahlung. Jedesmal wenn die Energie der Röntgenquanten ausreicht, um eine tiefer gelegene Schale zu ionisieren, steigt die Absorption schlagartig an. Diese charakteristischen Linien sitzen auf einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum (Abbildung 7).

2. Comptonstreuung: Ein Röntgenquant wird inelastisch an einem Hüllenelektron gestreut und verliert dadurch einen Teil seiner Energie. Der Energieverlust wächst für höhere Energien an.

Für kleine Energien dominiert der Photoeffekt, welcher mit steigender Energie rasch abnimmt bis die Comptonstreuung dominiert. Bei sehr großen Energien tritt ein weiterer Effekt auf (Paarbildung).

Für monoenergetische Strahlen kann die Intensität der Röntgenstrahlung aufgefasst werden als die Zahl der Photonen, die pro Zeit durch eine Flächeneinheit tritt. Einheit = $1/(m^2 \cdot s)$

Für die Intensität gilt das Absorptionsgesetz.

$$I_d = I_0 e^{-\mu d}$$

- I_d = Intensität hinter der absorbierenden Schicht der Schichtdicke d
- I_0 = Intensität vor der absorbierenden Schicht
- μ = Absorptionskoeffizient (Einheit $1/cm$)
- d = Schichtdicke (Einheit cm)

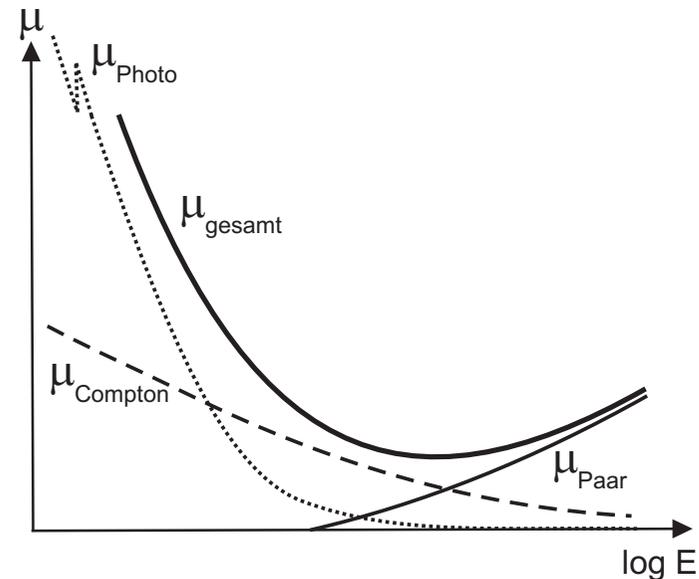


Abbildung 7: Beitrag des Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung zum Schwächungskoeffizient für Röntgen- bzw. γ -Strahlung.

Statt der Schichtdicke führt man oft die Masse pro Fläche (Flächendichte) ein: ρd (ρ = Dichte)

Dann ist

$$I = I_0 e^{-(\mu/\rho)\rho d}$$

Die Größe μ/ρ bezeichnet man als Massenabsorptionskoeffizient.

Wie der radioaktive Zerfall ist die Absorption von Röntgenstrahlen ein statistischer Prozess. Das Absorptionsgesetz beschreibt die nach der Dicke d noch vorhandenen Röntgenquanten, liefert jedoch keine Aussage über ein einzelnes Quant. Analog zum radioaktiven Gesetz können wir hier die Halbwertsdicke einführen, d.h. die Dicke, nach der noch die Hälfte der ursprünglichen Quanten vorhanden ist.

$$H_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Die Halbwertsdicke hängt von der spektralen Zusammensetzung

der Röntgenstrahlen ab. Langwellige, d.h. energieärmere ("weiche") Röntgenstrahlung wird stärker absorbiert als kurzwellige ("harte") Strahlung.

Für *monoenergetische* Strahlung gilt:

$$I_d = I_0(d = 0) e^{-\mu d}$$

d = Dicke des Absorbers

μ = linearer Absorptionskoeffizient, gemessen in m^{-1} .

Der lineare Absorptionskoeffizient μ ist um so größer, je "dichter gepackt" die Atome im Absorber liegen, d.h. μ ist der Atomdichte proportional. Zur physikalischen Charakterisierung eines Absorbermaterials zieht man daher besser den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ heran. (ρ = Dichte des Materials; μ/ρ wird gemessen in cm^2/g). Der Massenabsorptionskoeffizient hängt von der Energie $h\nu$ der Strahlung, der Ordnungszahl Z und der Massenzahl A des Absorbers ab.

Für die Absorption durch Photoeffekt gilt näherungsweise:

$$\text{Photoeffekt } (\gamma + \text{Atom} \rightarrow \text{Ion}^+ + e^-) \quad \frac{\mu_{\text{Photo}}}{\rho} \sim \frac{Z^4}{\nu^3} \frac{1}{A} \approx \lambda^3 Z^3$$

Die Absorption bei Streuung spielt vor allem für Elemente mit kleinem Z und für hochenergetische Röntgenstrahlung eine Rolle.

Anwendungen der Z - und ν - Abhängigkeit des Photoeffekts:

- Kontrast in Röntgenaufnahmen (höheres Z in Knochen, Kontrastmittel)
- Filterung von Röntgenstrahlung durch Absorber, um weiche Komponenten (ν klein) zu beseitigen. (Härtung von Röntgenstrahlen)

V.3 Gerätebeschreibung

Das im Praktikum eingesetzte Röntgengerät ist als Zählrohr-Goniometer (Abbildung 8) ausgeführt, mit schwenkbarem Messarm und einem Probenträger in der Drehachse. Die Röntgenröhre (Wolframanode, maximal 35 kV, 1 mA) ist in

einem separaten Röhrenraum untergebracht, der zur Abschirmung - wie auch der Experimentierraum mit dem Goniometer - mit einer Bleiglas-Schiebetür verschlossen wird. Am Übergang zum Experimentierraum ist ein Kollimator eingesetzt. Der Kristall ist fest an der Drehachse des Goniometers fixiert. Die Drehwinkel von Messarm und Probenträger können im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden, so dass beim Nachweis der Bragg-Reflexe und bei der Aufnahme von Röntgenspektren das auf dem Messarm befestigte Zählrohr immer die richtige Position zum Auffangen der Reflexe hat, d.h. die Probennormale halbiert stets den Winkel zwischen Primärstrahlrichtung und der Richtung der reflektierten Strahlung. Dieser Modus ist für die Messungen der Bragg-Reflexion zu wählen. Die reflektierte Strahlung wird mit einem am Messarm befestigten Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen. Die Spannungsversorgung des Zählrohrs und der Impulszähler sind, genau wie die Steuerung des Goniometers, in das Röntgengerät integriert und über das Bedienfeld rechts von der Röntgenröhre zu steuern. Über das dort platzierte Display lassen sich die Messwerte anzeigen. Die Einstellung des Gerätes kann auch rechnergesteuert mit einem PC erfolgen.

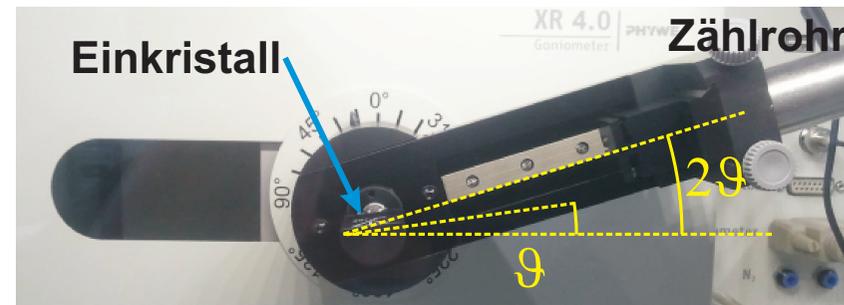
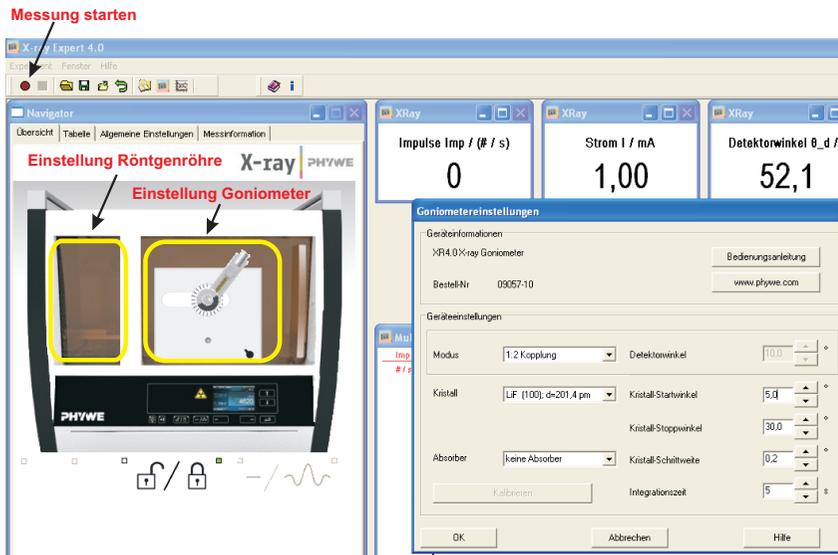
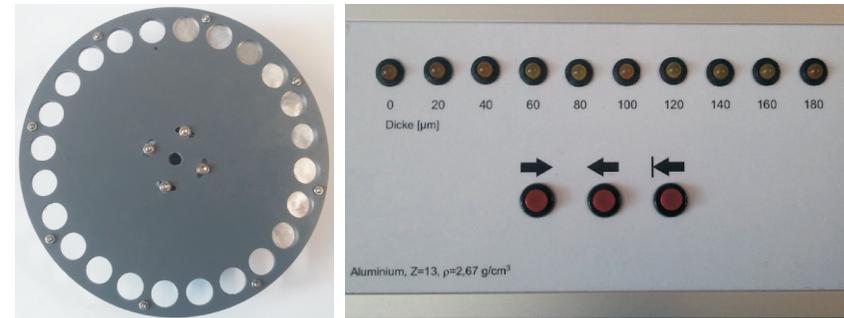


Abbildung 8: Aufbau des Goniometers.

Starten Sie dazu die Software **measure** vom Desktop aus. Sollte es Probleme mit der Erkennung des Röntgengerätes geben, schließen Sie das Programm und starten das Röntgengerät neu. Sobald das Röntgengerät wieder betriebsbereit ist, sollte die Software das Gerät erkennen. Im Programm ist eine Symboldarstellung des Röntgengerätes dargestellt. Zum Einstellen der Parameter müssen Sie auf die entsprechenden Bereiche der Symboldarstellung doppelklicken. Soll z.B. die Beschleunigungsspannung eingestellt werden, müssen Sie auf die Röntgenröhre klicken- soll der Winkelbereich modifiziert werden, müssen Sie auf das Goniometer doppelklicken (siehe gelbe Markierungen in Abbildung 9). Für die Messung

Abbildung 9: *Einstellung der Geräteparameter.*

der Absorption von Röntgenstrahlung befindet sich im Gerät direkt hinter dem Kollimator, eine drehbar gelagerte Scheibe mit 9 verschiedenen Aluminiumabsorbieren (Abbildung 10). Die Dicke variiert von 0,02 mm bis 0,18 mm in Schritten von 0,02 mm. Der jeweilige Absorber kann mit den Pfeiltasten am Steuergerät, das sich außerhalb des Röntgengeräts befindet, ausgewählt werden. Mit der rechten Pfeiltaste wird der Absorber in die Nullposition gestellt. Die gewählte Absorberdicke wird durch Leuchtdioden angezeigt.

Abbildung 10: *Absorberscheibe mit Steuergerät.*

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Messen des Röntgenspektrum der eingebauten Röntgenröhre

Überzeugen Sie sich, dass die Absorberscheibe auf Null steht (Leuchtdiode leuchtet beim Wert 0 μm). Schalten Sie das Röntgengerät auf der Rückseite neben dem Netzstecker ein. Starten Sie das Programm `measure` vom Desktop aus. Klicken Sie doppelt in der Symboldarstellung auf die Röntgenröhre (Abbildung 9) und wählen Sie für die Röhrenspannung 35 kV und für den Emissionsstrom 1 mA. Stellen Sie anschließend den Scanbereich ein indem Sie doppelt auf das Goniometer klicken. Wählen Sie folgende Einstellungen:

- Modus: 1:2 Kopplung
- Kristall: LiF
- Kristall Startwinkel: 5°
- Kristall Stoppwinkel: 30°
- Kristall Schrittweite: $0,1^\circ$
- Integrationszeit: 5 s.

Verriegeln Sie die Tür des Röntgengeräts mit dem Taster unter dem Schlosssymbol auf der Frontplatte des Röntgengeräts. Das verriegelte Schloss muss

leuchten. Falls dies nicht möglich ist, müssen Sie die Tür des Röntgengeräts von Hand öffnen, wieder schließen und erneut auf den Taster drücken. Starten Sie im Programm die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol in der linken Ecke der Menüleiste (Abbildung 9).

Die Messung dauert nun etwa 20 Minuten. Danach stoppt der Messvorgang automatisch und es erscheint ein Hinweisfenster. Wählen Sie die Option **alle Messungen an measure uebertragen** aus. Dadurch startet ein neues Programm in dem Sie die Daten auswerten und ausdrucken können. Vermessen Sie die Lage der charakteristischen Linien. Am einfachsten geht dies mit der Option **Peakanalyse** im Menü **Messauswertung**. Aktivieren Sie im folgenden Fenster die Option **Ergebnisse einzeichnen** und klicken Sie auf **Berechne**. Speichern Sie das Diagramm ab.

Aufgabe 2: Messen der stärksten Emissionslinie

Lesen Sie aus Ihrer Messung die Lage der L_{α} Linie ab (stärkste Linie). Gehen Sie zurück zum Messprogramm indem Sie auf das Icon ganz rechts in der Symbolleiste klicken. Wiederholen Sie die Messung aus Aufgabe 2 in einem schmalen Bereich (1° - 2°) um die L_{α} Linie mit einer Integrationszeit von 20 s. Speichern Sie das Diagramm ab.

Aufgabe 3: Messen der Absorption von monochromatischer Röntgenstrahlung

Die Messung soll mit Röntgenquanten gleicher Energie erfolgen. Da die L_{α} Linie die höchste Intensität im Spektrum besitzt, wird das Goniometer auf diesen Winkel eingestellt. Klicken Sie wieder doppelt auf das Goniometer und wählen Sie für die Option **Kristall Startwinkel** den von Ihnen bestimmten Wert der L_{α} Linie. **Kristall Stoppwinkel** müssen Sie auf einen etwas größeren Wert stellen. Die Integrationszeit stellen Sie auf 30 s ein. Starten Sie die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol und beenden Sie diese Messung sofort wieder durch einen Klick auf das Symbol mit dem Quadrat. Der Winkel ist jetzt fest eingestellt. Schalten Sie die Röntgenröhre am Bedienfeld des Röntgengeräts ein. Das Wellensymbol muss leuchten. Die Intensität wird nun am Display angezeigt und nach Ablauf der Integrationszeit fortlaufend aktualisiert. Wählen Sie am Steuergerät für die Absorberscheibe den Wert Null und lesen Sie die Intensität am Display ab. Notieren Sie nicht den ersten aktualisierten Wert auf dem Display sondern warten Sie ab bis der Wert auf dem Display erneut aktualisiert wurde. Wiederholen Sie dies für alle weiteren Absorberdicken. Auch hier ist es wichtig, dass Sie nicht direkt den Wert nach der Aktualisierung aufschrei-

ben sondern einen weiteren Messzyklus abwarten. Sie müssen immer sicher sein, dass Sie mit jeder Einstellung tatsächlich genau 30 Sekunden gemessen haben. Notieren Sie bei jeder Messung die Absorberdicke und die gemessene Intensität. Tragen Sie die Messwerte sofort auf ein- bzw. zweidekadisches einfachlogarithmisches Papier auf (x-Achse: linear die Absorberdicke und y-Achse: logarithmisch die Intensität). Falls hier „Ausreißer“ auftreten, haben Sie die Möglichkeit einen einzelnen Wert nochmals nachzumessen.

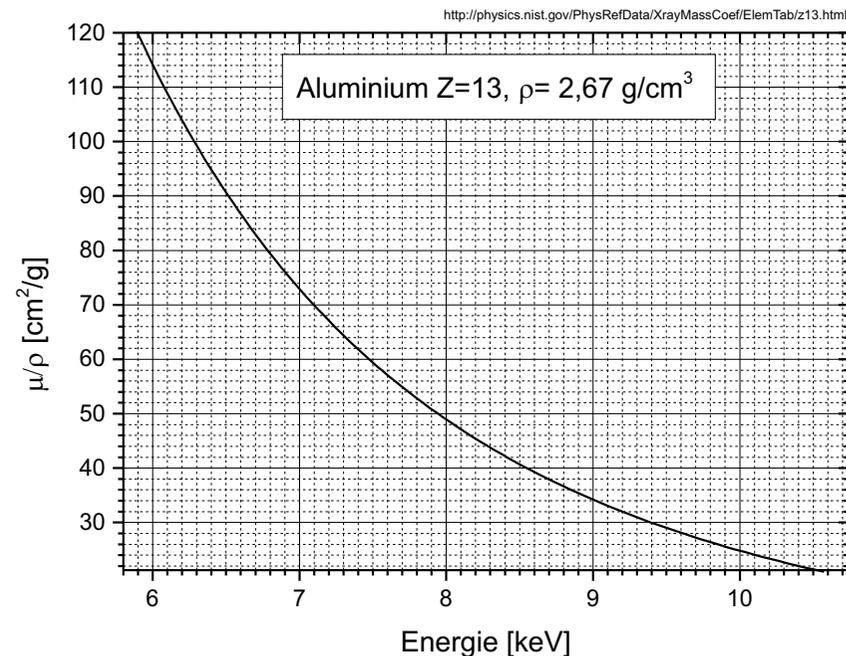


Abbildung 11: Massenabsorptionskoeffizient von Aluminium

VII Auswertung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie aus dem Diagramm der L_α - Linie die Lage des Peakmaximums sowie die Halbwertsbreite (Breite der Linie in halber Höhe). Mit Hilfe der Bragg- Gleichung und dem Netzebenenabstand von Lithiumfluorid (LiF) mit $d=201,4$ pm, können Sie die Wellenlänge und damit die Energie der L_α -Linie berechnen. Den Fehler der Energie berechnen Sie analog aus der Halbwertsbreite. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert $E \approx 8,4$ keV.

Aufgabe 2: Tragen Sie im Diagramm der Absorptionsmessung noch Fehlerbalken ein und zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade und eine Fehlergerade mit ein. Bestimmen Sie hieraus die Halbwertsdicke und berechnen Sie den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ in der Einheit cm^2/g . Die Dichte von Aluminium beträgt $2,67$ g/cm^3 . Schätzen Sie den Fehler ab. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert aus Abbildung 11.