

Universität Heidelberg  
Physikalisches Praktikum 1 für  
Studierende der Physik B.Sc.  
Ausgabe 2. August 2024



## Inhaltsverzeichnis

|   |     |
|---|-----|
| Grundlagen . . . . .  | 2   |
| Hinweise zur Fehlerrechnung . . . . .                             | 13  |
| Versuch 11 Einführung . . . . .                                   | 28  |
| Versuch 12 Trägheitsmoment . . . . .                              | 34  |
| Versuch 13 Resonanz . . . . .                                     | 37  |
| Versuch 14 Mathematisches Pendel . . . . .                        | 41  |
| Versuch 15 Schiefe Ebene . . . . .                                | 47  |
| Versuch 21 Elektrolyse . . . . .                                  | 51  |
| Versuch 22 Bestimmung der Elementarladung nach Millikan . . . . . | 56  |
| Versuch 23 Strom- und Spannungsmessung . . . . .                  | 60  |
| Versuch 25 Oszilloskop . . . . .                                  | 66  |
| Versuch 26 Schallgeschwindigkeit . . . . .                        | 76  |
| Versuch 31 Optische Abbildung . . . . .                           | 81  |
| Versuch 33 Prismenspektrometer . . . . .                          | 91  |
| Versuch 34 Spektralphotometrie . . . . .                          | 96  |
| Versuch 35 Fotoeffekt . . . . .                                   | 101 |
| Versuch 41 Temperaturmessung . . . . .                            | 107 |
| Versuch 42 Wärmekapazität . . . . .                               | 114 |

# Grundlagen

## I Vorbemerkung

Dieses Praktikum verfolgt hauptsächlich drei Ziele:

1. Sie lernen den Umgang mit physikalischen Messgeräten und Messapparaturen.
2. Kenntnisse, die Sie bereits erworben haben (oder noch erwerben werden) sollen durch die Überprüfung im Experiment gesichert werden.
3. Das Führen eines Protokolls.

Zu diesem Zweck enthält das Praktikum Versuche mit überschaubarer Theorie und einfachen Messapparaturen, deren Funktionsweise leicht einzusehen ist. Natürlich ist damit nicht die Messgenauigkeit aufwendiger Apparaturen, wie sie in der Forschung verwendet werden, erreichbar. Das Ziel des Praktikums sind weniger präzise Ergebnisse, sondern Sie sollen lernen, die Einflüsse, die die Messgenauigkeit begrenzen, zu erkennen und einzuschätzen. Aus diesem Grund sollen bei der Auswertung die Ergebnisse stets mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

Lesen Sie bei der Versuchsvorbereitung die Versuchsanleitung genau durch und überlegen Sie, was bei der Versuchsdurchführung und Auswertung gemacht werden soll, welche Messwerte Sie brauchen, usw. Nur so können Sie zügig messen und vermeiden unnötige Mehrarbeit durch Fehler beim Auswerten.

Gestalten Sie die Auswertung übersichtlich und kennzeichnen Sie alle Angaben so, dass man sofort erkennen kann, worum es sich handelt (z.B.: „aus der Zeichnung abgelesen:“, „Literaturwert:“, „Mittelwert der Messreihe:“). Endergebnisse werden stets zusammen mit ihrem Fehler angegeben und besonders kenntlich gemacht, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Es ist unsinnig, den Fehler mit mehr als zwei Stellen anzugeben; das Ergebnis soll bis auf maximal zwei ungenaue Stellen angegeben werden (s.u.).

Bei graphischen Darstellungen von Messwerten ist folgendes zu beachten:

- Die graphische Darstellung erfolgt grundsätzlich auf Millimeterpapier bzw. Logarithmenpapier.
- Richtige Größe wählen. Nutzen Sie wenn möglich den vollen Bereich des mm-Papiers bzw. Logarithmenpapiers.

- Bei jeder Achse Messgröße und Maßeinheit angeben (Bsp.: T in °C, T [°C], T/°C).
- Um sich das Eintragen der Messpunkte zu erleichtern, empfiehlt es sich eine sinnvolle Achseneinteilung zu wählen (z.B. 1 °C=0,5 cm oder 1 cm oder 2 cm zu wählen und nicht 1 °C=0,4 cm oder 2,5 cm)
- Verbinden Sie beim Zeichnen von Kurven nicht einfach die Punkte miteinander („Malen nach Zahlen“), sondern versuchen Sie die Streuung der Messwerte auszugleichen.
- Befinden sich mehrere Kurven in einem Diagramm, so sind die einzelnen Kurven und Messwerte zu kennzeichnen (Legende hinzufügen).
- Jede Zeichnung, Tabelle und Diagramm muss mit einer Text-Überschrift versehen werden.

## II Vorbereitung

Um das Praktikum effizient durchzuführen, ist eine gründliche Vorbereitung notwendig. Es ist nicht in Ihrem Interesse die Versuche „starr“ nach Anleitung abzuarbeiten, ohne zu verstehen was Sie überhaupt praktizieren. Die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum setzt voraus, dass Sie ein entsprechendes Kenntnisniveau der mit den Versuchen verknüpften Physik besitzen. Ob diese Kenntnisse aus Ihrem Fundus oder aus Ihrer Vorbereitung stammen, ist natürlich belanglos. Informieren Sie sich vor Beginn der Versuchsdurchführung, über die Stichpunkte, die bei den jeweiligen Versuchen unter dem Kapitel „Vorbereitung“ aufgelistet sind. Dabei reicht das alleinige Studium der Praktikumsanleitung keinesfalls aus. **Die Praktikumsanleitung ist kein Lehrbuch!** Zu jedem Versuch sind daher zusätzlich Literaturempfehlungen angegeben. Bei den meisten Versuchen ist es vollkommen ausreichend, wenn Sie sich mit Hilfe der Standardwerke (Walcher, Gerthsen, Bergmann-Schäfer, etc.) auf die Versuche vorbereiten.

Um Ihnen die Vorbereitung zu erleichtern, sind neben den Stichpunkten zusätzlich noch Fragen in der Praktikumsanleitung aufgelistet.

Eine Versuchsdurchführung ohne ausreichende Vorbereitung ist klarerweise ohne Lerneffekt und nicht sinnvoll. Die Praktikantin oder der Praktikant muss in diesem Fall damit rechnen, nach Hause geschickt zu werden und den Versuch zu einem späteren Zeitpunkt zu wiederholen.

Die folgenden Punkte fassen das Basiswissen zusammen, über das Sie bei den Versuchen verfügen sollten:

1. Mathematische Voraussetzungen - elementare Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponential-Funktion - elementares Differenzieren und Integrieren - gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung/Kraftgesetz, Gleichung des natürlichen Wachstums.
2. Statistik und Fehler - Mittelwert, Standardabweichung, statistische und systematische Fehler, Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung, Gauß-Verteilung.
3. Die 7 Basiseinheiten des SI-Systems : m, kg, s, A, K, mol, Cd.
4. Mechanik - Newtonschen Gesetze; Kräfteparallelogramm - Erhaltungssätze für Translation und Rotation (Energie, Impuls, Drehimpuls) - Drehmoment, Trägheitsmoment u. Steinerscher Satz - Hooksches Gesetz - Resonanzkurve - Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators und typische Lösungen - Schallgeschwindigkeit, longitudinale und transversale Schwingungen.
5. Elektrizitätslehre - Elementarladung und Ladungserhaltung; Faraday-Konstante, Avogadrokonstante, Stoffmenge - Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, spezifischer Widerstand - Messbereichserweiterung von Messinstrumenten - Kondensator, Kapazität - Herleitung Kondensatorentladung, Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld.
6. Optik - Reflexions- und Brechungsgesetz - Abbildung mit Linsen (geometrische Bildkonstruktion, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab) - kontinuierliche und Linienspektren (qualitatives Verständnis) - Auflösungsvermögen optischer Instrumente.
7. Wärmelehre - Wärme, Zustandsgrößen (Temperatur, innere Energie,...), Zustandsgleichung des idealen Gases - 1. und 2. Hauptsatz, Wärmebilanz, spezifische Wärme, Phasendiagramm, Dampfdruck - Van-der-Waals-Gleichung realer Gase, Verlauf der Isothermen im  $p(V)$ -Diagramm, Gesetz von Dulong-Petit, Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz, Clausius-Clapeyron Gleichung.

Die Kenntnis dieses Basiswissens erspart natürlich nicht das sorgfältige Durcharbeiten der Anleitung und die Vorbereitung der anderen Kapitel im Skript.

Insbesondere sollten Sie sich bei der Vorbereitung auch schon über die Versuchsdurchführung, die Messmethoden und über die Auswertung Gedanken machen. Machen Sie sich bewusst, was und wie Sie messen werden und schätzen Sie ab, welchen Einfluss die Fehler der Einzelmessungen auf den Gesamtfehler haben (Bsp.: eine quadratische Größe geht mit doppeltem Gewicht ein als eine lineare).

### III Durchführung der Versuche

Sehen Sie sich die Apparatur gründlich an und machen Sie sich mit der Funktion aller Einzelteile vertraut. Spielen Sie die Messprozedur nach Möglichkeit zunächst qualitativ durch. Wenn Sie eine elektrische Schaltung herzustellen haben, kontrollieren Sie zunächst selbst sorgfältig, ob Sie keine Schaltfehler gemacht haben. **Vor Anlegen der Spannung muss die Schaltung vom Assistenten abgenommen werden.** Das Protokoll wird auch während der Messungen lückenlos geführt, d.h. man soll keine großen Zwischenräume für spätere Eintragungen lassen. Lassen Sie sich Zeit zum Führen eines ordentlichen Protokolls.

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsaufbaus: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung. Im Einzelnen soll das Protokoll enthalten:

1. Überschrift und Versuchsnummer.
2. Einleitung: Formulierung der theoretischen Grundlagen, sowie physikalischer Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis des Versuchs erforderlich sind.
3. Das Protokoll muss so ausgelegt sein, dass Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann, dann die für den Versuch nötigen Umformungen. Damit man den Einfluss der Fehler der gemessenen Größen auf das Versuchsergebnis leichter übersehen kann, ist es zweckmäßig, die Formeln auf die Form

*Versuchsergebnis = Funktion der direkt gemessenen Größen*

zu bringen. Alle Abkürzungen, die in den Formeln vorkommen, müssen erklärt sein, evtl. mit Hilfe der Skizze der Apparatur. Diesen Teil des Protokolls schreiben Sie am besten schon zu Hause bei der Vorbereitung.

4. Skizze und Beschreibung der Versuchsanordnung (schematisch, Schaltplan bei elektrischen Schaltungen).
5. Knappe aber vollständige Angaben über das Messverfahren, soweit dies nicht völlig selbstverständlich ist. Das Protokoll muss selbsterklärend sein!
6. Präsentieren Sie Ihre Messergebnisse in Form von Tabellen und Diagrammen, die klar und ausreichend beschriftet sein müssen. Kommentieren Sie diese mit einigen einleitenden Sätzen.
7. Führen Sie nach Möglichkeit eine vorläufige Auswertung unmittelbar nach der Messung durch.
8. Bei der Auswertung müssen alle Zwischenrechnungen im Protokollheft ausgeführt werden. Vergleichen Sie, soweit vorhanden, Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten. Bei der Fehlerabschätzung berücksichtigen Sie nur die Faktoren, die Sie quantitativ kennen, also im allgemeinen die zufälligen Fehler und die mutmaßliche Genauigkeit der Eichung der Instrumente. **Es genügt vollständig, sich auf die Faktoren zu beschränken, die die Messgenauigkeit hauptsächlich begrenzen.** Wenn Sie glauben, dass bei dem Versuch systematische Fehler auftreten, die Sie nicht quantitativ erfassen können, machen Sie hierüber eine kurze Bemerkung. Achten Sie darauf, dass Sie alle zur Auswertung nötigen Angaben aufgeschrieben haben (z.B. Barometerstand, Zimmertemperatur, etc.).
9. Zusammenfassung und kritische Diskussion. Fassen Sie am Schluss der Auswertung den gesamten Versuch mit einigen kurzen Sätzen zusammen. Gehen Sie dabei auf die physikalische Fragestellung ein, das Messprinzip, die Messergebnisse und Fehler. Setzen Sie sich kritisch mit dem Versuch auseinander. Gibt es Möglichkeiten den Versuchsaufbau oder das Messprinzip zu verbessern? Gibt es Möglichkeiten die Fehler zu minimieren?

## IV Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung

Jede Messung kann nur mit einer begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden. Zwei unabhängige Messungen werden daher unterschiedliche Ergebnisse liefern. Damit das Resultat einer Messung aussagekräftig ist, reicht es nicht aus nur den Zahlenwert des Messergebnisses anzugeben, sondern es muss auch eine Aussage über die Messgenauigkeit gemacht werden. Dies geschieht z.B durch die Angabe eines Intervalls  $[x - \Delta x, x + \Delta x]$  bzw.

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

innerhalb dessen der „wahre Wert“ mit einer bestimmten, anzugebenen Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel:

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel ergab folgendes Resultat:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Die erste Zahlenangabe entspricht der besten Schätzung des „wahren Wertes“. Die zweite Zahl ist die Messgenauigkeit, die man häufig auch den „Fehler“ des Messergebnisses nennt. Das Wort „Fehler“ darf nicht falsch interpretiert werden. Diese Angabe gibt nicht etwa den Betrag an, um den das Messergebnis falsch ist, sondern stellt ein Unsicherheitsbereich dar, in dem der „wahre Wert“ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, werden wir an späterer Stelle diskutieren. Das Resultat der Messung ist dann wie folgt zu interpretieren:

*Als beste Schätzung für die Erdbeschleunigung wurde ein Wert von  $9,81 \text{ m/s}^2$  bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Intervall  $9,78 \text{ m/s}^2 \dots 9,84 \text{ m/s}^2$ .*

Beachten Sie, dass es bei der Angabe des Messergebnisses und der Messunsicherheit keinen Sinn macht beliebig viele Nachkommastellen anzugeben (Taschenrechnerergebnis). Die Angabe

$$g = (9,8114587 \pm 0,0298682) \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

ist sinnlos. Die Messgenauigkeit soll auf eine oder höchstens zwei signifikante Stellen gerundet werden und die letzte signifikante Stelle des Messergebnisses

soll der selben Größenordnung entsprechen wie die Messgenauigkeit:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (4)$$

## IV.1 Systematische und Statistische Fehler

Bei einer Messung können zwei Arten von Fehlern auftreten: Systematische Fehler und statistische (zufällige) Fehler. Systematische Fehler führen dazu, dass das Messergebnis einseitig vom wahren Wert abweicht. Eine Wiederholung der Messung zeigt immer die gleiche Abweichung. Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“. Im Gegensatz dazu schwanken bei zugrundeliegenden statistischen Fehlern, die Messwerte zufällig. Mal sind sie größer, das andere mal kleiner als der „wahre Wert“.

### IV.1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler werden zunächst durch die begrenzte Genauigkeit der Eichung der Instrumente verursacht. Bei Maßstäben und Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit. An vielen Analogmessinstrumenten ist zusätzlich noch eine Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt den relativen Fehler des Messbereichsendwertes an. Wird z.B. mit einem Voltmeter der Klasse 1,5 innerhalb eines Messbereiches von 200 V eine Messung durchgeführt, so beträgt der Fehler 1,5% von 200 V, d.h. 3 V. Bei digitalen Instrumenten wird der Fehler in der Regel durch zwei Größen angegeben. Einen prozentualen Fehler, der sich entweder auf dem Messwert (Angabe *v.M.* = vom Messwert) oder auf den Messbereich (Angabe *v.E.* = vom Endwert) bezieht, sowie eine Fehlerangabe in der Form:  $\pm x$  Digits. Die letztere Angabe bedeutet, dass der Messwert um  $\pm x$  Einheiten der hintersten Stelle der Anzeige schwanken kann.

Beispiel: Mit einem digitalen Voltmeter mit der Genauigkeitsangabe

$$\pm 1,5\% \text{ v.M.}, \pm 3 \text{ Digits}$$

wird ein Spannung von 12,00 V gemessen. Der absolute Fehler berechnet sich aus 1,5% vom Messwert sowie drei Einheiten der letzten Stelle: 1,5% von 12,00 V und  $3 \times 10 \text{ mV} = 180 \text{ mV} + 30 \text{ mV} = 210 \text{ mV}$ .

Desweiteren können systematische Fehler auch durch Umwelteinflüsse wie Temperaturdriften, Einkopplung elektrischer Felder (z.B. Netzbrummen) etc. oder aber auch durch grundsätzliche Mängel des Messverfahrens verursacht werden.

| Nr. | $x$ [V] |
|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|
| 1   | 5,070   | 6   | 5,039   | 11  | 5,053   | 16  | 5,038   |
| 2   | 5,073   | 7   | 5,043   | 12  | 5,054   | 17  | 5,058   |
| 3   | 5,031   | 8   | 5,034   | 13  | 5,078   | 18  | 5,040   |
| 4   | 5,024   | 9   | 5,034   | 14  | 5,071   | 19  | 5,071   |
| 5   | 5,034   | 10  | 5,079   | 15  | 5,050   | 20  | 5,051   |

Tabelle 1: *Ergebnisse einer 20-maligen Spannungsmessung.*

Z.B. muss bei der Messung an einer hochohmigen Spannungsquelle der Innenwiderstand des Voltmeters berücksichtigt werden (wichtig in Versuch 41 *Temperaturmessung*). Geschieht dies nicht, treten systematische Abweichungen auf. Für die Abschätzung von systematischen Fehlern lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Es kommt im Einzelfall auf den Scharfsinn und die physikalischen Kenntnisse des Experimentators an. Allerdings können systematische Fehler auch noch nach einer Messung berücksichtigt werden. Sind die Ursachen bekannt, kann das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.

### IV.1.2 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Prozesse während des Messprozesses. Ursachen hierfür sind z.B. das Rauschen eines Sensors oder thermodynamische Prozesse. Auch der Experimentator selbst kann eine statistische Fehlerquelle darstellen, da dieser stets die Messwerte aufnehmen, ablesen und interpretieren muss. All dies kann statistischen Schwankungen unterliegen. Z.B. wird man bei einer mehrmaligen Zeitmessung mit einer Stoppuhr aufgrund schwankender Reaktionszeiten verschiedene Ergebnisse erhalten.

Statistische Fehler haben die Eigenschaft, dass die Messergebnisse zufällig um den „wahren Wert“ schwanken. Falls es möglich ist eine Messung mehrmals zu wiederholen, können solche Fehler mit Mitteln der Statistik aus der Streuung der Messwerte ermittelt werden.

Tabelle 1 zeigt ein Beispiel, bei dem eine elektrische Spannung  $x$  20-mal gemessen wurde. Die Messwerte sind in Abbildung 1 eingetragen.

Gesucht ist ein Wert der die beste Schätzung des wahren Wertes darstellt. Mit Hilfe statistischer Überlegungen lässt sich zeigen, dass dieser Bestwert dem arith-

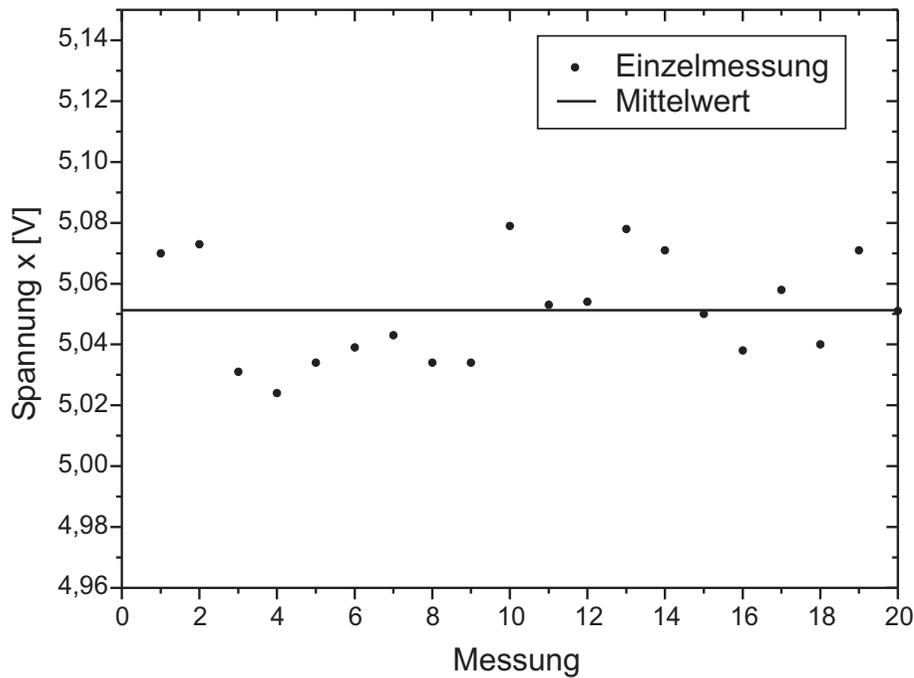


Abbildung 1: Darstellung von 20 unabhängigen Messungen einer elektrischen Spannung  $x$ . Die waagrechte Linie entspricht dem Mittelwert.

metischen Mittelwert entspricht:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \tag{5}$$

Dieser Wert ist in Abbildung 1 als waagrechte Linie eingezeichnet. Neben der besten Schätzung des „wahren Werts“ (Mittelwert) müssen wir zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung machen. Dazu wiederholen wir die Messung nicht nur 20-mal sondern viele Male mehr. In Abbildung 2 sind z.B. 3500 Einzelmessungen aufgetragen. Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass die Messwerte symmetrisch um einen mittleren Wert

streuen. Die meisten Messwerte liegen in der Nähe des Mittelwertes. Aber es gibt auch einzelne „Ausreißer“, die weiter weg vom Mittelwert liegen. Um dies zu quantifizieren empfiehlt sich eine andere grafische Darstellung der Messwerte in Form eines Histogramms. Dabei wird gezählt, wieviele Einzelmessungen innerhalb eines bestimmten Intervalls aufgetreten sind und die entsprechende Häufigkeit in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Solch ein Histogramm ist in Abbildung 3 dargestellt. Für sehr viele Messungen, streng genommen für unendlich viele, nähert sich das Histogramm einer bekannten Verteilung, die als Normal- bzw. Gaußverteilung bezeichnet wird und durch

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

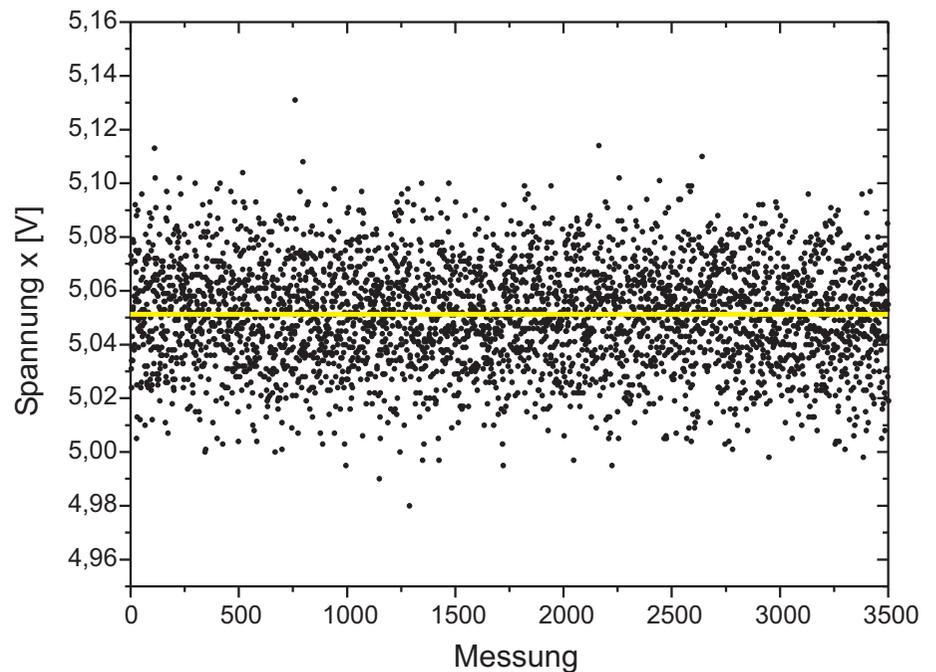


Abbildung 2: Darstellung von 3500 Messungen.

dargestellt wird. Die Gaußverteilung beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$\int_a^b P(x) dx \tag{7}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert  $x_i$  gemessen wird, der im Intervall  $a \leq x_i \leq b$  liegt. Durch den Vorfaktor  $1/\sqrt{2\pi} \sigma$  ist die Verteilung normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1. \tag{8}$$

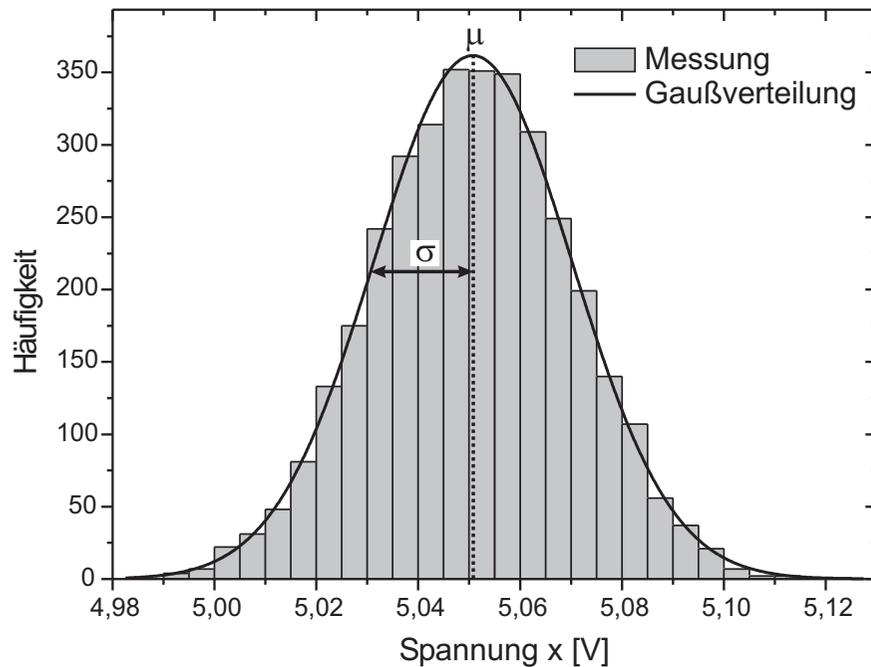


Abbildung 3: Histogramm von 3500 Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie zeigt die dazugehörige Gaußverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ . Die Gaußverteilung ist hier nicht auf Eins normiert, sondern auf die Fläche des Histogramms.

Dies ist sofort einsichtig, da mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit irgendein Wert gemessen wird.

Eine Gaußverteilung besitzt zwei Parameter. Die Lage des Maximums der Verteilung wird durch die Größe  $\mu$  bestimmt und entspricht dem wahrscheinlichsten Wert. Die Breite der Verteilung ist durch die Größe  $\sigma$  (Abbildung 3) gegeben. Falls die Messwerte tatsächlich gaußverteilt sind - und das ist sehr häufig der Fall - können wir annehmen, dass wir das Messergebnis einer großen Anzahl von Einzelmessungen, ebenfalls durch die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  beschreiben können.

Wie sich zeigen lässt, konvergiert der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  für eine große Anzahl von Einzelmessungen, gegen den wahrscheinlichsten Wert  $\mu$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu. \tag{9}$$

Der Mittelwert stellt somit, wie wir bereits zuvor erwähnt haben, die beste Schätzung des „wahren Werts“ dar.

Die Breite der Gaußverteilung wird durch  $\sigma$  bestimmt. Je größer  $\sigma$ , desto breiter ist die Verteilung und umso größer ist die Streuung der Messwerte um den wahrscheinlichsten Wert  $\mu$ . Wir können daher  $\sigma$  als ein Maß für die Messgenauigkeit interpretieren.

Für eine große Anzahl von Einzelmessungen lässt sich zeigen, dass die Reihe (Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert)

$$S'_E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \tag{10}$$

gegen  $\sigma$  konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_E = \sigma. \tag{11}$$

$S'_E$  wird als **Standardabweichung** einer Messreihe bezeichnet. Allerdings ist hier Vorsicht geboten.  $S'_E$  ist nur dann ein guter Schätzwert für die Streuung der Messwerte, wenn viele Einzelmessungen durchgeführt werden. Bei nur wenigen Messungen wird die Streuung um den Mittelwert überschätzt. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es besser ist als Maß für die Streuung die Größe

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \tag{12}$$

| Intervall          | $\pm\sigma$ | $\pm 2\sigma$ | $\pm 3\sigma$ |
|--------------------|-------------|---------------|---------------|
| Wahrscheinlichkeit | 68,3%       | 95,5%         | 99,7%         |

Tabelle 2: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von  $\sigma$ .*

zu verwenden.  $S_E$  wird auch als der **mittlere Fehler einer Einzelmessung** bezeichnet.

Wird eine Messung viele male wiederholt und als beste Schätzung des „wahren Wertes“ der Mittelwert  $\bar{x}$  angegeben, so ist dieser natürlich genauer als der Messwert einer Einzelmessung und zwar um den Faktor  $1/\sqrt{N}$ :

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (13)$$

$S_M$  wird auch als **mittlerer Fehler des Mittelwerts** oder einfach als **Standardfehler** bezeichnet.

Mit Hilfe von Gleichung (7) lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert  $x_i$  im Bereich von  $\pm\sigma$  um den wahrscheinlichsten Wert  $\mu$  schwankt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P(x) dx = 68,3 \%. \quad (14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung ein Wert im Bereich  $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$  auftritt beträgt 68,3 %. Analog lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für den  $2\sigma$  bzw.  $3\sigma$ -Bereich bestimmen.

Für das Endergebnis einer Messung gibt man in der Regel den  $1\sigma$ -Fehler  $S_E$  bzw.  $S_M$  an. Wird ein größerer Fehlerbereich angegeben (z.B.  $3\sigma$ -Fehler) ist dies gesondert zu vermerken.

Beispiel:

Für die in Tabelle 1 angegebenen Messdaten errechnen sich die Ergebnisse wie folgt:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{5,070 \text{ V} + \dots + 5,051 \text{ V}}{20} = 5,051 \text{ V}. \quad (15)$$

Fehler einer Einzelmessung:  $S_E = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0173 \text{ V}. \quad (16)$

Fehler des Mittelwerts:  $S_M = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0039 \text{ V}. \quad (17)$

Das Endergebnis wird in der Form

$$\bar{x} \pm S_M \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm \Delta x \quad (18)$$

angegeben. Anstatt  $S_M$  schreibt man auch häufig für den Fehler einfach  $\Delta x$ . In unserem Beispiel erhalten wir

$$x = (5,051 \pm 0,004) \text{ V}. \quad (19)$$

## IV.2 Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Praktikumsversuchen reicht es nicht aus nur eine physikalisch Größe zu messen und dessen Fehler abzuschätzen. In der Regel sollen aus dem Messergebnis weitere Größen und dessen Genauigkeiten bestimmt werden.

Beispiel:

Es soll die Verlustleistung  $P$  eines ohmschen Widerstands  $R$ , an dem die Spannung  $U$  anliegt, bestimmt werden. Dazu wird der Widerstand  $R$  und die Spannung  $U$  gemessen und gemäß

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (20)$$

die Verlustleistung berechnet. Da sowohl  $R$  als auch  $U$  nur mit einer bestimmten Genauigkeit bestimmt wurden, besitzt auch die daraus abgeleitete Größe  $P$  eine endliche Genauigkeit.

Die Bestimmung dieser Genauigkeit geschieht mit Hilfe der Differentialrechnung. Wenn die direkt gemessenen Größen  $x$  und  $y$  um kleine Beträge  $dx$  und  $dy$  geändert werden, verändert sich der Wert einer Funktion  $f = f(x, y)$  um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{vollständiges Differential}) \quad (21)$$

Hier bedeutet  $\partial f/\partial x$  die partielle Differentiation der Funktion  $f$  nach  $x$ , d.h. die Ableitung von  $f$  nach  $x$ , wobei die Variable  $y$  als Konstante behandelt wird.

Wenn wir in dieser Gleichung die Differentiale  $dx$  und  $dy$  durch die Fehler  $\Delta x$  und  $\Delta y$  der direkt gemessenen Größen ersetzen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich die Fehler im Mittel teilweise kompensieren werden, wenn sie voneinander unabhängig sind. Daher berechnet man den mittleren Fehler  $\Delta f$  durch „quadratische Addition“ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (22)$$

Hier und im Folgenden wird unter  $\Delta x$  bei zufälligen Fehlern, der mittlere Fehler  $S_M$  nach Gleichung (13), bei systematischen Fehlern die oben diskutierten Überlegungen verstanden.

Für das oben angeführte Beispiel (20) berechnet sich der Fehler wie folgt:

$$P = P(U, R) \quad (23)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (24)$$

$$= \sqrt{\left(2\frac{U}{R} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2} \Delta R\right)^2} \quad (25)$$

Die funktionale Abhängigkeit der zu ermittelnden Größe von den direkt gemessenen hat häufig eine einfache Form. Es lohnt sich, die folgenden Formeln zu merken, die aus der allgemeinen Gleichung (22) folgen:

$$f = ax \quad \Delta f = a\Delta x \quad (26)$$

$$f = x + y \quad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (27)$$

$$f = xy, \quad f = x/y \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (28)$$

$$f = x^{\pm b} \quad \frac{\Delta f}{f} = |b| \frac{\Delta x}{x}, \quad b = \text{const.} \quad (29)$$

Merken Sie sich:

| Farbe | Frequenz [THz] | $U_S$ [V] | $\Delta U_S$ [V] |
|-------|----------------|-----------|------------------|
| gelb  | 518,7          | -0,59     | 0,05             |
| grün  | 549,0          | -0,72     | 0,05             |
| blau  | 687,9          | -1,28     | 0,05             |
| UV    | 821,3          | -1,88     | 0,05             |

Tabelle 3: Messdaten aus dem Versuch Fotoeffekt.

1. „Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der absoluten Fehler der Summanden“.
2. „Der relative Fehler des Produkts oder des Quotienten zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der einzelnen relativen Fehler“.

Für eine Fehlerabschätzung kann man statt den Gleichungen (27) und (28) auch die einfacheren Formeln  $\Delta f = \Delta x + \Delta y$  bzw.  $\Delta f/f = \Delta x/x + \Delta y/y$  verwenden. Bevor man mit der Messung beginnt, sollte man sich mit Hilfe der Gleichungen (26) bis (29) überlegen, durch welche Fehler die Genauigkeit der Messung hauptsächlich begrenzt wird. Man kann dann versuchen, die empfindlich in das Resultat eingehenden Fehler klein zu halten.

## V Ausgleichsrechnung

Bei vielen Praktikumsversuchen kommt es häufig vor, dass die Steigung  $m$  einer linearen Funktion bestimmt werden muss. Hier im Praktikum können Sie dies auf zwei verschiedene Arten machen. Eine grafische Methode die hier erläutert werden soll und eine rechnerische Methode die im nächsten Abschnitt *Lineare Regression* diskutiert wird.

Wir wollen die Bestimmung einer Geradensteigung anhand eines Beispiels mit Daten des Versuchs 35, *Fotoeffekt* erläutern. Bei diesem Versuch wird mit Hilfe einer Fotozelle das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Dazu wird die Fotozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenz (Farbe) beleuchtet und gemessen, bei welcher Sperrspannung  $U_S$  der Fotostrom verschwindet. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt. Das

Planck'sche Wirkungsquantum lässt sich aus der Steigung  $\Delta U_S / \Delta f$  des Graphen gemäß

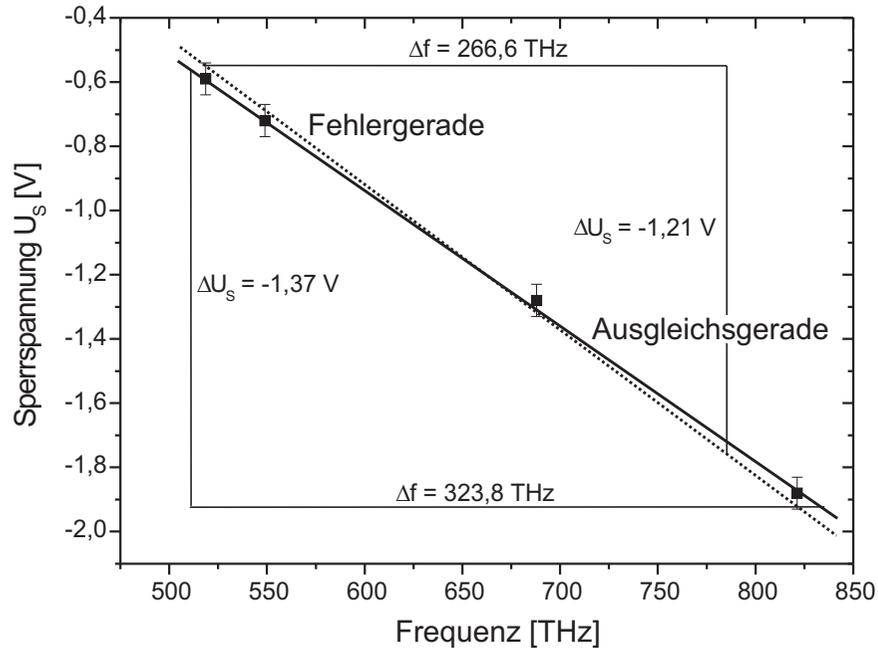


Abbildung 4: Bestimmung der Steigung und dessen Fehler mit Hilfe einer Ausgleichsgerade (durchgezogen) und Fehlergerade (punktiert).

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f}, \quad (30)$$

bestimmen, wobei  $e$  die Elementarladung darstellt. Um die Steigung zu berechnen legen wir zunächst durch alle Messpunkte unter Berücksichtigung der Messfehler eine Ausgleichsgerade. Dabei soll die Gerade so platziert werden, dass die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der Gerade im Mittel minimal wird. Für das Planck'sche Wirkungsquantum berechnen wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,37 \text{ V}}{323,8 \text{ THz}} = 6,78 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (31)$$

Um den Messfehler abzuschätzen, legen wir durch die Messwerte eine zweite Gerade (Fehlergerade). Diese sollte maximal steil (oder maximal flach) sein aber noch innerhalb der Fehler der einzelnen Messungen liegen. Hieraus erhalten wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,21 \text{ V}}{266,6 \text{ THz}} = 7,27 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (32)$$

Den Fehler schätzen wir aus der Differenz der beiden Steigungen ab. Somit lautet das Ergebnis dieser Messung:

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (33)$$

## VI Lineare Regression

Sofern bei einer Messung keine systematischen Fehler auftreten und die Messdaten normalverteilt sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, für  $x_i$  den Wert  $y_i$  zu messen:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}, \quad (34)$$

wobei  $\Delta y_i$  den Fehler von  $y_i$  bezeichnet. Die Gesamtwahrscheinlichkeit  $P$  alle  $N$  Messwerte zu messen, berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten  $P_i$ :

$$P = \prod_i P_i \quad (35)$$

$$= \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}. \quad (36)$$

Gesucht werden nun die Funktionsparameter von  $f(x)$ , für die die Wahrscheinlichkeit  $P$  maximal wird. Der erste Term in (36) stellt eine Konstante dar, die nicht von den Funktionsparametern abhängt. Somit wird die Wahrscheinlichkeit maximal, wenn die Summe in der Exponentialfunktion minimal wird. Diese Summe wird auch als  $\chi^2$ -Summe bezeichnet.

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2. \quad (37)$$

Wir wollen uns im Folgenden auf lineare Funktionen beschränken, d.h.

$$f(x) = mx + n. \tag{38}$$

Für die Berechnung der Parameter  $m$  und  $n$  folgt dann:

$$\chi^2(m, n) = \sum_i \left( \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i} \right)^2 = \text{Minimum} \tag{39}$$

Durch diese Methode wird eine Gerade mit den Parametern  $m$  und  $n$  bestimmt, für die die quadratischen Abstände der Messwerte  $y_i$  von der Geraden minimal wird. Durch den Faktor  $1/\Delta y_i^2$  werden zusätzlich Messwerte mit einem kleinen Fehler  $\Delta y_i$  stärker gewichtet als Messwerte mit einem großen Fehler (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl.: least square method).

Für die Berechnung von  $m$  und  $n$  müssen wir die Nullstellen der partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = -2 \sum_i x_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial n} = -2 \sum_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0. \tag{41}$$

Auflösen nach den Funktionsparametern liefert:

$$m = \frac{1}{\xi} \left( \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \tag{42}$$

$$n = \frac{1}{\xi} \left( \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right), \tag{43}$$

mit

$$\xi = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left( \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2. \tag{44}$$

Für den Fall, dass alle Fehler gleich groß sind, d.h.  $\Delta y_i \equiv \Delta y$ , vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - \bar{x}^2} \tag{45}$$

$$n = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \overline{xy}}{x^2 - \bar{x}^2}. \tag{46}$$

Da die Messwerte  $y_i$  fehlerbehaftet sind, besitzen auch die Funktionsparameter einen Fehler den wir mit  $\Delta m$  bzw. mit  $\Delta n$  bezeichnen. Die Fehler berechnen sich nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta m^2 = \sum_i \left( \frac{\partial m}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \tag{47}$$

$$\Delta n^2 = \sum_i \left( \frac{\partial n}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \tag{48}$$

Mit Hilfe von Gleichung (42) und (43) erhalten wir:

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \tag{49}$$

$$\Delta n^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}, \tag{50}$$

wobei  $\xi$  in Gleichung (44) definiert wurde. Sind wiederum alle  $\Delta y_i \equiv \Delta y$  gleich groß, so vereinfachen sich diese Berechnungen zu

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{1}{x^2 - \bar{x}^2}, \tag{51}$$

$$\Delta n^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{\overline{x^2}}{x^2 - \bar{x}^2}. \tag{52}$$

Die hier ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für lineare Funktionen, sondern lassen sich auch auf andere Funktionen übertragen.

Wir wollen wieder eine Beispielrechnung mit den Daten des Versuchs Fotoeffekt (Tabelle 3) durchführen. Hier entspricht  $x$  = Frequenz,  $U_S = y$  und  $\Delta U_S = \Delta y$ . Da die Fehler der einzelnen Messungen alle gleich groß sind, müssen wir nur die Mittelwerte in Gleichung (45) berechnen:

$$\bar{x} = 6,442 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (53)$$

$$\bar{y} = -1,118 \text{ V} \quad (54)$$

$$\overline{xy} = -7,815 \times 10^{14} \text{ VHz} \quad (55)$$

$$\overline{x^2} = 4,295 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (56)$$

$$\bar{x}^2 = 4,150 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (57)$$

Für die Steigung folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz}. \quad (58)$$

Das Plank'sche Wirkungsquantum erhalten wir durch Multiplikation mit der Elementarladung:

$$h = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz} = 6,79 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (59)$$

Den Fehler berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (51):

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}, \quad (60)$$

wobei nach Tabelle 3 für  $\Delta y = 0,05 \text{ V}$  und für  $N = 4$  zu wählen ist. Wir erhalten für den Fehler von  $h$ :

$$\Delta h = e \Delta m = 0,33 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (61)$$

Das Messergebnis lautet somit

$$h = (6,8 \pm 0,3) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (62)$$

## Hinweise zur Fehlerrechnung

### Wir wollen richtige Fehler! Ein Statistik - Feuilleton zur Lektüre am Feierabend

Dr. J. Stiewe - Kirchhoff-Institut für Physik, Universität  
Heidelberg

## I Eine etwas längliche, aber notwendige Einleitung

Fehlerrechnung hat nur einen begrenzten Sex - Appeal. Dies gilt nicht nur für die Physik, sondern auch für alle Adepten der sogenannten exakten Naturwissenschaften. Auf das "exakt" kommen wir noch zurück.

Aber das ist ungerecht. Wer einmal an einem wissenschaftlichen Projekt mitgearbeitet hat, der weiß, daß sich die Gelehrten meistens heftiger um die Größe ihres Meßfehlers streiten als um den Wert der weltbewegenden Zahl, die sie veröffentlichen wollen.

Warum ist das so? Zunächst: Wer eine bestimmte Größe messen will, etwa - um ein simples Beispiel zu wählen - die Entfernung zwischen zwei Orten, der wird den "wahren" Wert dieser Entfernung nie ergründen. Denn schon bei der zweiten Messung wird er feststellen, daß der Wert von der ersten Messung abweicht - vorausgesetzt, sein Meßgerät ist empfindlich genug. Wer Entfernungen schlicht in "Tagesreisen" mißt, hat diese Probleme natürlich nicht.

Die gleiche Erfahrung wird man machen, wenn ein zweiter Experimentator die Messung durchführt: Auch er wird eine - im günstigen Fall geringe - Abweichung von der Messung des Kollegen feststellen, und zwar auch dann, wenn er dessen Meßgerät benutzt. (Wir wollen für den Augenblick ausschließen, daß eines der Geräte schlicht fehlerhaft arbeitet.)

Was also kann man nach mehreren Messungen guten Gewissens behaupten? Man kann eine Vorschrift konstruieren, die auf die "beste Schätzung" des wahren Wertes führt. Wir ahnen, daß dies im einfachsten Fall der Mittelwert (das arithmetische Mittel der Einzelmessungen) sein wird. Wir werden sehen, daß man das begründen kann.

### I.1 Vertrauen hat Grenzen

Man kann aber auch von einem anderen Standpunkt an die Sache herangehen: Wir fragen nicht nach der besten Schätzung, also dem Wert, der dem unbekanntem "wahren" Wert unserer Meinung nach am nächsten kommt, sondern nach dem **Intervall**, in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, z.B. 95 % oder 99 %, liegt. Wir brauchen also zwei Zahlen  $a$  und  $b$ , so daß nach unseren Forschungen der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von (z.B.) 95 % zwischen diesen beiden Zahlen liegt:

$$a < \text{wahrer Wert} < b \quad (95 \% \text{ CL}).$$

Das "CL" steht für "Confidence Level" ("Vertrauensniveau") und gibt eben die Wahrscheinlichkeit an, mit der der wahre Wert in diesem Intervall zu finden wäre, wenn man ihn denn finden könnte. Natürlich möchte jeder Experimentator sein Ergebnis mit einem möglichst schmalen Vertrauensbereich publizieren.

Ein solcher Vertrauensbereich wird im Volksmund "Fehler" genannt. Das ist kein sehr glücklicher Terminus, da das Wort "Fehler" suggeriert, daß man etwas falsch gemacht hat. Aber der "Fehler" ist auch dann endlich, wenn man garantiert alles richtig macht. Man sagt deshalb auch oft "Unsicherheit" und vermeidet den "Fehler". (Übrigens: Diesen Fehler nennen die Angelsachsen "error" (oder "uncertainty"), aber nicht "mistake".)

Darüber, wie die Fehler einer Messung zu bestimmen sind, wurden viele Bücher und Artikel verfaßt. Wir werden am Schluß einige von ihnen nennen. Man braucht aber ein Minimum an Kenntnissen von der Kunst der "Statistik", also der Wissenschaft, die untersucht, an welche Regeln sich der Zufall hält. Dort geht es um Wahrscheinlichkeitsdichten, ihre Darstellung, und die Parameter, mit denen man sie beschreibt. Wir werden die wichtigsten kennen (und lieben!) lernen.

### I.2 Richtige Fehler sind wichtig, z.B. für den Nobelpreis!

Zum Schluß dieser Einleitung noch ein anschauliches Beispiel, das zeigen soll, wie wichtig die Bestimmung des "richtigen" Fehlers ist: Nehmen wir an, drei Wissenschaftler wollen unabhängig voneinander eine wichtige Naturkonstante messen, für deren Veröffentlichung es internationalen Ruhm zu gewinnen gibt. Der erste zieht seine Messung ordentlich und nach bestem Wissen und Gewissen durch und veröffentlicht sein Resultat. Der zweite macht es ebenso; natürlich hat er ein etwas anderes Resultat bekommen, aber sein "Vertrauensbereich" und

der des ersten überlappen sich. Der dritte hat ein Resultat, das von denen der beiden Kollegen abweicht. Er hat aber auch - Hochmut kommt vor dem Fall! - seinen Fehler gnadenlos unterschätzt und gibt ein so schmales Intervall an, daß es mit keinem der beiden anderen überlappt. Folge: Diese Messung nimmt niemand ernst. Wohl gemerkt: Nicht die wichtige Naturkonstante wurde "falsch" gemessen, sondern ihre Unsicherheit wurde falsch bestimmt! Denn durch die Angabe eines winzigen Fehlers behauptet man implizit, daß die Messungen anderer schlicht inkompatibel sind: Ein Fehlerbalken ist eben eine harte Aussage darüber, daß der Experimentator den "Wahren Wert" mit z.B. 68 % ("Gaußscher Fehler", darauf kommen wir noch) Wahrscheinlichkeit innerhalb seiner Fehlergrenzen wähnt.

Ach ja: Da waren noch die "exakten" Naturwissenschaften. Wie paßt das "exakt" zu den allgegenwärtigen, unvermeidlichen Fehlern? Es ist eben **kein** Widerspruch; denn gerade die korrekte (nicht immer einfache!) Bestimmung von Meßunsicherheiten, die nicht ohne Grund "Confidence Levels" heißen, gibt dem Wissenschaftler in Süd - Alaska die Möglichkeit, sein Ergebnis mit dem des Kollegen aus Ost - Japan zu vergleichen: Sind unsere Ergebnisse "innerhalb der Fehler" kompatibel? Warum hat der Kollege die geringere Unsicherheit? Was muß ich tun, um meinen Fehler zu verkleinern? Etc etc.. Kurzum: Die exakten Naturwissenschaften heißen exakt, weil sie genau angeben, wie ungenau sie sind.

## II Meßreihen und ihre Parameter

Die meisten von Ihnen werden die Begriffe "Mittelwert", "Varianz" und "Standardabweichung" schon einmal gehört haben, auch wenn Ihnen deren Definitionen gerade nicht gegenwärtig sind. Für die echten Fans: Es gibt noch weitere interessante Parameter wie "Schiefe" ("skewness") und "Wölbung" ("kurtosis"), auf die wir aber nicht eingehen werden. Alle diese Parameter dienen zur Charakterisierung der Verteilung von "Wahrscheinlichkeitsdichten". Dies sind eben jene statistischen Verteilungen, denen man entnehmen kann, wie wahrscheinlich es (z.B.) ist, älter als 101 Jahre zu werden oder mehr als eine Million Euro im Jahr zu verdienen. Die berühmteste Verteilung einer Wahrscheinlichkeitsdichte ("probability density") ist natürlich die Gaußverteilung, die auch "Normalverteilung" genannt wird.

Wir wollen uns diesen schrecklichen Dingen aber von einer ganz einfachen Seite nähern: Wir wollen die Zeit messen, die ein Läufer für eine bestimmte Strecke, z.B. 1000 m, braucht. Dazu brauchen wir (von den Startpistolen etc abgesehen)

natürlich (mindestens) eine Uhr. Wir wollen annehmen, daß dies eine "analoge" Uhr ist, also eine mit Zeigern, und daß die Ablesegenauigkeit begrenzt bis mäßig ist. Und da wir hier ein "Gedankenexperiment" (englisch: "gedanken experiment") durchführen, soll es möglich sein, den Läufer immer wieder in genau der gleichen "wahren" Zeit die Strecke durchlaufen zu lassen.

### II.1 Was ist der wahre Wert?

Wenn wir das tun, werden wir, wie schon oben angedeutet, feststellen, daß die Meßwerte, die wir nacheinander registrieren, immer ein wenig voneinander abweichen. Wir fragen uns also, was wir tun können, um dem "wahren" Wert der zu messenden Zeit möglichst nahe zu kommen. Dazu betrachten wir das Protokoll unserer Messungen, denn wir haben natürlich jede Einzelzeit notiert. Aber bevor wir weitermachen, erlauben wir uns wieder einen kleinen intellektuellen Schlenker: Anstatt daß wir den armen Läufer "immer wieder" starten lassen, lassen wir ihn nur einmal laufen; dafür lassen wir die Zeit jetzt von 20 Leuten gleichzeitig bestimmen: Jeder von diesen hat eine Stoppuhr in der Hand, die den anderen nach Bauweise und Ablesegenauigkeit gleicht. Auch soll keine defekt sein oder vor- oder nachgehen.

Der Läufer läuft also, und die 20 Linienrichter geben ihre gemessenen Zeiten zu Protokoll. Um eine bessere Übersicht zu haben, trägt der Ober - Linienrichter sie in ein simples Diagramm ein, er markiert nämlich auf einer geraden Linie, die die "Zeitachse" darstellt, jede gemessene Einzelzeit mit einem kurzen senkrechten Strich an der jeweiligen Position.

Wir übersehen jetzt mit einem Blick, wie sich die Meßwerte verteilen: Irgendwo "häufelt" es, und an den Rändern wird es dünn. Natürlich haben wir den Verdacht, daß die Meßwerte da, wo sie dichter liegen, in der Nähe des wahren Wertes liegen, während die "dünnen" Werte weiter von diesem entfernt sind. Und jetzt gehen wir ganz tapfer los und behaupten: "Die beste Schätzung für den (unbekannten!) wahren Wert ist das arithmetische Mittel aller Einzelmessungen". Das leuchtet unmittelbar ein, und wir werden gleich sehen, daß der Mittelwert tatsächlich vor allen anderen Werten ausgezeichnet ist. Wenn wir unsere Einzelmessungen mit  $t_i$  bezeichnen, wobei der Index  $i$  von 1 bis 20 läuft, dann erhalten wir den Mittelwert, indem wir alle 20 Messungen aufsummieren und die Summe durch 20 dividieren:

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20}.$$

Für die, denen diese Formel seltsam vorkommt: Das große griechische Sigma mit den beiden Indizes 1 und 20 ist nichts als eine Abkürzung für die Vorschrift, die zwanzig einzelnen Messungen  $t_i$  aufzusummieren. Wenn man nicht von vornherein weiß, um wie viele Messungen es geht, nennt man deren Anzahl ganz allgemein  $N$  und summiert entsprechend:

$$\text{Summe} = \sum_{i=1}^N s_i,$$

wobei die  $s_i$  die  $N$  Summanden sind.

Natürlich kann man die Summe, je nach Problemstellung, auch bei Null oder -3 anfangen und bei  $N - 2$  oder  $N + 5$  etc enden lassen.

Aber zurück zu unserem 1000 m - Läufer. Wir haben aus den 20 Einzelmessungen den Mittelwert ("mean value")  $\langle t \rangle$  herausgekocht, den wir für die beste Schätzung des wahren Wertes halten. Bevor wir aber den Charme des Mittelwertes (MW) ganz erkennen, wollen wir unser Gedankenexperiment erweitern: Wir wiederholen die Zeitmessung, allerdings mit neuen Stoppuhren, die deutlich weniger genau sind als die vorigen. Wenn wir dann wieder die Einzelmessungen auf unserer Geraden einzeichnen, dann werden wir sehen, daß die Werte jetzt wesentlich weiter auseinanderliegen als bei der ersten Messung. Wie können wir diese beiden unterschiedlichen Meßreihen quantifizieren?

## II.2 Varianz und Standardabweichung

Wir brauchen offenbar ein Maß für die Streuung, und das erhalten wir folgendermaßen: Wir rechnen uns zunächst den MW aus und nennen ihn  $\langle t \rangle$ . Wie man das macht, wissen wir bereits. Dann bilden wir für jede Einzelmessung die Differenz zum MW und **quadrieren** diese:  $(\langle t \rangle - t_i)^2$ . Diese quadrierten Differenzen addieren wir alle und dividieren dann durch  $(20 - 1) = 19$ . Das Ergebnis nennen wir "Varianz" und kürzen es mit  $\sigma^2$  ("sigma - Quadrat") ab:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (\langle t \rangle - t_i)^2}{19},$$

oder allgemein, bei  $N$  Messungen:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\langle t \rangle - t_i)^2}{N - 1}.$$

Durch die Konstruktion der Varianz als Summe aus (quadrierten) Differenzen zwischen Mittelwert und Einzelmessungen wird unmittelbar klar, daß sie für "schmale" Verteilungen klein und für "breite" Verteilungen groß wird. - Die Varianz wird auch "mittlere quadratische Abweichung" (engl. mean square deviation) genannt.

Natürlich fragt sich hier der scharfsinnige Leser / die scharfsinnige Leserin sofort, warum man bei der Berechnung der Varianz durch " $N - 1$ " und nicht durch  $N$  dividiert, wie bei der MW - Bildung. Ein Grund dafür liegt darin, daß man eben den wahren Wert nicht kennt und ihn durch dem MW ersetzen muß, den man aber auch aus den 20 bzw.  $N$  Einzelmessungen ableiten muss. Dies bedeutet eine Informationseinbuße, die man mit einer größeren Varianz "bezahlen" muß. Oft wird auch gefragt, warum man denn die Abweichungen vom MW quadrieren muß - tut es nicht auch der Absolutwert der Differenz? Er tut es nicht; erstens aus formalen Gründen: Die Varianz ist das "zweite Moment" der Verteilung, und die ist "quadratisch" definiert (s. auch Abschnitt 3.2), und zweitens auch anschaulich: Nur eine parabolische Abhängigkeit führt auf ein eindeutiges Minimum. Darauf kommen wir gleich zurück. Der Mittelwert ist das "erste Moment".

Mit der Varianz (englisch: variance) haben wir jetzt ein Maß für die "Breite" einer Verteilung gewonnen. Wenn zwei Meßreihen derselben Größe zwei verschiedene Varianzen zeitigen, so werden wir die mit der kleineren Varianz als die genauere Messung bezeichnen.

Wenn man aus der Varianz  $\sigma^2$  die Quadratwurzel zieht, so erhält man "die Standardabweichung"  $\sigma$ . (Englisch: standard deviation.) Da die Quadratwurzel eine monotone Funktion ist, ist auch  $\sigma$  ein Maß für die Breite einer Verteilung. Man nennt die Standardabweichung deshalb auch den "Fehler der Einzelmessung". Wir schreiben diese Größe noch einmal hin und **merken uns ihre Definition fürs Leben**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle t \rangle - t_i)^2}{N - 1}}.$$

Daß  $\sigma$  auch "Fehler der Einzelmessung" genannt wird, liegt daran, daß man bei Kenntnis des Mittelwertes und der Standardabweichung im allgemeinen (und im besonderen bei der Gaußverteilung) die Wahrscheinlichkeit angeben kann, daß ein Meßwert in einem Intervall (MW -  $\sigma$ , MW +  $\sigma$ ) um den Mittelwert liegt. Gerade die Größe dieses Intervalls kennzeichnet ja die "Genauigkeit" einer Messung. - Die Standardabweichung wird in der angelsächsischen Literatur oft

als “r.m.s.” (“root mean square”) bezeichnet.

### II.3 Der diskrete Charme des Mittelwerts

Wir wollen aber noch einmal auf die besondere Eigenschaft des Mittelwertes zurückkommen. Dazu denken wir z. B. an die verschiedenen Meßwerte, die wir gewonnen haben, als wir die Zeit des 1000 m - Läufers gestoppt haben. Wir schreiben uns jetzt die Varianz dieser Verteilung auf (wobei wir uns nicht mehr auf 20 Messungen festlegen), ersetzen aber den MW durch eine zunächst unbekannte Größe  $x$ :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x - t_i)^2}{N - 1}.$$

Wir haben jetzt keine wohldefinierte Zahl mehr vor uns, sondern, da  $x$  eine zunächst beliebige Zahl ist, eine **Funktion** von  $x$ ; deshalb schreiben wir korrekt:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N (x - t_i)^2}{N - 1}.$$

Jetzt wollen wir wissen, für welchen Wert von  $x$  die Funktion  $f(x)$  ein Minimum annimmt. Wie macht man das? Schulwissen / Hausaufgabe! Man muß die Funktion  $y = f(x)$  nach  $x$  differenzieren (= ableiten) und das Ergebnis = 0 setzen. (Die  $t_i$  und  $N$  sind jetzt bekannte und konstante Zahlen.) Dann erhalten wir eine Gleichung, die wir nach  $x$  auflösen können. Wir tun das und bekommen für den Wert, der die Funktion minimalisiert,

$$x_{min} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N} = \langle t \rangle.$$

Dies ist aber - oh Wunder! - nichts anderes als der Mittelwert. Wir haben also gelernt: Der Mittelwert einer Verteilung macht ihre Varianz zum Minimum. Diese Eigenschaft zeichnet den MW vor allen anderen Werten (auf unserer Meßgeraden) aus.

Wir haben jetzt den Mittelwert und die Varianz bzw. Standardabweichung einer Verteilung kennengelernt. Wir erinnern uns aber daran, daß unsere Verteilung (nämlich die der Einzelzeiten des Läufers) aus einzelnen “diskreten” Meßpunkten bestand. Wir konnten uns bei der MW - Bildung also der einfachen Summation bedienen.

De facto ist aber die Verteilung der Zeiten kontinuierlich, denn der Läufer muß keine “Quantisierungsvorschrift” seiner Laufzeiten beachten. Im Falle einer kontinuierlichen Verteilung muß die Summation durch ein Integral ersetzt werden. Wir kommen darauf zurück.

Wir wollen zum Schluß dieses Abschnitts noch einmal auf die “beste Schätzung” (“best estimate”) des wahren Wertes und ihre Unsicherheit zurückkommen. Denn natürlich hat auch der Mittelwert selbst einen “Fehler” oder besser eine Unsicherheit. Die Theorie sagt nun (vgl. z.B. [1, 2]), daß dieser Fehler durch

$$\sigma(MW) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

gegeben ist. Dabei bedeutet  $\sigma(MW)$ , wie gesagt, den statistischen Fehler des Mittelwertes, während das  $\sigma$  auf der rechten Seite die Standardabweichung der Verteilung der Meßwerte ist.

Diese Beziehung ist wichtig und weitreichend. Sie besagt einerseits, daß man die (statistische) Unsicherheit einer Größe unter jeden vorgegebenen Wert drücken kann, wenn man nur oft genug mißt. Andererseits wird der Preis (und dies, bei teuren Experimenten, im Wortsinn) immer höher, denn um den Fehler um den Faktor 10 zu reduzieren, muß man 100 mal so oft messen. Dies führt bei jedem praktischen Experiment zu Begrenzungen.

### II.4 Systematische Fehler

Außerdem ist da noch eine andere Schwierigkeit im Spiel: Wir hatten in unserem Gedankenexperiment angenommen, daß alle Stoppuhren von gleicher Qualität sind und daß keine vor- oder nachgeht. Dies ist natürlich eine Idealisierung, im wirklichen Leben wird jedes Meßgerät einen, vielleicht nur winzigen, Fehler aufweisen. Die Verfälschung eines Meßergebnisses durch fehlerhafte Geräte kann man natürlich **nicht** durch noch so viele Messungen kompensieren. Man muß also auch seinen **systematischen** Fehler zu bestimmen wissen, bevor man sich Gedanken über den Umfang einer Meßreihe macht: Sobald der systematische Fehler in die Größenordnung des statistischen rückt, lohnt es sich nicht mehr, die Anzahl der Messungen in die Höhe zu treiben.

### III Von Meßreihen zu Histogrammen und Wahrscheinlichkeitsdichten: Die Gaußverteilung

Wir wollen uns jetzt um die Darstellung und Beschreibung von Verteilungen gemessener Größen kümmern. Unser Ziel ist, zum Begriff der “Wahrscheinlichkeitsdichte” und schließlich zur Gaußverteilung, die die wichtigste kontinuierliche Verteilung ist, zu kommen. Wir werden auch noch echte “diskrete” Verteilungen kennenlernen, nämlich die wichtige Binomial- und die ebenso wichtige Poisson - Verteilung.

Wir kehren zu unserer Zeitmessung zurück. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Zahl der Zeitmessungen sehr groß wird, z.B. in die Tausende geht. Etwas unrealistisch, aber schließlich ist es ein Gedankenexperiment. Bei einer sehr großen Zahl von Messungen ist es unökonomisch, jede einzelne mit einem kleinen senkrechten Strich auf unserer Geraden zu markieren. Wir werden stattdessen den Meßbereich - etwa von 172 Sekunden bis 188 Sekunden - in Intervalle einteilen, deren Anzahl und damit Dichte von der Zahl der Messungen abhängt. Ein solches Intervall wird auch “Bin” (von englisch bin = Kasten, Behälter) genannt. Der nächste Schritt führt uns zum “Histogramm”: Wir zählen die Meßwerte in jedem Intervall und tragen die Summe als Ordinate nach oben auf. Damit haben wir wieder einen anschaulichen Eindruck von unserer Verteilung (Abb. 1):

Dieses Histogramm stellt den Fall dar, daß der Läufer “im Mittel” der Messungen 180 s für die 1000 m braucht, und daß die Standardabweichung 2 s beträgt. An den Rändern links und rechts gibt es nur wenige Einträge (“entries”), während wir etwa in der Mitte der Verteilung ein Maximum (“peak”) sehen. Außerdem ist die Verteilung so gut wie symmetrisch. An der Ordinate können wir ablesen, wie viele Einträge etwa jedes Bin zählt. Allerdings haben wir gegenüber unserer Geraden mit den Strichelchen einiges an Information verloren: Wir wissen nur noch, wie viele Meßpunkte z.B. zwischen den Marken “174 s” und “176 s” liegen; wie sie sich aber innerhalb des Intervalls verteilen, wissen wir nicht mehr - wir haben “darüber hinwegintegriert”.

#### III.1 Vom Histogramm zur Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine solche Darstellung nennt man ein “Histogramm” (englisch: histogram). In diesem Wort stecken die griechischen Wurzeln “histos” = Gewebe und “gram-

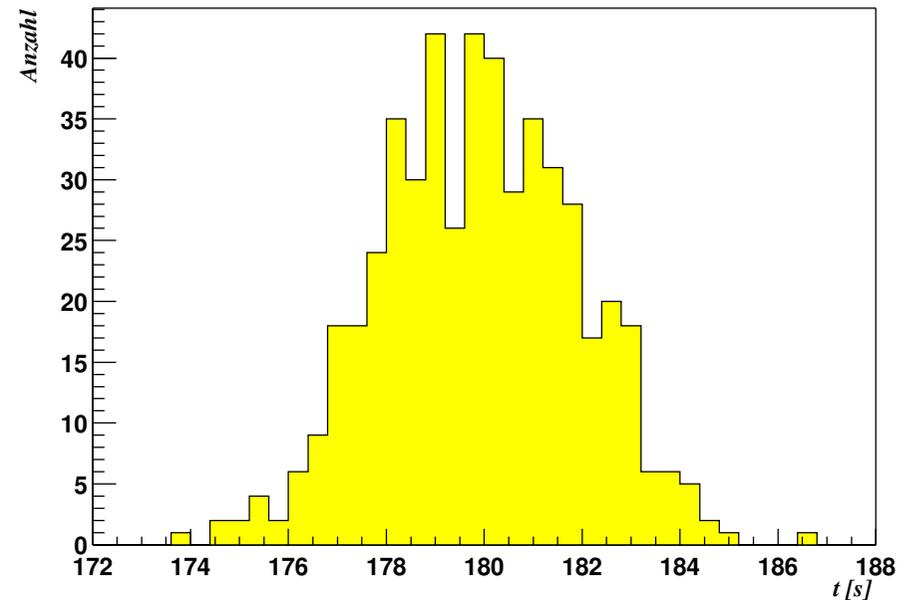


Abbildung 1: “Histogramm” der gemessenen Zeiten des Läufers mit 500 Einträgen

ma” = Buchstabe, Schrift. Wir wollen nun unser Histogramm etwas aufbohren und neu interpretieren:

Wir lassen jetzt die Zeit unseres bedauernswerten 1000 m - Läufers von mehr und mehr und mehr Leuten messen. Wenn wir die Anzahl der stoppuhrbewerten Meßdiener “gegen unendlich” gehen lassen, können wir die Intervallbreite (“bin size”) immer kleiner und kleiner wählen - wir haben ja genug “Statistik”. Damit wird das Histogramm auch immer glatter, denn der Polygonzug, den die Ecken der Intervall - Inhalte bilden, geht in allmählich in eine glatte Kurve über. Wir sind eigentlich zufrieden. Aber da kommt ein Kollege und sagt: “Unendlich reicht mir nicht, ich möchte zwei mal unendlich.”

Um ihm diesen Gefallen zu tun, müßten wir die Zahlen auf der Ordinate auch mit zwei multiplizieren. Aber wir ahnen, daß wir keine Information gewinnen

würden, unser Histogramm sähe noch genau so aus. Das bringt uns auf den Gedanken, die Verteilung zu “normieren” (“to normalize”). Was bedeutet das? Wir merken uns die Zahl **aller** Einträge des Histogramms und dividieren dann den Inhalt eines jeden Bins durch diese Zahl. Ergebnis: Wenn wir jetzt die Summe aller Bin - Inhalte (“bin contents”) bilden, erhalten wir immer Eins - das Histogramm ist “auf Eins normiert”.

Und jetzt, in diesem Grenzfall unendlich vieler Einträge, können wir das Histogramm neu interpretieren: Es stellt sicherlich ein gutes “Persönlichkeitsprofil” unseres Läufers dar, und wir deuten es jetzt als “Wahrscheinlichkeitsdichte”. Was heißt das? Die gute alte Massendichte bezeichnete “Masse pro Volumen”. Die Wahrscheinlichkeitsdichte in diesem Fall bedeutet “Wahrscheinlichkeit pro Zeit”. Anschaulich: Wir schraffieren die Fläche zwischen (z.B.) 176 s und 184 s; da wir die Gesamtfläche auf Eins normiert haben, gibt uns die schraffierte Fläche die Wahrscheinlichkeit, mit der der Läufer ein Ergebnis zwischen 176 s und 184 s erzielt. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß er nie weniger als 172 s und nie mehr als 188 s braucht. Mathematisch haben wir die Verteilung zwischen den beiden Intervallen “integriert”. Trivialerweise (da nach Konstruktion) ist das Integral über die gesamte Verteilung gleich Eins. Das bedeutet, der Läufer wird - wegen unserer einschränkenden Voraussetzung - **auf jeden Fall** (also mit der Wahrscheinlichkeit Eins) ein Ergebnis zwischen 172 s und 188 s erzielen. Noch einmal: Die Verteilung selbst gibt uns die Wahrscheinlichkeitsdichte. Eine Wahrscheinlichkeit erhält man erst durch Integration über ein vorgegebenes Intervall. Hieraus folgt auch, daß die Wahrscheinlichkeit, **genau** einen bestimmten Wert zu messen, gleich Null ist. Warum ist das so? Denken Sie über diese Merkwürdigkeit nach.

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeitsdichte verstanden. In unserem Beispiel hatten wir die Ergebnisse des Läufers auf das Intervall von 172 s bis 188 s eingeschränkt. Eine solche Einschränkung gilt natürlich im allgemeinen nicht, vielmehr sind im allgemeinsten Fall die Grenzen “minus unendlich” und “plus unendlich” zu wählen.

Wenn wir uns die Verteilungsdichte unseres Läufers genauer ansehen, dann hat sie die Form einer Glocke. Dies ist die Form der Gauß- oder Normalverteilung; in der Tat läßt sich eine Theorie der Meßfehler (“Laplacesches Fehlermodell”) aufstellen, die just auf die Gaußverteilung führt. Wir wollen das als gegeben hinnehmen (siehe z.B. [1]) und uns die Gaußverteilung etwas näher ansehen.

### III.2 Annäherung an Herrn Gauß

Die Verteilung ist offensichtlich positiv und symmetrisch. Wenn sie um den Punkt  $x_0$  (wir wählen jetzt allgemeine Variablen für die zu messenden Größen, es könnte ja auch eine Temperatur sein) symmetrisch ist, so empfiehlt sich eine Form (das Zeichen  $\propto$  bedeutet “proportional zu”)

$$\propto \exp(-(x - x_0)^2).$$

(Mit “ $\exp(x)$ ” meinen wir natürlich die Exponentialfunktion “ $e$  hoch  $x$ ”:  $\exp(x) = e^x$ . Wir wollen sie hier nicht im Detail diskutieren. Wer ihre Eigenschaften vergessen hat, grabe bitte in seinen Mathematikbüchern nach.) Damit haben wir die Glockenform. Um die Glocke “breit” oder “schmal” zu machen, führen wir im Exponenten den Faktor  $1/(2\sigma^2)$  ein. Wird  $\sigma$  groß, so ist die Glocke breit, und umgekehrt. Jetzt müssen wir noch für die Normierung sorgen, denn das Integral über die gesamte Verteilung - von “minus unendlich” bis “plus unendlich” soll ja Eins sein. Dies besorgt der Faktor  $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ . Alles in der Literatur nachzulesen [1, 2, 3, 4]. Insgesamt sieht also eine Gaußverteilung (wohlgemerkt, wieder eine Wahrscheinlichkeitsdichte!) so aus:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Diese etwas kompliziert aussehende Funktion malen wir uns noch einmal in aller Schönheit auf (Abb. 2):

Wir haben für dieses Bild mit Absicht eine standardisierte Gaußverteilung gewählt, nämlich eine mit dem MW Null und der Breite  $\sigma = 1$ . Die Verteilung in der Abbildung ist übrigens - zur besseren Darstellung - **nicht** korrekt auf Eins normiert. Aus dieser Verteilung kann man leicht jede andere herstellen, indem man den MW verschiebt und die Breite durch Multiplikation mit dem gewünschten Faktor verkürzt oder streckt.

Und jetzt wollen wir uns ihre Eigenschaften ansehen. Zunächst: Die Kurve kommt von  $-\infty$  und geht nach  $+\infty$ . Ihr Integral ist Eins (dafür sorgt der Normierungsfaktor):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1.$$

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit wissen wollen, ein Ergebnis im Intervall mit den Grenzen  $a$  und  $b$  zu erzielen, dann ist diese gegeben durch

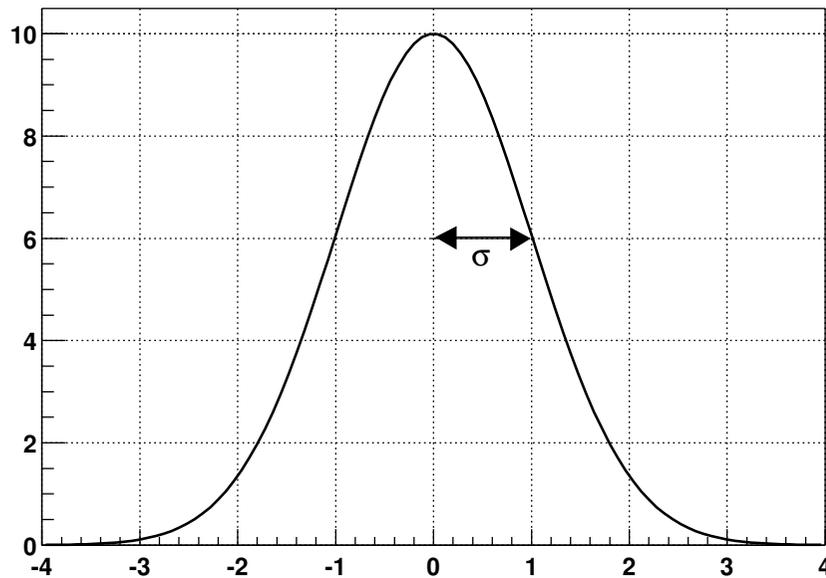


Abbildung 2: Gaußverteilung mit dem Mittelwert Null und der Breite ( $\sigma$ ) Eins

$$G(a, b) = \int_a^b g(x) dx.$$

Die Gaußverteilung hängt von genau zwei Parametern ab, nämlich dem Mittelwert  $x_0$  und der Breite  $\sigma$ . Tatsächlich gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = x_0.$$

Auf der linken Seite steht die Definition des Mittelwertes (“erstes Moment”) bei einer kontinuierlichen Verteilung; sie entspricht der Summation bei diskreten Meßwerten. Außerdem gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \sigma^2.$$

Das ist das Analogon zur Bestimmung der Varianz (“zweites Moment”) bei diskreten Meßwerten. Übrigens: Man findet die Position “ $\pm 1 \sigma$ ” an den Stellen, an denen die Gaußkurve auf den Wert “Maximum/ $\sqrt{e}$ ” abgesunken ist. Dies sind zugleich die Positionen der Wendepunkte  $\rightarrow$  nachrechnen!

Wir halten fest: Eine Gaußverteilung wird durch ihren Mittelwert (hier  $x_0$ ) und ihre Breite (“Gaussian width”)  $\sigma$  beschrieben.  $\sigma$  ist die Standardabweichung der Verteilung. (Übrigens: Sprechen Sie im Englischen “Gaussian” niemals “Gooschn” aus, das ist igitt! Der gebildete Angelsachse tut das nicht.)

Jetzt haben wir fast alles Wichtige über die Gaußverteilung beisammen. Und deshalb wollen wir noch einmal zum Anfang unserer Überlegungen, nämlich zu den “Vertrauensintervallen” zurückkommen. Wie sieht es beim Gauß aus?

### III.3 Vertrauen bei Herrn Gauß

Die Mathematik sagt uns, wie groß das Integral über die Gaußverteilung “von  $-\sigma$  bis  $+\sigma$ ” ist, nämlich 0.683. Das bedeutet anschaulich: Wenn man eine Größe mißt, die “gaußverteilt” ist (und diese Annahme macht man meistens, wenn auch oft nur als Näherung), dann ist die Wahrscheinlichkeit 68.3 %, daß das Ergebnis in eben jenes Intervall fällt. Man nennt dies die “ $1 \sigma$  - Umgebung”. Wer eine gemessene Größe mit einem Fehler veröffentlicht, der meint mit der Größe seines Fehler immer implizit dieses “Gaußsche  $\sigma$ ”. Das heißt, die Angabe eines Fehlers ist auch immer eine klare quantitative Botschaft: Ich behaupte, daß der “wahre Wert” der Größe, die ich messen will, mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.3 % in dem angegebenen Intervall liegt.

Natürlich gibt es auch die “ $2 \sigma$ ”- und “ $3 \sigma$ ”- Intervalle. Wieder sagt uns die Mathematik, daß die entsprechenden Integrale über die Gaußverteilung 0.955 und 0.997 sind. Mit anderen Worten: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95.5 % fällt eine Messung in das  $2 \sigma$ -, und mit 99.7 % in das  $3 \sigma$ - Intervall. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Messung außerhalb dieses Intervalls landet, ist also nur 0.3 %. Wenn etwa zwei Messungen derselben Größe - bei Berücksichtigung der jeweiligen Fehler - um (mindestens) “ $3 \sigma$ ” differieren, dann nennt man sie “signifikant verschieden”, und man hält eine von beiden für falsch. Hier lauert die Tücke: Wenn man zwar seine Messung ordentlich durchgeführt, seine Fehler aber versehentlich oder aus Dummheit zu klein bestimmt hat, dann schließt man sich

selbst aus der Reihe der seriösen Wissenschaftler aus.

Wenn man die Gaußsche Glockenkurve zeichnet, dann kann man die “ $1\sigma$ - Umgebung” leicht ablesen, denn  $1\sigma$  ist gerade der Abstand vom Mittelwert (dem Maximum) zu den Wendepunkten. Manchmal möchte man auch wissen, wie breit die Verteilung, mit der man es zu tun hat, “auf halber Höhe” ist. Diese “volle Breite auf halber Höhe” (“full width at half maximum”, FWHM) beträgt, wie man leicht nachrechnet, etwa  $2.3\sigma$ .

Damit haben wir die Gaußverteilung im Wesentlichen verstanden. Wir fassen zusammen: Man unterstellt Messungen einer kontinuierlichen Größe, die - im weitesten Sinne - mit einem “Maßstab” durchgeführt werden, daß sie “gaußisch” sind, d.h. daß die Meßwerte, wenn man sie histogrammiert (s. o.), sich durch die berühmte Glockenkurve interpolieren lassen. Das ist in Wirklichkeit so gut wie nie der Fall; aber man rechnet dennoch sehr oft “gaußisch” weiter, z.B. wenn es um Hypothesen - Tests mit Hilfe der  $\chi^2$  - Methode (“chi - Quadrat”) geht, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Auch die Abschätzungen der “Vertauensintervalle” mit den oben genannten Zahlen gelten nur für “echte” Gaußverteilungen. Man muß deshalb im täglichen Leben die “Gaußizität” seiner Meßergebnisse kritisch überprüfen.

Dazu gibt es einen einfachen Trick: Wenn man eine Gaußfunktion logarithmiert (z.B. mit Hilfe des beliebten Logarithmenpapiers), erhält man eine nach unten offene Parabel (eben gerade den Exponenten). Das menschliche Auge erkennt aber Abweichungen von der Parabelform und damit von der “Gaußizität” sofort! Und nun wenden wir uns neuen Ufern zu.

## IV Wir sind ganz diskret: Binomial- und Poisson - Verteilung

Wir haben es im vorigen Abschnitt mit Messungen “kontinuierlicher” Größen wie Zeiten zu tun gehabt. Ähnliches gilt für Längen, Temperaturen, Stromstärken, etc.

Es gibt aber eine ganz andere Art von Messungen, bei denen “etwas gezählt” wird. Klassische Beispiele sind die Zahl der Zerfallsakte eines radioaktiven Präparates pro Zeiteinheit oder die Zahl von Bakterien in einer Nährlösung. Hier wird gezählt: “Eins, zwei, drei..”, und die natürlichen Zahlen sind eine diskontinuierliche, “diskrete” Variable.

### IV.1 Alea iacta sit!

Ein einfaches Beispiel, das uns auch die Möglichkeit gibt, den Begriff der Wahrscheinlichkeit etwas zu beleuchten, ist ein symmetrischer Würfel mit den “Augen” 1 bis 6. Wegen der Symmetrie sind alle Augenzahlen gleichberechtigt. Da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten Eins sein muß, ist die Wahrscheinlichkeit, eine der Zahlen 1 bis 6 zu würfeln, gerade  $1/6$ .

Das wundert uns auch nicht. Wir wollen aber dieses einfache Beispiel benutzen, um zwischen “und” und “oder” bei Wahrscheinlichkeiten zu unterscheiden: Die Wahrscheinlichkeit (“probability”), z.B. eine 2 **oder** eine 5 zu würfeln, ist  $1/6 + 1/6 = 1/3$ . Wenn ich aber mit zwei Würfeln spiele, dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine 2 **und** eine 5 zu würfeln, gleich  $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ . Es gibt nämlich  $6 \cdot 6 = 36$  Möglichkeiten von Zahlenpaaren. Diese Multiplikationsregel gilt aber nur dann, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind. Dies können wir aber bei den Würfeln voraussetzen, solange sie nicht miteinander verklebt sind.

Es lohnt sich übrigens, einmal den MW dieser “flachen” (alle Zahlen sind gleich wahrscheinlich) Verteilung auszurechnen: Es ist  $1/6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6$ ; der Mittelwert der “Augenzahlen” eines Würfels ist also eine gebrochene Zahl, die selbst nicht das Ergebnis eines Wurfes sein kann.

Wir wollen uns in diesem Abschnitt der äußerst wichtigen Poisson - Verteilung nähern. Ihre Kenntnis ist von herausragender Bedeutung. Und da trotzdem kaum jemand über sie bescheidweiß, bedeutet es so etwas wie “Herrschaftswissen”, wenn man sich mit ihr auskennt.

### IV.2 Tossing a Coin: Head or Tail?

Die Poissonverteilung läßt sich aus der “Binomialverteilung” herleiten - wie übrigens auch die Gaußverteilung. Die Binomialverteilung ist also sozusagen die “Mutter aller Verteilungen”. Mit ihr kann man die Ergebnisse eines “Bernoulli - Experimentes” beschreiben, das ist eines mit genau zwei möglichen Ergebnissen. Ein einfaches Bernoulli - Experiment ist der Wurf einer Münze. Mit Hilfe der Binomialverteilung (BiV) kann ich dann z.B. die Frage beantworten: “Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einmal “Zahl” und 9 mal “Adler” zu bekommen, wenn ich eine (symmetrische) Münze 10 mal werfe?” Man kann sich das Ergebnis eigentlich “zu Fuß” ausrechnen, wenn man alle Möglichkeiten abzählt. Wir wollen das hier tun, bevor wir uns die BiV im Detail ansehen. Also:

Wir wollen das Erscheinen von “Zahl” nach dem Wurf den “Erfolg” nennen. Dann bedeutet “Adler” Mißerfolg. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg nennen wir  $p$ , die für Mißerfolg  $q$ . Da ich nur entweder Erfolg oder Mißerfolg haben kann, gilt  $p+q=1$ . Andererseits ist die Münze symmetrisch, daher  $p=q=1/2$ . Die Anzahl der “Erfolge” sei  $r$ , also hier  $r=1$ . Die Anzahl der Würfe ist  $n=10$ . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 voneinander unabhängigen Würfeln einmal “Erfolg” zu haben,  $p^r=0.5^1$ . Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, 9 mal “Mißerfolg” zu haben, gleich  $q^9=(1-p)^9=0.5^9$ . Damit sind wir schon fast fertig, wir müssen aber noch bedenken, daß wir das Ergebnis auf 10 verschiedene Art und Weisen erreichen können, nämlich (A für Adler, Z für Zahl): ZAAAAAAAAA, AZAAAAAAAA, AAZAAAAAAAA, etc. Damit haben wir unser Ergebnis beisammen: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$B(1; 10, 0.5) = 10 \cdot 0.5 \cdot 0.5^9 = 10/1024,$$

also etwa 1 %.

Für den allgemeinen Fall ( $p$  und  $q$  verschieden, aber natürlich immer  $p+q=1$ ; wir können hier an eine manipulierte Münze denken, die auf einer Seite schwerer ist) lautet die Formel

$$B(r; n, p) = \frac{n!}{r! (n-r)!} p^r q^{n-r}.$$

Das sieht ein bißchen angsteinflößend aus, aber nach unserer vorherigen Abzählübung verstehen wir es:  $B(r; n, p)$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei  $n$  Würfeln  $r$  Erfolge zu erzielen, wenn die Wahrscheinlich für den Erfolg gleich  $p$  (und damit die Wahrscheinlichkeit für den Mißerfolg gleich  $q=1-p$ ) ist. Unnötig zu sagen, daß  $p$  nur eine Zahl zwischen Null und Eins sein kann.

Der Bruch auf der rechten Seite ist ein sogenannter “Binomialkoeffizient”; er gibt an, auf wie viele verschiedene Weisen man  $r$  Erfolge bei  $n$  Würfeln realisieren kann. (Raten Sie, was der Ausdruck  $49! / (6! (49-6)!)$  bedeutet - Woche für Woche!) In unserem Beispiel war er gleich  $10! / (1! (10-1)!) = 10$ . Ach ja: Der Ausdruck  $10!$  (sprich “zehn - Fakultät”) bedeutet  $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$ . Merke fürs Leben:  $1! = 0! = 1$ . Außerdem: (Jede Zahl)<sup>0</sup> = 1, auch  $0^0 = 1$ . Unser Beispiel hat uns also gelehrt, daß ich bei 100 Serien von jeweils 10 Würfeln im Mittel einmal das Ergebnis “einmal Zahl und neunmal Adler” erzielen werde. Alles verstanden? Gut. Rechnen Sie als Hausaufgabe das Ergebnis für  $r=4$  aus! Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß der MW der BiV gleich  $n \cdot p$  ist, und ihre Varianz gleich  $n \cdot p \cdot q$ .

### IV.3 Von “Herrn Binom” zu Herrn Poisson

Wenn man in der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit für den “Erfolg” immer kleiner, die Anzahl der “Würfe” immer größer werden läßt, dabei aber das Produkt  $n \cdot p$  (also den Mittelwert) konstant hält, dann erhält man die Poisson - Verteilung. Die Poissonverteilung greift immer dann, wenn man Ereignisse in einem bestimmten “Intervall  $x$ ” zählt, typischerweise von Raum oder Zeit, die voneinander und von  $x$  unabhängig sind (d.h. einander nicht kausal beeinflussen, und deren Häufigkeit auch nicht von der Wahl des Intervalls abhängen soll). Ein Paradebeispiel ist der Zerfall eines (langlebigen) Radio - Isotops: Wir wollen annehmen, daß die mittlere Lebensdauer sehr groß gegen die Beobachtungszeit sei (so daß die mittlere Zerfallsrate sich nicht ändert).

Dann könnte unser Experiment folgendermaßen aussehen: Wir bewaffnen uns mit einem Zählrohr und messen sehr oft, wie viele Zerfälle in jeweils einer Minute stattfinden. Wir wissen natürlich, daß die mittlere Zerfallsrate pro Minute durch Halbwertszeit und Menge des radioaktiven Materials (und durch andere Parameter) gegeben ist. Wir interessieren uns aber vor allem um die Fluktuationen.

Nun ist aber der radioaktive Zerfall ein durch und durch statistisches (“stochastisches”) Phänomen. In unserer Probe befindet sich eine immense Zahl von Kernen unseres Radionuklids; aber keiner dieser Kerne “weiß” etwas von den anderen - es gibt keine kausale Beeinflussung der Kerne untereinander. Jeder Kern “entscheidet” sich allein, wann er “zerfallen will”, und gehorcht dabei nur übergeordneten physikalischen Gesetzen, die z.B. die Halbwertszeit für just dieses Nuklid festlegen.

Es kann also sein (vorausgesetzt, daß ich den Umfang meiner Probe entsprechend gewählt habe), daß ich in einer Minute einmal neun, einmal zwei oder sieben Zerfälle, oder auch einmal gar keinen Zerfall registriere. Nur wenn ich nach jeweils (z.B.) 100 Meßreihen den Mittelwert der Zahlen meiner Zerfälle bilde, dann bekomme ich - mit kleinen Fluktuationen - immer die gleiche Zahl.

Wir stellen nun das Ergebnis unserer Meßreihen graphisch dar, und zwar in der bewährten Form des Histogramms. Wir teilen unsere Abszisse in Bins ein, die wir mit 0, 1, 2, usw. bezeichnen, im Prinzip bis “unendlich”. Wenn wir keinen Zerfall registriert haben, dann machen wir ein Kreuzchen in das “nullte” Bin, bei einem Zerfall in das erste, und so weiter. Wenn wir das lange genug gemacht haben, dann bekommen wir eine veritable Poisson - Verteilung. Die Form dieser Verteilung hängt nur (das ist wichtig!) von **einem** Parameter ab, nämlich ihrem Mittelwert, den wir  $\mu$  nennen wollen. Tapfer, wie wir sind, stellen wir uns gleich

der mathematischen Formel für die Poisson - Verteilung:

$$P(n; \mu) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$$

In dieser Formel bedeutet  $\mu$  (der griechische Buchstabe “my”), wie schon gesagt, den MW der Verteilung.  $n$  ist schlicht ein Laufindex, der von Null bis unendlich geht:  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Und die Formel wird folgendermaßen interpretiert (wir bleiben bei unserem Beispiel): Wenn der Mittelwert der Zerfälle meines Nuklids in einem gegebenen Zeitintervall (z.B. einer Minute) gleich  $\mu$  ist, dann wird die Wahrscheinlichkeit, genau  $n$  Zerfälle in diesem Intervall zu messen, durch  $P(n; \mu)$  gegeben. Alles klar? Übrigens: Die Poisson - Verteilung ist zwar eine diskrete Verteilung -  $n$  ist eine ganze Zahl -, der Mittelwert  $\mu$  jedoch kann eine beliebige reelle Zahl zwischen Null und Unendlich sein!

In den folgenden Abbildungen 3 und 4 sind zwei Poisson - Verteilungen dargestellt, und zwar einmal für einen kleinen MW (1.2), und einmal für einen großen (15). Wir sehen, daß die Verteilung für kleine MWe stark asymmetrisch ist und offenbar für größer werdende MWe immer symmetrischer wird: In der Tat geht die Poisson - Verteilung für große MWe in eine Gaußverteilung über.

In der Abbildung 4 sehen wir, daß die Poisson - Verteilung für einen MW von 15 schon deutlich weniger asymmetrisch ist und eine gewisse “Gauß - Ähnlichkeit” zeigt. Aber wir müssen offensichtlich noch deutlich größere MWe wählen, bis wir den Unterschied nicht mehr erkennen können.

Hier machen wir eine Pause: Glauben wir das? Wir haben gelernt, daß die Gaußverteilung eine kontinuierliche Verteilung ist und daß sie durch **zwei** Parameter definiert wird, nämlich durch MW und Varianz  $\sigma^2$ . Die Poisson - Verteilung wird aber durch nur einen Parameter definiert, durch den Mittelwert. Außerdem geht die Gaußverteilung von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , die Poisson - Verteilung jedoch fängt erst bei Null an.

Bevor wir weiter argumentieren, lüften wir noch ein Geheimnis der Poisson - Verteilung. Ihre Varianz ist gleich ihrem Mittelwert, nämlich

$$\sigma_{\text{Poisson}}^2 = \mu_{\text{Poisson}}$$

Auf dieser Eigenschaft beruht das “Wurzel - N - Gesetz” bei der Fehlerbestimmung von gezählten Größen. Aber darauf kommen wir noch.

Nach dem, was wir bis jetzt zusammengestellt haben, kann die Poissonverteilung niemals in eine “echte” Gaußverteilung übergehen. Tut sie auch nicht. Aber tatsächlich läßt sich die Form der Poisson - Verteilung für große MWe

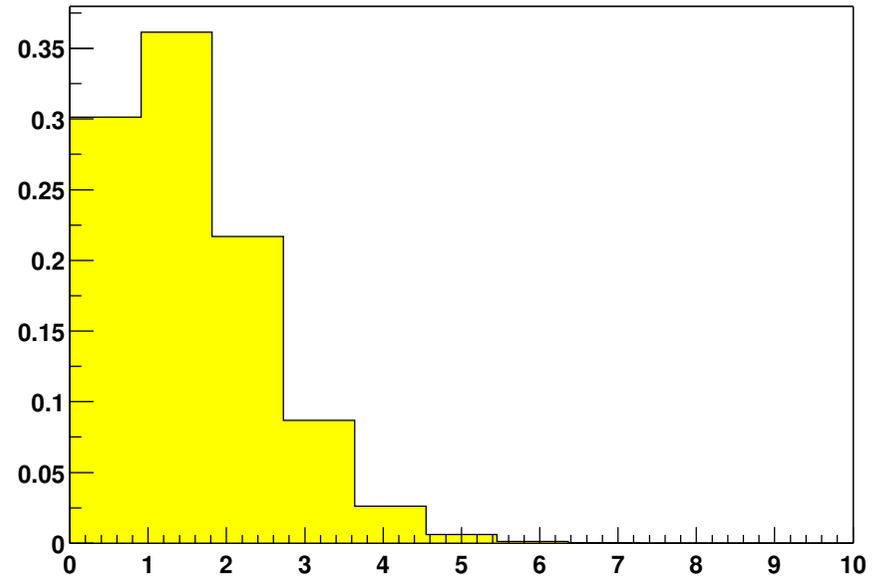


Abbildung 3: Poisson - Verteilung mit  $\mu = 1.2$

mathematisch durch die Gaußverteilung approximieren. Man muß dann aber in der Formel für den Gauß das “ $\sigma^2$ ” durch “ $\mu$ ” ersetzen - auch dieser “Pseudo - Gauß” hängt nur von einem Parameter ab! Einen Vorteil bietet die Vergaußung der Poisson - Verteilung allerdings: Für große MWe wird die Fakultät ( $n!$  im Nenner) sehr unhandlich - dies wird durch die Gauß - Form vermieden.

Jetzt haben wir also auch die Poisson - Verteilung verstanden. Sie wird immer dann wichtig, wenn irgendetwas in irgendeinem Intervall gezählt wird, dessen Vorkommen völlig statistisch erfolgt. Dies können, wie in unserem Beispiel, Zerfälle eines Radionuklids pro Zeiteinheit sein, aber auch Sterne pro Raumwinkel - Segment am Nachthimmel. Regentropfen pro Quadrat - Dezimeter im Garten tun es auch, oder - beliebt bei Physikern - Bläschen entlang einer Teilchenspur in einer Blaskammer. Mediziner dagegen haben eine Vorliebe für Leukozyten im Blut oder das Auftreten seltener Krankheiten.

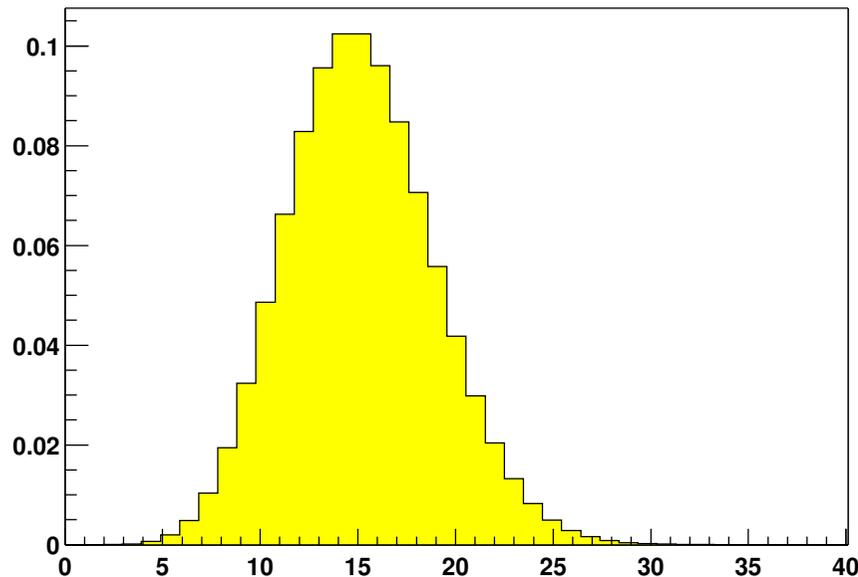


Abbildung 4: Poisson - Verteilung mit  $\mu = 15$

#### IV.4 Das “Wurzel - N - Gesetz”

Schließlich noch die versprochene Bemerkung zum “Wurzel - N - Gesetz”. Wenn jemand mit einem Geigerzähler eine Zählrate mißt, und er hat während der Meßzeit - sagen wir - 4711 “Counts” gezählt, dann wird er sagen, der Fehler (oder die statistische Unsicherheit) auf diese Zahl sei  $\sqrt{4711}$ . Warum?

Wie gesagt, unser Experimentator soll nur einmal gemessen haben. Was er eigentlich hätte tun müssen, aber aus verständlichen Gründen nicht tun kann, wäre “unendlich oft” zu messen. Dann könnte er nach jeder Messung sein Ergebnis in ein Histogramm (s. oben) eintragen und hätte am jüngsten Tag eine perfekte Poisson - Verteilung (vorausgesetzt, sein Präparat lebt noch länger). Diese Poisson - Verteilung wird dann einen Mittelwert haben, der gleich ihrer Varianz ist. Und hier erinnern wir uns daran, daß die Standardabweichung die

Wurzel aus der Varianz ist.

Unser Experimentator hat nun einen doppelten intellektuellen Schlenker gemacht: Da er nur einmal messen kann, interpretiert er sein Ergebnis als Schätzung für den Mittelwert; und wenn er den erst hat, zieht er die Wurzel daraus und verkauft sie als Standardabweichung - die klassische “Unsicherheit auf die Einzelmessung”. Dies sollte man im Hinterkopf haben, wenn man das “Wurzel - N - Gesetz” anwendet.

(Natürlich kann man auch hier subtiler vorgehen: Man kann nach dem Intervall fragen, in dem der wahre MW mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt, wenn ich eben bei nur einer Messung meine z.B. 4711 Zerfälle zähle. Aber das geht über den Rahmen dieser Betrachtung hinaus.)

Im Übrigen:  $\sqrt{N}$  ist der **absolute** Fehler auf die gemessene Zahl  $N$ . Der **relative** Fehler ist dann

$$\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Wenn ich diesen relativen Fehler mit 100 multipliziere, bekomme ich den “prozentualen” Fehler. Wir sehen, daß der relative Fehler mit “höherer Statistik” schrumpft. Man kann ihn also im Prinzip unter jede vorgegebene Grenze drücken - aber auch hier gilt wieder das, was schon im zweiten Abschnitt gesagt wurde.

#### IV.5 Normierung der Poisson - Verteilung

Zum Schluß noch etwas für den echten Fan: Wir wissen, daß jede Verteilung einer Wahrscheinlichkeitsdichte “auf Eins normiert” sein muß, denn irgendein Ergebnis kommt “mit Sicherheit”, also der Wahrscheinlichkeit Eins, heraus. Wie steht es mit der Poisson - Verteilung?

Um die Normierung zu überprüfen, muß die Summe über alle Einzelwahrscheinlichkeiten Eins werden, also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = 1.$$

Stimmt das? Wir schreiben dieselbe Formel etwas anders, indem wir die Exponentialfunktion vor die Summe ziehen:

$$e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = 1.$$

Aber nun sieht unser scharfes Auge sofort, was unter dem Summenzeichen steht: Es ist die Taylor - Reihenentwicklung der Exponentialfunktion, die (mit  $x$  statt mit  $\mu$ ) ausgeschrieben so aussieht:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x.$$

Damit wird unsere Summe schlicht zu

$$e^{-\mu} e^{\mu} = e^{(\mu-\mu)} = e^0 = 1,$$

was zu beweisen war.

## IV.6 Die "Duplizität der Ereignisse"

Man beobachtet im täglichen Leben des öfteren, daß zwei außergewöhnliche Ereignisse rasch nacheinander stattfinden. Die öffentliche Aufmerksamkeit nimmt dies besonders bei Katastrophen wie z.B. Flugzeugabstürzen wahr. Können wir das mit dem, was wir bisher gelernt haben, verstehen? Wir versuchen eine Annäherung:

Wir bleiben zunächst bei unseren radioaktiven Nukliden; wir schreiben aber den Mittelwert  $\mu$  (für die Anzahl der Zerfälle pro Zeitintervall) etwas um. Wir führen die "mittlere Häufigkeit pro Zeiteinheit" ein und nennen sie  $\lambda$  ("lambda"). Dann können wir uns den MW für jedes beliebige Zeitintervall  $t$  konstruieren, er ist schlicht  $\mu = \lambda t$ . Unser Poisson sieht jetzt so aus:

$$P(n; \mu = \lambda t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

Und jetzt fragen wir uns: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall  $t$  **kein** Zerfall stattfindet? Offenbar:

$$P(0; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

(Wir erinnern uns:  $0! = 1$ .) Und diese einfache Formel (die nichts anderes ist als das Gesetz des radioaktiven Zerfalls) sagt uns, daß **kurze** Intervalle zwischen zwei Zerfällen wahrscheinlicher sind als lange, denn  $e^{-\lambda t}$  wird um so kleiner, je größer  $t$  ist. Es ist also wahrscheinlicher, daß zwei Zerfälle dicht aufeinander folgen, als daß sie durch lange Intervalle getrennt sind.

Was hat das nun mit Katastrophen zu tun? Natürlich nur bedingt etwas. Wesentlich ist, daß bei dieser Betrachtung die einzelnen "Ereignisse" einander eben **nicht** kausal beeinflussen, wie das bei radioaktiven Zerfällen der Fall ist. Wenn wir also annehmen, daß Katastrophen wie Flugzeugabstürze "statistisch verteilt" vorkommen (und nicht, weil in einem bestimmten Flugzeugtyp etwa zwei Kabel vertauscht wurden), dann würde man tatsächlich häufiger kurze Abstände zwischen zwei solchen bedauerlichen Vorkommnissen erwarten als lange. Der Volksmund nennt das die "Duplizität der Ereignisse". Und damit endgültig genug von Herrn Poisson.

## V Ein Wort zur Fehlerfortpflanzung

Die Größen, für die man sich interessiert, sind oft nicht die gemessenen selbst, sondern daraus abgeleitete. Beispiel: Das Volumen einer Kiste ist das Produkt der Kantenlängen. Wie hängt die Unsicherheit (der "Fehler") des Volumens von den Meßfehlern der Kantenlängen ab?

Diese und andere Fragen beantworten die Rechenregeln der Fehlerfortpflanzung ("error propagation"). Diese basieren aber auf einfachen Regeln der Differentialrechnung und sollen hier nicht diskutiert werden. Außerdem findet man sie in jedem Lehrbuch und auch in der Anleitung zum Physikalischen Praktikum.

Es soll nur kurz der "asymmetrische Fehler" erwähnt werden; das ist ein Fehler, dessen Balken verschieden lang sind. Wie kann es dazu kommen?

Wenn eine Größe "linear" von einer anderen abhängt, wenn also beide nur durch einen konstanten Faktor verbunden sind wie z.B. beim Ohmschen Gesetz ( $U = R \cdot I$ ) Strom und Spannung, dann skaliert natürlich auch der Fehler mit dieser Konstanten. Graphisch kann man das durch "Spiegelung an einer Geraden" darstellen. Sobald aber der Zusammenhang nicht mehr linear ist, wie z.B. bei der kinetischen Energie, die quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt, dann spiegelt man nicht mehr an einer Geraden, sondern an einer Parabel. Und dann haben die Spiegelbilder des - symmetrischen - Fehlers z.B. der Geschwindigkeit nicht mehr gleiche Abstände vom Spiegelbild des Zentralwertes - der Fehler wird "asymmetrisch". Übrigens, in logarithmischer Darstellung erscheint natürlich auch ein symmetrischer Fehler asymmetrisch.

## VI Schlußbemerkung

So, ganz langsam geht uns die Puste aus, es ist Zeit, Schluß zu machen. Was haben wir gelernt? Wir haben uns mit zwei wichtigen Methoden der Messung und ihren Unsicherheiten beschäftigt: Mit der Messung einer kontinuierlichen Größe mit Hilfe eines (wie auch immer gearteten) “Maßstabes”, und einer Messung, die auf der Zählung von diskreten “Ereignissen” wie z.B. Zerfallsprozessen beruht. Und wir haben das dazugehörige Handwerkszeug kennengelernt, nämlich die Gauß- und die Poisson - Verteilung.

Damit haben wir in der Tat ein ansehnliches Wissen erworben, denn auf Gauß und Poisson basieren viele Gebäude der Statistik, insbesondere beim “Test von Hypothesen” und der Parameterschätzung. Hier sollte kurz das Wort “Anpassung” (“Fit”) fallen. Einfaches Beispiel: Jemand hat an einem langen Draht eine Spannung angelegt und mißt nun den Strom als Funktion der Spannung. Offenbar liegen die Meßpunkte “mehr oder weniger” auf einer Geraden. Welches ist die “beste” Gerade, die ich durch die Meßpunkte legen kann, und was sind meine Kriterien? Wenn ich ein “Fit - Verfahren” für diese Prozedur kenne, kann ich das Result (offenbar den reziproken Ohmschen Widerstand des Drahtes) und auch noch dessen Unsicherheit angeben.

Wir sehen, es ist ein weites und spannendes Feld. Jede Messung hat es mehr oder weniger mit dem Zufall zu tun. Aber der Zufall hat einmal (natürlich rein zufällig) Herrn Gauß und Monsieur Poisson getroffen - Herrn Binom sei Dank. Last but not least: Der Verfasser dankt seinem Nachbarn und Mitstreiter T. Berndt für tätige Hilfe bei der Erzeugung der Diagramme mit Hilfe des geheimisvollen Programmpaketes “Root”.

## Literatur

- [1] Siegmund Brandt, “Datenanalyse”, 4. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin, 1999.
- [2] Glen Cowan, “Statistical Data Analysis”, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [3] The Particle Data Group, K. Hagiwara et al., Phys. Rev. **D66** (2002) 010001; <http://pdg.lbl.gov/>.
- [4] Gary J. Feldman and Robert D. Cousins, “Unified approach to the classical statistical analysis of small signals”, Phys. Rev. **D57** (1998) 3873.

## Fehlerrechnung mit Köpfchen

F. Eisele - Physikalisches Institut, Universität Heidelberg

Die Fehlerrechnung erfreut sich bei Studenten i.A. keiner großen Beliebtheit. Im besten Falle wird sie als notwendiges Übel angesehen. Ein wichtiger Grund dafür ist allerdings auch der, dass viel zu viel unnötiger Rechenaufwand getrieben wird und der Nutzen vernünftiger Fehlerabschätzungen nicht erkannt wird. Die folgenden Tipps sollen dazu beitragen, dass die Fehlerrechnung einfacher und besser gelingt.

## VII Relative Fehler nutzen

In der Praxis ist die Nutzung von relativen Fehlern von unschätzbarem Wert und sollte wann immer möglich genutzt werden.

### VII.1 Relative Fehler als Erleichterung der Fehlerfortpflanzung

Es ist sehr einfach zu zeigen, dass für eine Funktion der Form

$$f(x, y, z) = x^a \cdot y^b \cdot z^c \quad (1)$$

gilt:

$$\left(\frac{df}{f}\right)^2 = \left(a \frac{dx}{x}\right)^2 + \left(b \frac{dy}{y}\right)^2 + \left(c \frac{dz}{z}\right)^2. \quad (2)$$

Dabei sind  $a, b, c$  beliebige Potenzen ( $3/2, -4, \dots$ ). Zu merken ist:

- Prozentuale Fehler werden quadratisch addiert.
- Wenn ein prozentualer Fehlerbeitrag kleiner als 20% des größten Fehlers ist, dann kann er mit Sicherheit vernachlässigt werden, da er den Gesamtfehler nur noch zu 2% beeinflusst.

$$\sqrt{1^2 + 0,2^2} = \sqrt{1,04} = 1,02. \quad (3)$$

- Geht eine Messgröße mit hoher Potenz in  $f$  ein, dann hat sie auch ein hohes Gewicht beim Fehlerbeitrag.

Beispiel aus dem Praktikum: Berechnet wird der Wert und Fehler des Adiabatenkoeffizienten  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \quad (4)$$

Die Messgrößen sind die Schwingungsdauer  $T$ , die Masse  $m$ , der Radius  $r$ , das Volumen  $V$  und der Druck  $p$ . Für den relativen Fehler ergibt sich dann aus (2):

$$\left(\frac{d\kappa}{\kappa}\right)^2 = \left(\frac{dm}{m}\right)^2 + \left(\frac{dV}{V}\right)^2 + \left(4 \frac{dr}{r}\right)^2 + \left(2 \frac{dT}{T}\right)^2 + \left(\frac{dp}{p}\right)^2. \quad (5)$$

Die Schwingungsdauer  $T$  wird aus einer langen Messreihe bestimmt mit einem prozentualen Fehler von etwa  $dT/T = 0,005$ . Der Fehlerbeitrag ist also 1% ( $2dT/T$ ). Die Werte von  $m, V$  und  $r$  sind vorgegeben zu  $m = (34,35 \pm 0,002)$  g,  $V = (1342,4 \pm 0,6)$  cm<sup>2</sup> und  $r = (10,253 \pm 0,013)$  mm. Der Druck  $p$  wird mit einer Genauigkeit von 1 Promille gemessen. Ohne weitere Rechnung ist sofort ersichtlich, dass  $p, m$  und  $V$  prozentuale Fehler von 1 Promille beitragen, also gegen den Fehlerbeitrag von  $T$  vernachlässigbar sind. Der relative Fehler von  $r$  ist zwar auch nur 1,3 Promille, er geht aber in den Fehler von  $\kappa$  mit dem Gewicht 4 ein, da  $\kappa$  von  $r^{-4}$  abhängt. Dieser Fehlerbeitrag ist daher 0,5% und nicht vernachlässigbar. Damit folgt:

$$\frac{d\kappa}{\kappa} = \sqrt{\left(2 \frac{dT}{T}\right)^2 + \left(4 \frac{dr}{r}\right)^2} = \sqrt{0,01^2 + 0,005^2} = 0,012. \quad (6)$$

Hier wurde die letzte Stelle aufgerundet.

### VII.2 Prozentuale Fehlerabschätzung zur Messplanung und Verbesserung des Experiments

Das Beispiel aus dem Praktikum zeigt, wo die Schwachstellen des Experiments sind, wenn das Ziel eine präzise Messung von  $\kappa$  sein soll: Der Messaufwand muss in die bessere Bestimmung von  $T$  und  $r$  gesteckt werden. Es lohnt sich nicht, kleine Fehlerbeiträge noch kleiner zu machen! Also könnte man daran denken längere Messreihen für  $T$  zu machen, da der Fehler von  $T$  für  $N$  Messungen mit  $1/\sqrt{N}$  kleiner wird (Fehler des Mittelwerts). Der Gewinn geht allerdings nur mit der Wurzel. Es macht im Allgemeinen wenig Sinn 100 Messungen zu machen, dann wäre es schon besser die Messmethode von  $T$  zu verbessern, also den Fehler der Einzelmessung zu verringern. Die Abschätzung prozentualer

Fehler vor der Versuchsdurchführung hilft also ein Experiment optimal zu planen. Hierzu macht man unter Umständen vorher kleine Testmessungen um die Fehlerbeiträge besser abschätzen zu können.

## VIII Für die Fehlerfortpflanzung bei komplizierten Formeln nicht Ableitungsberechnen.

Nehmen wir an, es soll eine Messgröße  $f(x)$

$$f(x) = 4x^2 \sin(12x^2) \exp(-2x) \quad (7)$$

und der dazugehörige Messfehler aus der Messung von  $x$  bestimmt werden. Offensichtlich ist die Standardfehlerfortpflanzung hier sehr mühsam. Sie sollten sich allerdings daran erinnern, was die Gleichung

$$df(x) = \frac{df}{dx} \quad (8)$$

bedeutet: Sie ist nur eine lineare Näherung um die Werte von  $f(x + dx)$  und  $f(x - dx)$  abzuschätzen und diese Näherung ist dazu häufig auch noch schlecht. Sie gilt nur für sehr kleine Werte von  $dx$ . Es ist viel sinnvoller in so einem Fall die Werte von  $f(x + dx)$  und  $f(x - dx)$  direkt auszurechnen. Dann ist  $dx_- = f(x - dx) - f(x)$  und  $dx_+ = f(x + dx) - f(x)$ . Das Ergebnis wäre

$$f(x)_{-dx_-}^{+dx_+}. \quad (9)$$

Nur wenn beide Fehler etwa gleich sind sollte man  $\pm dx$  schreiben und dafür den Mittelwert der beiden Fehlerabschätzungen nehmen. Das ist im Allgemeinen nur bei kleinen Fehlern so und kann sogar häufig zu groben Fehlern führen. Nehmen sie z.B. an, dass der Messwert zufällig nahe bei einem Extremwert der Funktion (7) liegt. Dann liefert die Fehlerfortpflanzung den Fehler Null, weil die Ableitung Null ist. Bei großen Fehlern ist das offensichtlich Unsinn.

- Sie dürfen den Fehler immer durch Berechnung der Funktionswerte  $f(x + dx)$  und  $f(x - dx)$  berechnen. Das ist oft einfacher als die Fehlerfortpflanzung und auf jeden Fall zuverlässiger, insbesondere wenn sie einen programmierbaren Rechner zur Hand haben.

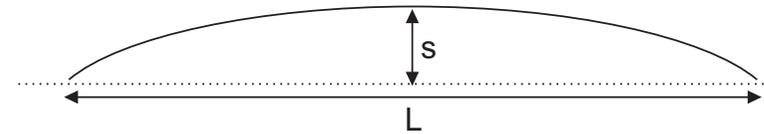


Abbildung 5: Bestimmung des Impuls eines geladenen Teilchens aus der Sagitta des Kreisbogens.

- Die Nutzung dieses Tricks erlaubt auch eine erhebliche Ausweitung der Anwendung prozentualer Fehler.

Zum Abschluss noch ein in der Physik wohlbekanntes Beispiel, bei dem die Standard-Fehlerrechnung versagt: In einem magnetischen Spektrometer wird der Impuls eines geladenen Teilchens aus der Sagitta  $s$  des Kreisbogens bestimmt (Abbildung 5).

Dabei ist  $L$  die Länge des Kreisbogens. Der Fehler der Sagitta  $ds$  ist durch die Genauigkeit des Spurdetektors bestimmt und sei z.B. 1 mm. Wenn der Impuls sehr groß wird, dann kann  $ds$  größer oder vergleichbar mit  $s$  sein, d.h.  $s - ds$  kann negativ werden, was praktisch heißt, dass sich das Vorzeichen der elektrischen Ladung umkehrt, und offensichtlich kann ein Impulswert  $\infty$  nicht ausgeschlossen werden. Dagegen liefert  $s + ds$  einen kleineren Impuls. Die Funktion  $p \propto 1/s$  verhält sich bei der Fehlerfortpflanzung für große prozentuale Fehler offensichtlich extrem asymmetrisch und liefert für große Werte von  $ds/s$  kompletten Unsinn. Hier hilft nur das Verfahren der direkten Funktionsberechnung und die Angabe asymmetrischer Fehler. Diese werden sie in vielen Publikationen finden.

## IX Schlussbemerkung

Alles was bisher gesagt wurde, gilt dann, wenn die statistischen Messfehler dominieren. Dies ist bei Präzisionsexperimenten selten der Fall. Der Kampf mit systematischen Fehlern ist daher das eigentliche Problem der Experimentalphysiker. Dafür gibt es aber leider keine Patentrezepte.

## Versuch 11 Einführung

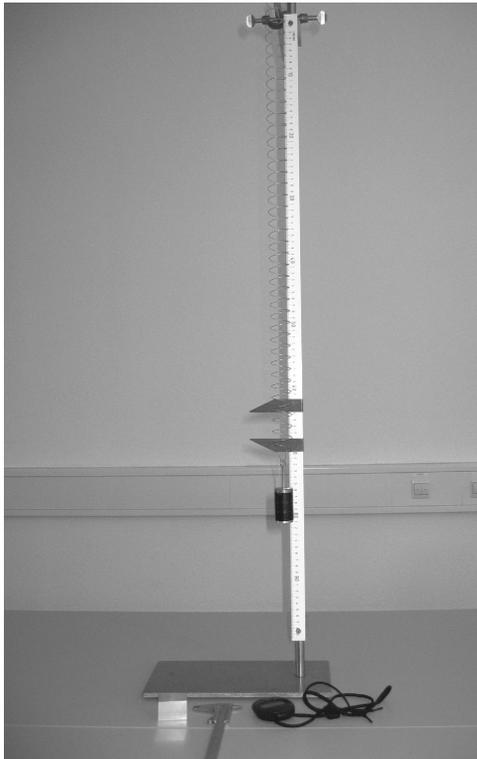


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

### I Vorbemerkung

Ziel des Einführungsveruches ist es Sie mit grundlegenden Techniken des Experimentierens und der Auswertung der Messdaten vertraut zu machen. Diese Grundkenntnisse sind für eine erfolgreiche Durchführung des Praktikums notwendig.

Bei diesem Versuch werden Sie Messungen am Federpendel durchführen. Zunächst wird die Federkonstante gemessen. Das Ergebnis dieser Messung wird verwendet um in einer zweiten Messung die Erdbeschleunigung zu bestimmen. Sie werden in diesem Versuchsteil den statistischen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Federpendels kennen lernen. Es soll auch gezeigt werden, dass zwei scheinbar identische Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer unterschiedliche Messgenauigkeiten besitzen. Um aus den Messdaten die Federkonstante und die Erdbeschleunigung zu extrahieren ist es notwendig die Ergebnisse graphisch darzustellen. Aus den Diagrammen die erstellt werden, kann man die zu bestimmenden Größen einschließlich des Messfehlers ablesen.

### II Messmethode

Die Differentialgleichung für ein Federpendel lautet:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (1)$$

Wenn man das Federpendel zur Zeit  $t = 0$  um  $x_0$  auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (3)$$

Die Periodendauer  $T$  ist mit  $\omega$  wie folgt verknüpft:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Somit ergibt sich für die Periodendauer zu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5)$$

Misst man die Periodendauer  $T$  als Funktion der Masse  $m$  so kann man hieraus die Federkonstante  $D$  bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse  $m$  belastet, so gilt:

$$mg = Dx \quad (6)$$

Da der Wert der Federkonstante  $D$  aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

### III Durchführung

#### Aufgabe 1: Fehlerbestimmung zweier Messmethoden

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse von 200g. Messen Sie dann je 10 mal 3 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen. Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalausschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 10 mal 3 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes<sup>1</sup>. Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden Methoden.

#### Aufgabe 2: Messen der Schwingungsdauer als Funktion der Masse

Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit Massen zwischen 50 g und 250 g in Schritten von 50 g. Für jede Masse werden dreimal drei Pendelschwingungen ausgemessen. Diese Messreihe wird dazu benutzt die Federkonstante des Pendels zu bestimmen.

#### Aufgabe 3: Bestimmung der Auslenkung als Funktion der Masse

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit den Massen 0g, 50g, 100g, 150g, 200g und 250g beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Notieren Sie die Ablesegenauigkeit für die Auslenkung!

### IV Auswertung

Tragen Sie zunächst die Ergebnisse der Vergleichsmessungen der Schwingungsdauer in ein Histogramm ein. Wählen Sie für beide Histogramme den gleichen Abszissenbereich! Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Histogramm für eine Messreihe. Berechnen Sie für beide Methoden den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Welche Methode ist genauer? Was ist der Grund?

<sup>1</sup>Für eine Messreihe mit  $n$  Messungen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und dem Mittelwert  $\bar{x}$  ist der mittlere Fehler der Einzelmessung (auch Standardabweichung) durch  $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$  definiert. Der mittlere Fehler des Mittelwertes ist durch  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$  gegeben.

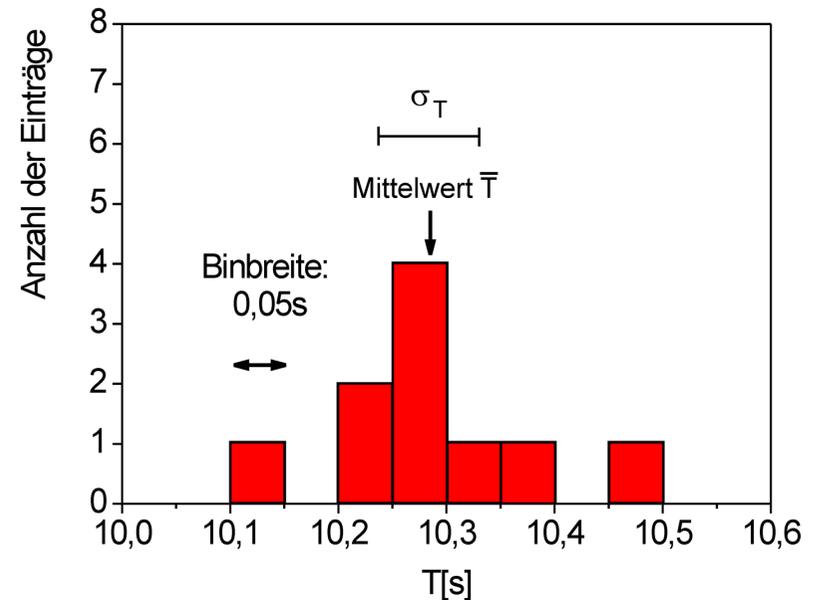


Abbildung 2: Histogramm einer Messreihe.

| Messung | $T$ [s] | $\bar{T}$ [s] | $\sigma_T$ [s] | $\sigma_{\bar{T}}$ [s] |
|---------|---------|---------------|----------------|------------------------|
| 1       | 10,11   | 10,285        | 0,094          | 0,03                   |
| 2       | 10,23   |               |                |                        |
| 3       | 10,34   |               |                |                        |
| 4       | 10,28   |               |                |                        |
| 5       | 10,26   |               |                |                        |
| 6       | 10,24   |               |                |                        |
| 7       | 10,28   |               |                |                        |
| 8       | 10,46   |               |                |                        |
| 9       | 10,27   |               |                |                        |
| 10      | 10,38   |               |                |                        |

Um die Federkonstante aus der Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse zu bestimmen, wird eine graphische Methode verwendet. Hierzu wird

Gleichung (5) geschrieben als

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m \quad (7)$$

Dies lässt sich als Geradengleichung

$$y = ax + b \quad (8)$$

interpretieren wenn man

$$\begin{aligned} x &= m \\ y &= T^2 \\ a &= \frac{4\pi^2}{D} \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

setzt. Daher wird im Diagramm das Quadrat der gemessenen Schwingungsdauer  $T$  gegen die Masse  $m$  aufgetragen. Der Wert von  $T^2$  und von  $m$  sind fehlerbehaftet. Folglich müssen Fehlerbalken in das Diagramm eingezeichnet werden. Der Fehler wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern der Mittelwerte der Schwingungsdauern bestimmt. Als nächstes wird die Steigung aus dem Diagramm bestimmt in dem eine Gerade so in das Diagramm gelegt wird, dass die Gerade die Messwerte möglichst gut beschreibt. Die Steigung dieser Geraden kann nun aus dem Diagramm nach

$$a = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \quad (10)$$

abgelesen werden. Um den Fehler von  $a$  zu erhalten werden in dasselbe Diagramm zusätzlich Fehlergeraden eingezeichnet. Die Fehlergeraden werden so gelegt, dass sie noch gerade die Messungen unter Berücksichtigung des Messfehlers beschreiben könnten. Die Differenz der Steigungen der optimierten Geraden und der Fehlergeraden wird als Fehler der Steigung  $\sigma_a$  verwendet. Nach Gleichung (9) kann nun die Federkonstante und mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz der Messfehler der Federkonstanten berechnet werden.

Nach Gleichung (7) sollte man erwarten, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Dies ist aber nicht der Fall. Überlegen Sie sich die Ursache hierfür. Aus dem selben Grund ist es übrigens auch nicht möglich die Federkonstante für einzelne Messungen direkt aus Gleichung (5) zu bestimmen. Die graphische Bestimmung der Federkonstante ist in diesem Fall unerlässlich! Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem zweiten Diagramm die

Auslenkung des Federpendels gegen die Masse aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden, da Gleichung (6) wieder als Geradengleichung der Form

$$x = \frac{g}{D} m \quad (11)$$

dargestellt werden kann. Die Steigung

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta m} \quad (12)$$

und ihr experimenteller Fehler können nun nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Erdbeschleunigung wird nach

$$g = D \cdot a \quad (13)$$

berechnet. Um den Fehler der Erdbeschleunigung zu bestimmen muss die Fehlerfortpflanzung angewendet werden, da sowohl der Wert von  $D$  als auch der Wert von  $a$  fehlerbehaftet sind.

## V Messprotokoll

### Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer:

| Nr. | Anzahl der Schwingungen $n$ | Messzeit $t$ [s] | Periodendauer $T$ [s] | Mittelwert $\bar{T}$ [s] | $\sigma_{\bar{T}}$ [s] |
|-----|-----------------------------|------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 4   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 5   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 6   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 7   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 8   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 9   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 10  | 3                           |                  |                       |                          |                        |

*Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Maximalauslenkung.*

| Nr. | Anzahl der Schwingungen $n$ | Messzeit $t$ [s] | Periodendauer $T$ [s] | Mittelwert $\bar{T}$ [s] | $\sigma_{\bar{T}}$ [s] |
|-----|-----------------------------|------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 4   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 5   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 6   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 7   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 8   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 9   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 10  | 3                           |                  |                       |                          |                        |

*Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Nulldurchgang*

Ablesegenauigkeit der Stoppuhr: .....

### Messung der Federkonstante:

| $m$ [g] | Nr. | Anzahl der Schwingungen $n$ | Messzeit $t$ [s] | Periodendauer $T$ [s] | Mittelwert $\bar{T}$ [s] | $\sigma_{\bar{T}}$ [s] |
|---------|-----|-----------------------------|------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| 50      | 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 100     | 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 150     | 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 200     | 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
| 250     | 1   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 2   | 3                           |                  |                       |                          |                        |
|         | 3   | 3                           |                  |                       |                          |                        |

*Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Start/Stop bei*

.....

### Messung der Erdbeschleunigung:

| $\Delta m$ [g] | Auslenkung $x$ [mm] | Ablesefehler $\Delta x$ [mm] |
|----------------|---------------------|------------------------------|
|                |                     |                              |
|                |                     |                              |
|                |                     |                              |
|                |                     |                              |
|                |                     |                              |
|                |                     |                              |

*Messung der Auslenkung als Funktion der Masse*

## VI Beispiele für die Darstellung von Messergebnissen

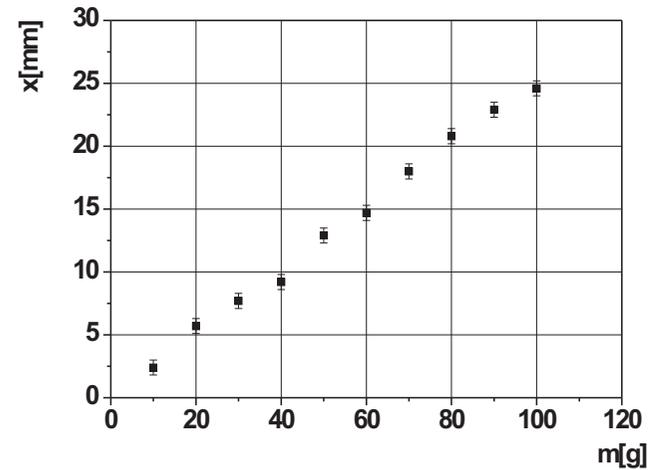
Abschließend werden noch ein paar Beispiele dafür gegeben, wie Messdaten graphisch dargestellt werden sollen. Es werden auch einige Beispiele für typische Fehlerquellen beim Zeichnen von Diagrammen gezeigt.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich zu

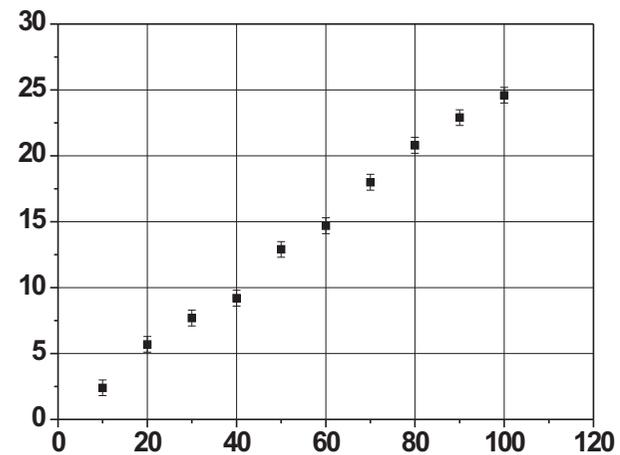
$$a_{\text{Ausgleich}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{20\text{mm}}{80\text{g}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

die der Fehlergeraden zu

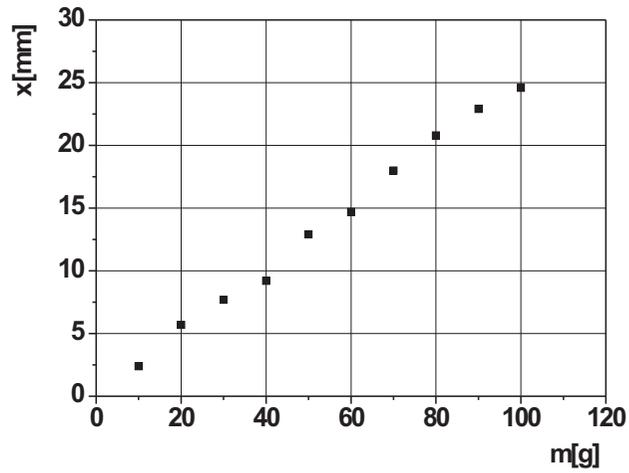
$$a_{\text{Fehler}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{21,5\text{mm}}{78\text{g}} = 0,276 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$



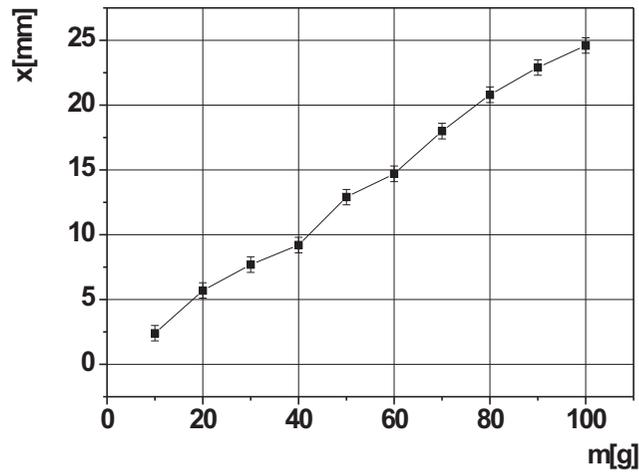
(a) Richtige Darstellung von Messwerten.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Achsenbeschriftungen fehlen.



(a) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Fehlerbalken fehlen.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Messpunkte sind durch eine (unphysikalische) Zick-Zack-Linie verbunden.

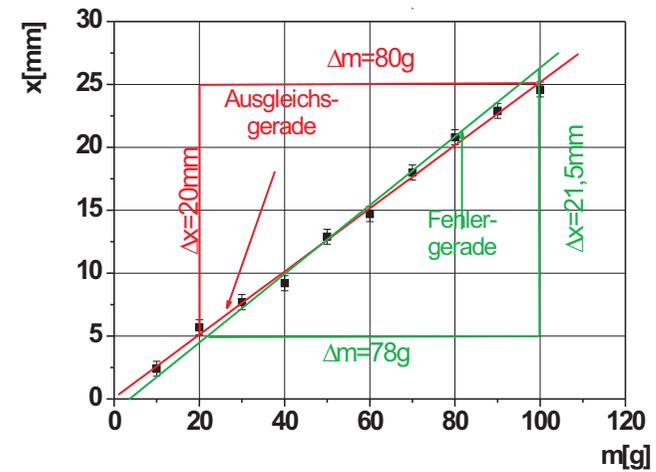


Abbildung 5: Richtiges Anpassen einer Ausgleichsgerade und Ermittlung der Geradensteigung.

## Versuch 12 Trägheitsmoment

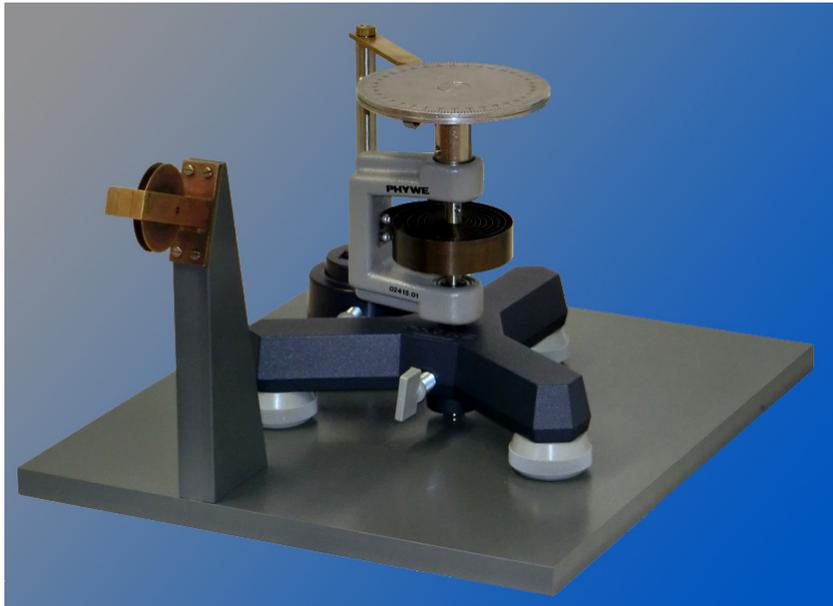


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

### I Messaufbau

- Drehpendel mit senkrechter Achse
- Drehgabel und Drehtisch
- Waage gemeinsam für alle Aufbauten
- Handstoppuhr und Messschieber
- Balancierschneide

- Zubehör: Al-Scheibe mit Schnurnut und Winkelteilung, runde Messingscheibe, unregelmäßige Messingscheibe, Gewichtsteller mit Zugschnur, 6 Auflegegewichte von je 40 g, Selbstklebeetiketten

### II Literatur

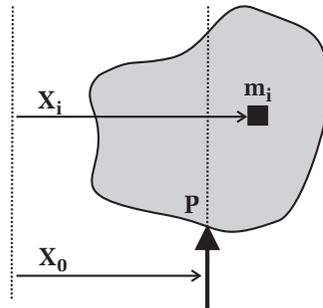
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Drehbewegung fester Körper, Trägheitsmoment, Drehmoment, Drehimpuls, Rotationsenergie, Steinerscher Satz.

#### Verständnisfragen

1. Die Physik der linearen Bewegung und der Drehbewegung wird bei Verwendung der passenden Begriffe durch völlig analoge Gleichungen beschrieben. Finden Sie für die folgenden Größen der linearen Bewegung, analoge Größen zur Beschreibung der Drehbewegung: Ort  $\vec{r}$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , Masse  $m$ , Kraft  $\vec{F}$ , Impuls  $\vec{p}$ , kinetische Energie  $W$ . Vergleichen Sie weiterhin folgende Größen des Federpendels mit dem Drehpendel: lineares Kraftgesetz:  $\vec{F} = -k\vec{r}$ , Gesamtenergie  $W = 1/2kx^2 + 1/2mv^2$ , Schwingungsdauer  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ .
2. Welches „Kraftgesetz“ erwarten Sie bei der Drehung des Drehpendels?
3. Wie sieht die Differentialgleichung für die Schwingung eines Körpers mit dem Trägheitsmoment  $J_s$  aus, wenn sie harmonisch ist, wie sieht dafür der Energiesatz aus?
4. Betrachten Sie die Skizze. Welche Bedingung für  $x_0$  muss gelten, damit der im Punkt  $P$  unterstützte Körper im Schwerfeld im Gleichgewicht ist? Was hat das mit dem Schwerpunkt zu tun?



5. Formulieren Sie den Steinerschen Satz (mit Skizze).
6. Was sind die Hauptträgheitsmomente und die zugehörigen Drehachsen für einen homogenen Quader (Skizze)? Wodurch zeichnen sie sich bei freier Rotation aus?

## IV Aufgaben

- Das Richtmoment eines Drehpendels ist zu bestimmen.
- Das Trägheitsmoment eines unregelmäßig geformten Körpers soll für verschiedene Lagen der Drehachse im Körper ermittelt werden.

## V Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Bestimmung des Richtmoment $D$ des Drehpendels

Das Richtmoment  $D$  des Drehpendels ist über den Zusammenhang zwischen angreifendem Drehmoment  $M$  und dem Winkel der Auslenkung  $\phi$  nach der Beziehung

$$M = -D\phi \quad (1)$$

zu bestimmen. Das Drehmoment  $M$  wird wie folgt erzeugt: Auf der Drehachse wird die Aluminiumscheibe mit der Winkelteilung aufgesetzt und festgeschraubt. Am Umfang der Scheibe greift über eine Schnur tangential die Kraft  $F$  (Gewicht des Gewichtstellers mit aufgelegten Massestücken) an. Es ist dann

$$M = -Fr \quad (2)$$

worin  $r$  der Radius der Scheibe ist, der über den Durchmesser  $2r$  mit dem Messschieber bestimmt wird.

Hängen Sie den Gewichtsteller an die Schnur und lösen Sie die Schraube am Stativ. Drehen Sie nun den gesamten Aufbau so, dass die Schnur über den gesamten Umfang der Scheibe anliegt. Legen Sie nacheinander die 6 Gewichte auf. Notieren Sie den jeweiligen Winkel der Scheibendrehung.

### Aufgabe 3: Bestimmung des Richtmoment $D$ des Drehpendels einer Scheibe mit bekanntem Trägheitsmoment

Zum Vergleich ist das Richtmoment  $D$  des Drehpendels aus seiner Schwingungsdauer mit einer Scheibe mit bekanntem Trägheitsmoment  $J_s$  zu ermitteln. Dazu wird die Al-Scheibe abgenommen und der Drehtisch aufgesetzt. Zunächst wird die Schwingungsdauer  $T_1$  des Tisches bestimmt, dann wird die runde Messingplatte so auf dem Drehtisch befestigt, dass ihr Mittelpunkt (Körnermarke) genau über der Achse (Zeigerspitze) liegt und erneut die Schwingungsdauer gemessen ( $T_2$ ). Zur Ermittlung der Schwingungsdauer stoppen Sie jeweils 3 mal 20 Schwingungen. Bestimmen Sie den Durchmesser der Scheibe mit der Schieblehre sowie dessen Masse.

### Aufgabe 4: Bestimmung des Schwerpunktes der unregelmäßigen Messingplatte

Der Schwerpunkt der unregelmäßigen Messingplatte ist auf statischem Wege zu bestimmen. Kleben Sie auf die Platte ein neues Etikett. Legen Sie die Platte auf die am Tisch festgeschraubte Schneide und ermitteln Sie zwei möglichst senkrecht zueinander liegende Gleichgewichtslagen, die Sie durch Striche längs der Auflagerschneide auf dem Klebeetikett kennzeichnen. Die erhaltenen Schwerlinien kreuzen sich im Schwerpunkt.

### Aufgabe 5: Bestimmung des Trägheitsmoment der unregelmäßigen Messingplatte

Das Trägheitsmoment der unregelmäßigen Platte bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt senkrecht zur flachen Seite der Platte ist aus ihrer Schwingungsdauer zu bestimmen (einmal 20 Schwingungen). Hierzu wird die Platte so auf dem Drehtisch befestigt, dass der Schwerpunkt genau unter der Zeigerspitze liegt. Das Trägheitsmoment des Drehtisches, den Sie in Aufgabe 3 bestimmt haben, wird von dem ermittelten Trägheitsmoment (Tisch + Platte) abgezogen.

**Aufgabe 6: Bestimmung der Trägheitsmomente parallel zur Schwerpunktachse**

Bestimmen Sie die Trägheitsmomente bezüglich fünf parallel zur Schwerpunktachse (Aufgabe 5) im Abstand  $a_1, \dots, a_5$  verlaufende Achsen. Ziehen Sie auf dem Klebeetikett eine Gerade in Längsrichtung der Platte durch den Schwerpunkt. Markieren Sie darauf einige Punkte und deren Abstände vom Schwerpunkt. Für diese so markierten Achsen bestimmen Sie nun die Trägheitsmomente wie in Aufgabe 5. Die Masse der Platte ist durch Wägung zu bestimmen.

## VI Auswertung

**zu Aufgabe 2:**

Tragen Sie die gemessenen Winkel als Funktion des Drehmoments in ein Diagramm ein. Aus der Steigung der durch die Messpunkte zu legenden Geraden kann  $D$  errechnet werden. Der Fehler von  $D$  ist grafisch zu bestimmen.

**zu Aufgabe 3:**

Das Trägheitsmoment  $J_s$  der runden Scheibe bestimmen Sie in einfacher Weise aus deren Masse  $m_s$  und ihrem Radius  $r_s$  zu

$$J_s = \frac{1}{2} m_s r_s^2 \quad (3)$$

Ist das Trägheitsmoment des Tisches  $J_T$ , dann ist

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T}{D}} \quad (4)$$

und

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_s}{D}} \quad (5)$$

Nach Quadrieren kann aus (4) und (5) das Trägheitsmoment  $J_T$  durch Subtraktion eliminiert werden. Man erhält

$$D = \frac{4\pi^2 J_s}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{2\pi^2 m_s r_s^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (6)$$

Prüfen Sie nach, ob die beiden gefundenen Werte für  $D$  aus Aufgabe 2 und Aufgabe 3 innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen.

**zu Aufgabe 5:**

Berechnen Sie das Trägheitsmoment der unregelmäßigen Platte.

**zu Aufgabe 6:**

Tragen Sie die gefundenen Werte gegen  $a^2$  in ein Diagramm ein. In dasselbe Diagramm sind die Werte für das Trägheitsmoment als Funktion von  $a^2$  einzutragen, die sich aus dem Steiner'schen Satz ergeben. Zeichnen Sie zu den experimentell erhaltenen Werte die Fehlerbalken ein.

## Versuch 13 Resonanz

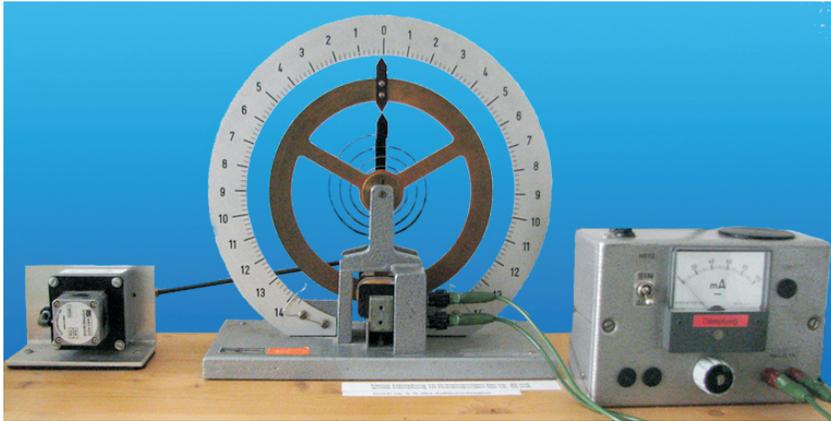


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Drehpendel, angeregt von einem Schrittmotor mit Exzenter
- Schrittmotorsteuerung mit Netzteil
- Frequenzgenerator
- Netzgerät zur Regelung der Dämpfung (bei Aufbau A-C in das Gehäuse der Schrittmotorsteuerung eingebaut)

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Freie Schwingung (gedämpft, ungedämpft), erzwungene Schwingung, Resonanz, Drehpendel, Wirbelströme, Lenzsche Regel.

#### Verständnisfragen:

1. Welche Kräfte wirken in dem System?
2. Wie sieht die Differentialgleichung für die Schwingung aus, wenn sie gedämpft oder ungedämpft ist? Wie lauten die Lösungen?
3. Mit welcher Frequenz schwingt das Drehpendel, wenn eine äußere Kraft angelegt wird? (Wie sieht die Differentialgleichung aus?)
4. In welche Formen teilt sich die Gesamtenergie im System auf? Was passiert bei der Dämpfung?
5. Wie groß ist die Energie im System in Abhängigkeit von der Frequenz des Erregers (qualitativ)?
6. Eine „Resonanzkurve“ wird durch die Lage des Maximums („Resonanzfrequenz“), die Amplitude an der Resonanzstelle sowie die Halbwertsbreite festgelegt. Welchen Einfluss hat die Größe der Dämpfung auf die genannten Parameter der Resonanzkurve?
7. Was versteht man unter der „Güte“  $Q$  eines Resonators?

### IV Aufgaben

- Die Schwingungsdauer  $T_0$  eines ungedämpften, freien Drehpendels (Pohl-sches Rad) ist zu bestimmen.
- Mit einer Wirbelstrombremse wird das Pendel gedämpft und für zwei Ströme aus der Abnahme der Amplitude mit der Zeit die Dämpfung bestimmt.
- Das Pendel wird zu einer erzwungenen Schwingung angeregt und es wird für verschiedene Dämpfungen die Abhängigkeit der Amplitude von der Erregerfrequenz gemessen. Aus der Breite und der Höhe der Resonanzkurven werden nochmals Werte für die Dämpfungskonstanten ermittelt.

## V Grundlagen

In diesem Versuch werden Sie freie und erzwungene Schwingungen eines Drehpendels untersuchen. Die freie gedämpfte Schwingung (Schwingungsdauer  $T_f$ ) ist dadurch gekennzeichnet, dass die Amplitude mit fortschreitender Zeit abnimmt und das Pendel schließlich irgendwann zum Stillstand kommt. Die Amplitudenabnahme tritt auf, wenn Kräfte (z.B. Reibungskraft) vorhanden sind, die der momentanen Bewegungsrichtung entgegenwirken. Sind diese proportional zur Geschwindigkeit (häufigster Fall), so wird die Zeitabhängigkeit der Bewegung durch

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \sin \omega_f t \quad (1)$$

beschrieben. Hier bezeichnet  $\omega_f$  die Kreisfrequenz des gedämpften, frei schwingenden Oszillators,  $a_0$  die Anfangsamplitude und  $\delta$  die Dämpfungskonstante. Der erste Teil von Gleichung (1) beschreibt das exponentielle Abklingen, die Sinusfunktion die Oszillation der Schwingung. Betrachtet man die Zeitabhängigkeit der Amplitude nur in einem der Umkehrpunkte, so ist dort der Sinus stets Eins und wir erhalten für die Amplitude

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t}. \quad (2)$$

Sofern die Schwingung zur Zeit  $t = 0$  in einem Umkehrpunkt begonnen hat, lässt sich  $t = nT_f$  ( $n = \text{Zahl der Schwingungen}$ ,  $T_f = \text{Periodendauer}$ ) schreiben. Trägt man gemäß Gleichung (2) die Amplitude im logarithmischen Massstab über die Zahl der Schwingungen auf, so erhält man eine Gerade (Abbildung 2). Aus Abbildung 2 kann unmittelbar die Dämpfungskonstante  $\delta$  bestimmt werden. Ist  $t_{1/2}$  die Zeit, zu der die Amplitude auf die Hälfte der Anfangsamplitude abgesunken ist, so folgt

$$a(t_{1/2}) = \frac{a_0}{2} = a_0 e^{-\delta t_{1/2}} \quad \text{und damit} \quad \delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \quad (3)$$

Zwischen der Kreisfrequenz  $\omega_f$  der gedämpften Schwingung und der Kreisfrequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung besteht der Zusammenhang:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (4)$$

Schaltet man über ein mechanisches Übertragungssystem ein periodisch wirkendes Drehmoment (Schrittmotor mit Exzenter) mit der Frequenz  $\omega$  an das

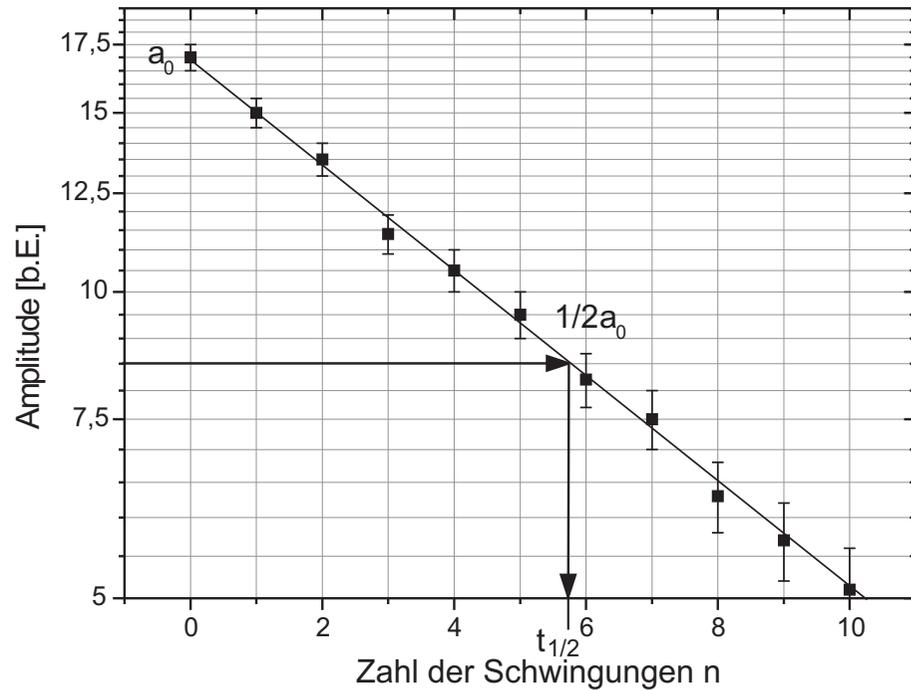


Abbildung 2: Messung der exponentiellen Abnahme der Amplitude eines Oszillators. (b.E.=Beliebige Einheiten). Beachten Sie die logarithmische Auftragung der Amplitude.

Drehpendel, so spricht man von einer erzwungenen Schwingung. Man beobachtet nach Abwarten des sogenannten Einschwingungsvorganges eine Schwingung mit konstanter Amplitude und der Frequenz  $\omega$  des Erregers. Die Amplitude des Drehpendels hängt von der Erregfrequenz ab. Der Verlauf ist in Abbildung 3 dargestellt und wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$b(\omega) = \frac{A\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \quad (5)$$

wobei  $b(\omega)$  die Amplitude des Drehpendels als Funktion der Anregungsfrequenz

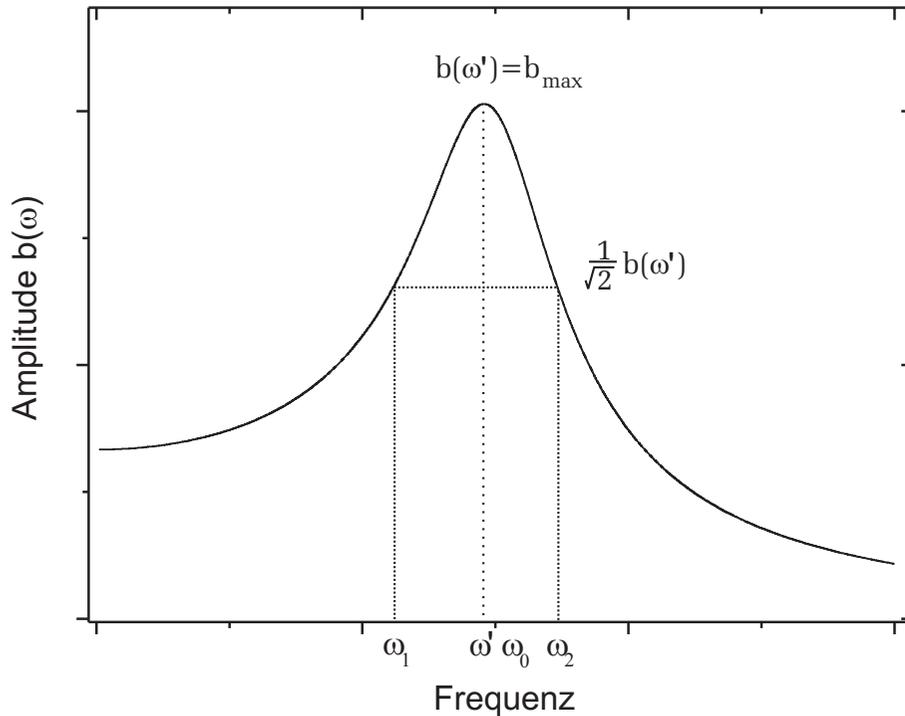


Abbildung 3: Resonanzkurve. Beachten Sie dass hier  $\omega = 2\pi f$  und nicht  $f$  aufgetragen ist.

und  $A$  die Amplitude des Erregers darstellen. Aus Gleichung (5) lässt sich durch Differentiation und Bestimmung der Nullstelle die Frequenz  $\omega'$  bestimmen, bei der die Amplitude maximal wird<sup>1</sup>:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (6)$$

<sup>1</sup>Die Verschiebung von  $\omega'$  gegen  $\omega_0$  ist sehr gering und im Versuch kaum messbar. Bei einer Dämpfung, bei der die Amplitude pro Schwingung auf die Hälfte abnimmt, beträgt sie 1,2 % von  $\omega_0$ . Bei einer solchen Schwingung wäre die Halbwertsbreite der Resonanzkurve  $0,23 \omega_0$ , d.h. man müßte die Lage des Maximums auf rund 5 % von der Halbwertsbreite messen!

Zwei weitere Größen sind zur Charakterisierung der Resonanzkurve wichtig: Die Halbwertsbreite  $H$  und die Resonanzüberhöhung. Die Breite der Kurve in der Höhe  $b(\omega')/\sqrt{2}$  ist bei nicht zu starker Dämpfung gegeben durch

$$H = (\omega_2 - \omega_1) = 2\delta. \quad (7)$$

$H$  heißt die Halbwertsbreite der Resonanzkurve, da es die Breite in halber Höhe ist, wenn man das Quadrat der Amplitude über der Frequenz aufträgt. Die Resonanzüberhöhung ist definiert durch den Quotienten

$$\frac{b(\omega')}{b(\omega \rightarrow 0)} = \frac{\omega_0}{2\delta}, \quad (8)$$

wobei  $\omega_0 \approx \omega_f$  angenommen wurde. Die links stehenden Amplituden und  $\omega_0$  können gemessen werden, womit eine Bestimmung von  $\delta$  möglich ist.

Die Theorie der erzwungenen Schwingung liefert für die Auslenkung als Funktion der Zeit  $\phi(t)$  folgenden Ausdruck:

$$\phi(t) = a_0 \sin(\omega_f t - \beta) e^{-\delta t} + b(\omega) \sin(\omega t - \epsilon). \quad (9)$$

Diese Gleichung enthält eine exponentiell abklingende Schwingung mit der Frequenz  $\omega_f$  der freien gedämpften Schwingung plus einer ungedämpften Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  des Erregers. Die Phase  $\beta$  hängt von dem Anfangszustand des Systems ab.  $\epsilon$  ist die Phasendifferenz zwischen Erreger und erzwungener Schwingung. Der Einschwingvorgang ist beendet, wenn der erste Term in (9) praktisch verschwunden ist. Es bleibt eine stationäre Schwingung der Amplitude  $b$  und der Frequenz  $\omega$ , wobei  $b$  nach (5) von  $\omega$  abhängt.

## VI Durchführung des Versuchs

**Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.**

**Aufgabe 2: Bestimmung der Schwingungsdauer  $T_0$  des ungedämpften freien Drehpendels durch dreimaliges Messen von 20 Schwingungsdauern.**

**Aufgabe 3: Bestimmung der Einschwingzeit bei unterschiedlichen Dämpfungen.**

Schalten Sie die Dämpfung ein (sie funktioniert nach dem Prinzip der Wirbelstrombremse; „Lenzsche Regel“) und beobachten Sie zunächst qualitativ den Einfluss auf die Amplitude der Schwingung bei verschiedenen Strömen durch die zur Dämpfung dienende Magnetspule. Stellen Sie dann die an der Apparatur angegebenen 2 Stromwerte ein, bei denen die Amplitude einmal nach ca. 10 Schwingungen und einmal nach ca. 15 Schwingungen vom Vollausschlag auf praktisch 5 % des Vollausschlages abgeklungen ist. Schreiben Sie die zugehörigen Zeiten auf. Sie sind die zu dieser Dämpfung gehörenden Einschwingzeiten für die Messungen unter 5<sup>2</sup>.

**Aufgabe 4: Bestimmung der Schwingungsdauer und Amplitudenabnahme freier Schwingungen**

Für die beiden in Aufgabe 3 gewählten Ströme wird jeweils die Schwingungsdauer  $T_f$  gemessen und die zeitliche Abnahme der Amplitude registriert. Das Abklingen der Amplitude messen Sie so, dass Sie zur Zeit  $t = 0$  das Drehpendel in einem Umkehrpunkt loslassen und dann nach jeder vollen Periode die Amplitude ablesen. Falls Sie alleine arbeiten und es Ihnen nicht gelingen sollte, die Amplitudenwerte in rascher Folge zu Papier zu bringen, bitten Sie einen Kollegen um Hilfe. Für jede Dämpfung die Messung einmal wiederholen.

**Aufgabe 5: Bestimmung der Schwingungsdauer und Amplitudenabnahme erzwungener Schwingungen**

Das Drehpendel wird von einem Schrittmotor angeregt, der es erlaubt, die Frequenz der Erregung des Pendels direkt zu bestimmen. Der eingebaute Schrittmotor macht pro elektrischem Impuls eine Drehung um  $0,72^\circ$ , d.h. nach 500 Schritten eine Umdrehung. Durch die Ansteuerelektronik, die das Prinzip der

<sup>2</sup>Es ist günstig, mit dem jeweils eingestellten Strom die Messungen 4. und 5. hintereinander durchzuführen.

Microsteps verwendet, entsprechen 4000 Hz 1 Hz an der Welle des Drehpendels. Die Frequenz der Pendelerregung wird also durch die Frequenz bestimmt, mit der der Motor angesteuert wird. Diese kann an dem Frequenzgenerator eingestellt und abgelesen werden. Der Motor wird durch Ein- und Ausschalten dieses Generators gesteuert. Achtung: Der Einfachheit halber tragen Sie die folgenden Messwerte über der Frequenz des Generators auf und rechnen erst am Schluss bei der Bestimmung von  $\delta$  und  $\omega'$  den Faktor 4000 ein. Stellen Sie den Generator in den Bereich „1 k“ (Tasten); messen Sie dann für die beiden in Aufgabe 3 ausgewählten Ströme (=Dämpfungen) die stationäre Amplitude des Drehpendels als Funktion der Frequenz im Bereich von ca. 300 Hz bis 4000 Hz (=maximal erreichbare Frequenz im „1 k“-Bereich). Hierzu messen sie zunächst in ca. 200 Hz Schritten, danach  $\pm 150$  Hz um die Stelle der Resonanz in 50 Hz Schritten. Bei jedem Messpunkt müssen Sie die in Aufgabe 3 bestimmte Einschwingzeit abwarten, bis eine stationäre Amplitude erreicht ist. Unter Umständen ist es zweckmäßig in der Nähe der Resonanzspitze und an den Flanken im Bereich von  $0,7 b_{max}$  noch je einen weiteren Punkt zu messen. Beobachten Sie die Phasen von Erreger und Pendel, insbesondere bei tiefen, bei hohen Frequenzen und in der Nähe der Resonanzspitze.

## VII Auswertung

**zu Aufgabe 2:** Bestimmen Sie  $T_0$  mit Fehler.

**zu Aufgabe 4:** Die Amplitude der gedämpften Schwingungen (für beide Ströme) ist in logarithmischem Massstab als Funktion der Zahl der Schwingungen aufzutragen. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Dämpfungskonstanten  $\delta$ .

**zu Aufgabe 5:** Die Amplitude der stationären Schwingung (für beiden Dämpfungen) ist über der Generatorfrequenz aufzutragen. Bestimmen Sie jeweils die Lage des Maximums der Resonanzkurve und vergleichen Sie die daraus berechnete Frequenz ( $1/4000$ ) des Pendels mit dessen Eigenfrequenz. Sowohl aus der Halbwertsbreite wie aus der Resonanzüberhöhung ist abermals die Dämpfungskonstante zu bestimmen. Prüfen Sie, ob jeweils die drei nach verschiedenen Verfahren gewonnenen Ergebnisse für  $\delta$  innerhalb ihrer Fehler übereinstimmen.

## Versuch 14 Mathematisches Pendel

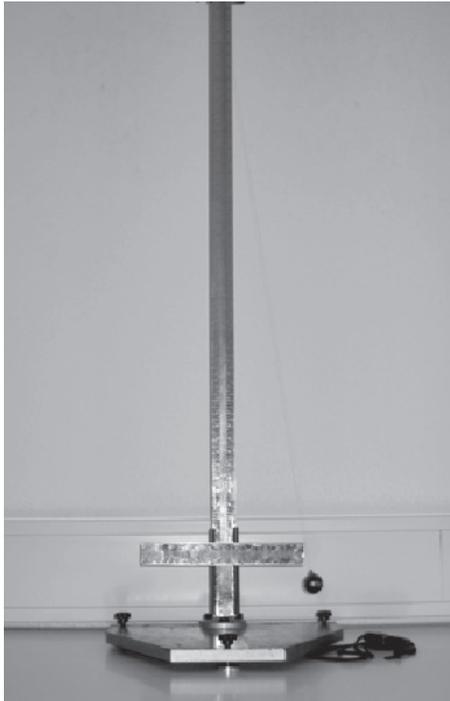


Abbildung 1: Übersicht des Versuchs Mathematisches Pendel.

### I Messaufbau

- Mathematisches Pendel mit 2 Spiegelskalen
- Stoppuhr
- Messschieber
- Lichtschranke mit Zähler

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Harmonische Schwingung, Schwerependel, Drehpendel.

**Verständnisfragen:**

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel auf. An welcher Stelle verwendet man bei genauer Betrachtungsweise die schwere Masse, wann die träge Masse der schwingenden Kugel?
2. In der einfachsten Betrachtungsweise wird die Bewegung des Pendels als lineare Bewegung beschrieben. Wie sieht die Bewegungsgleichung aus, wenn man in einer exakten Theorie die Bewegung als Drehbewegung um den Aufhängepunkt beschreibt?
3. Warum macht es keinen Sinn, zur genauen Bestimmung von  $g$  die Messzeit, also die Zahl der Schwingungen, möglichst groß zu wählen?

### IV Aufgaben

- Es sind Länge und Schwingungsdauer des Pendels möglichst genau zu messen und hieraus die Schwerebeschleunigung zu berechnen. (Heidelberger Standard-Wert:  $g = (9,80984 \pm 2 \times 10^{-5}) \text{ m/sec}^2$ .)
- Zusätzlich soll die Schwerebeschleunigung unter Berücksichtigung von Korrekturen (Auftrieb, Reibung,...) bestimmt werden.

## V Grundlagen

Eine exakte Theorie erfordert die Behandlung des Schwerependels als Drehpendel mit dem Aufhängepunkt als Schwingungsmittelpunkt. Die Schwingungsdauer einer Drehschwingung ist durch die Formel

$$T_D = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad (1)$$

gegeben, wobei  $J$  das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse und  $D$  die Winkelrichtgröße des Pendels (siehe Versuch 12 Trägheitsmoment) darstellen. Das Gesamtträgheitsmoment des Pendels ergibt sich nach dem Steiner'schen Satz als die Summe der einzelnen Trägheitsmomente von Kugel und Faden bezüglich der Drehachse durch P:

$$J_{ges} = J_{Kugel} + J_{Faden} = m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K r^2 + \frac{1}{3} m_F l'^2 \quad (2)$$

Hier bezeichnen  $m_K$  die Masse der Kugel,  $m_F$  die Masse des Fadens,  $l, l'$  Pendellänge und Fadlänge und  $r$  der Kugelradius. Weiterhin ist die Winkelrichtgröße  $D$  zu berechnen. Bildet das Pendel den Winkel  $\varphi$  mit der Ruhelage (Abbildung 2), so erzeugen die Gewichte von Kugel und Faden ein rücktreibendes Drehmoment, wobei das Gewicht der Kugel um den Auftrieb in Luft (Dichte  $\rho_L$ , Volumen  $V_K$ ) vermindert ist. (Der Auftrieb des Fadens kann vernachlässigt werden.)

Für das Drehmoment gilt:

$$M = -[(m_K - \rho_L V_K)g \sin \varphi l + 1/2 m_F g \sin \varphi l'] \quad (3)$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass der Winkel nach rechts gezählt wird, die Kräfte jedoch nach links wirken. Setzt man  $\sin \varphi \approx \varphi$ , so ergibt sich mit  $m_K = \rho_K V_K$

$$M = -\left[ m_K \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} \right) + \frac{1}{2} m_F \right] g l \varphi \quad (4)$$

Ein Vergleich mit der Definitionsgleichung für  $D$

$$M = -D\varphi \quad (5)$$

ergibt:

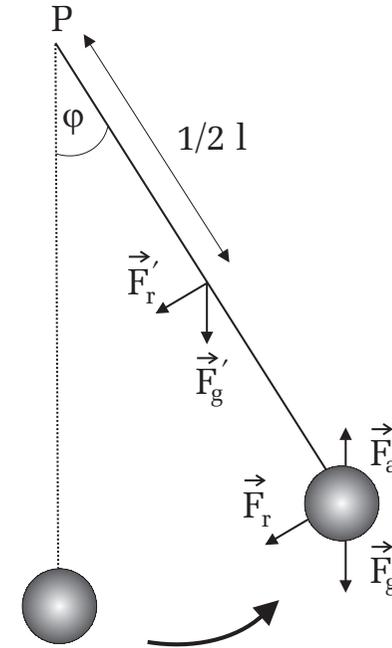


Abbildung 2: Kräfte die an das Pendel angreifen: Reibungskraft  $\vec{F}_R$ , Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ , Auftrieb  $\vec{F}_a$ . Die gestrichelten Größen beziehen sich auf den Faden.

$$D = m_K g l \left[ 1 - \left( \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{2} \frac{m_F}{m_K} \right) \right] \quad (6)$$

Dieser Ausdruck ist in der Formel für  $T_D$  einzusetzen und der Bruch  $J/D$  unter Benutzung der Näherungsformel  $1/(1 - \epsilon) \approx 1 + \epsilon$  für  $\epsilon \ll 1$  auszuwerten. Dies führt zu einer ersten Näherung:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} \right), \quad (7)$$

wobei Produkte der Form  $(\rho_L/\rho_K)(r^2/l^2)$ ,  $(m_F/m_K)(r^2/l^2)$  etc., als Größen klein in 2. Ordnung, vernachlässigt werden.

Als weitere Korrektur ist die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Winkelausschlag  $\varphi_0$  zu beachten. Dies führt zu:

$$T_2^2 = T_1^2 \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{8} \right) \quad (8)$$

Die Herleitung dieser Gleichung können Sie im Anhang nachlesen. Weiter ist der Einfluss der Dämpfung  $\delta$  (Luftreibung) auf die Schwingungsdauer zu berücksichtigen:

$$\omega_3^2 = \omega_2^2 - \delta^2 = \omega_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{\delta^2}{\omega_2^2} \right) \right] \quad (9)$$

beziehungsweise

$$T_3^2 = T_2^2 \left[ 1 + \left( \frac{\delta^2}{\omega_2^2} \right) \right] \quad (10)$$

Berücksichtigt man zusätzlich diese beiden Korrekturen so führt dies auf:

$$T_g^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8} \right), \quad (11)$$

wobei  $T_g$  die gemessene Periodendauer darstellt. Die rechts stehenden Größen, mit Ausnahme der Dämpfung  $\delta$  werden durch Rechnung bestimmt ( $\rho_{\text{Luft}} = 1,20 \text{ g/dm}^3$  bei  $20^\circ\text{C}$ , 760 Torr). Die Massen  $m_F$  und  $m_K$  ergeben sich aus der Dichte von Eisen ( $\rho_{\text{Eisen}} = 7,86 \text{ g/cm}^3$ ) und den jeweiligen Volumina. Den Kugeldurchmesser können Sie mit dem Messschieber bestimmen; der Fadendurchmesser beträgt  $\varnothing_{\text{Faden}} = 0,2 \text{ mm}$ . Der Winkel wird aus der (mittleren) Schwingungsbreite und der Pendellänge berechnet. Die Dämpfung ist durch die Messung der zeitlichen Abnahme der Schwingungsamplitude  $a$  nach

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \quad (12)$$

zu bestimmen.

Die Genauigkeit des Ergebnisses ist in erster Linie durch die Genauigkeit der Längenmessung gegeben. Die Messung der Schwingungsdauer  $T_0$  kann beliebig genau durchgeführt werden, vorausgesetzt, dass die Uhr richtig geht. (Sehr genaue Zeitmessungen sind jedoch relativ leicht möglich.) Da nämlich  $n$  Schwingungsdauern gezählt werden, wobei  $n$  beliebig groß gemacht werden kann, erhält man eine Zeit  $t = nT_0$  mit der Stoppgenauigkeit  $\Delta t$ , welche natürlich nicht von der Zahl der gemessenen Schwingungen abhängt. Dann ergibt die einfache Fehlerrechnung mit  $T_0 = t/n$  für den relativen Fehler der Schwingungsdauer:

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta t}{nT_0}. \quad (13)$$

Der Fehler wird also für genügend großes  $n$  beliebig klein. Der Gesamtfehler der aus der Formel

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{und somit} \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \quad l: \text{ Pendellänge} \quad (14)$$

zu ermittelnden Schwerebeschleunigung  $g$ , ist gegeben durch:

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2 + \left( \frac{2\Delta t}{nT_0} \right)^2} \quad (15)$$

Man sieht, dass der Fehler der Längenmessung eine untere Grenze für den Gesamtfehler darstellt und es nicht sinnvoll ist, die Genauigkeit der Zeitmessung wesentlich weiter zu treiben als die beschränkte Genauigkeit der Längenmessung. Man wird z.B. fordern:

$$\frac{2\Delta t}{nT_0} \approx 0,3 \frac{\Delta l}{l}. \quad (16)$$

Dann ist wegen der quadratischen Addition der Fehler (15) die Genauigkeit praktisch nur durch den Fehler der Längenmessung bestimmt und wir erhalten eine Bedingungsgleichung für die Zahl  $n$ , die aus (16) bestimmt werden kann, wenn man die übrigen Größen gemessen hat.

## VI Durchführung des Versuchs

**Aufgabe 1: Bestimmung der Pendellänge** Bestimmen Sie zunächst die Länge des Pendels (Abstand Aufhängung bis Mitte Kugel). Hierbei ist auf sorgfältige Justierung der Spiegelskala parallel zum Faden des Pendels zu achten. Wiederholen Sie die Justierung dreimal, wobei auch die Aufhängung in vertikaler Richtung verschoben werden soll. Eine Ablesung von jeweils jedem der Partner genügt.

Für die Längenmessung nehmen Sie die Spitze der oberen Aufhängung aus der kleinen Vertiefung und setzen Sie sie auf die plane Fläche der Aufhängung (Abbildung 3). Notieren Sie die Koordinate der oberen Kante der Auflagefläche. An der Kugel sind die Koordinaten des oberen und des unteren Randes abzulesen.

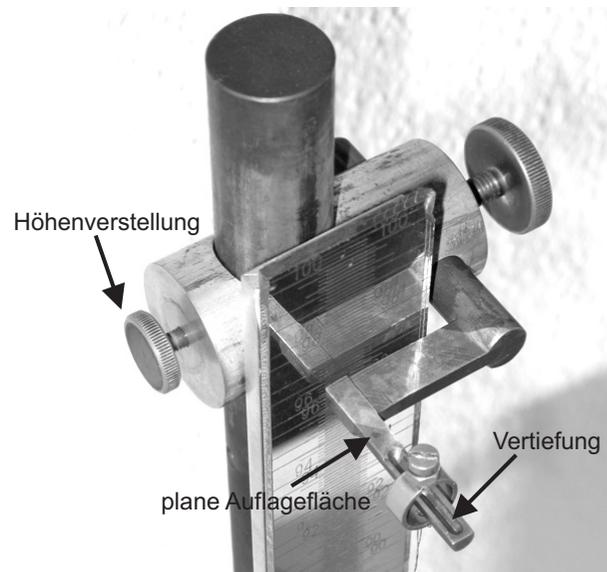


Abbildung 3: Pendelaufhängung.

Es wird zunächst, wie in dem vorangehenden Abschnitt geschildert, grob die Schwingungsdauer  $T_0$  ermittelt und die beschriebene Abschätzung für  $n$  durchgeführt. Hiernach ist die Zeit für  $n$  Schwingungen zu messen.

Das Abzählen von mehreren Hundert Schwingungen wird durch den Einsatz einer Reflexlichtschranke erleichtert. Positionieren Sie dazu den Reflexsensor genau unter der Gleichgewichtsposition der Kugel und überprüfen Sie, ob beim Durchschwingen der Kugel der Zähler anspricht. Ist dies nicht der Fall, so ist der Abstand der Kugel vom Reflexsensor zu groß. Sie müssen dann die Pendelaufhängung ein wenig nach unten bewegen (Abbildung 3). Den Zählerstand können Sie mit Hilfe des Reset-Schalter auf Null zurücksetzen.

**Achtung:** Der Zählerstand wird immer beim Durchschwingen der Kugel durch die Gleichgewichtsposition erhöht. Der Zähler zeigt daher die Anzahl der gemessenen **halben Periodendauern** an. Beachten Sie auch den Startvorgang der Zeitmessung. Falls Sie die Zeitmessung genau dann starten, wenn die Kugel durch die Gleichgewichtsposition läuft, startet der Zähler nicht bei Null, sondern bereits bei Eins.

Es wird daher zunächst die Länge des Pendels gemessen und deren relativer Fehler bestimmt.  $T_0$  und  $\Delta t$  werden aus einer vorläufigen Messung von 20 Schwingungsdauern ermittelt, die fünfmal durchgeführt wird. Der mittlere Fehler der Einzelmessung  $\sigma_E$  für zwanzig Schwingungen wird ermittelt und als Stoppgenauigkeit  $\Delta t$  genommen. Zusammen mit dem so bestimmten Mittelwert von  $T_0$  kann  $n$  aus obiger Gleichung (16) ermittelt werden. Bitte prüfen Sie, ob Ihre 5 Werte für 20 Schwingungen unzulässig stark schwanken; dies wäre ein Zeichen dafür, dass Sie sich bei einer Messung verzählt haben. Der errechnete Wert wird auf das nächste volle Hundert aufgerundet. Falls Ihre Längenmessung schon genauer als ein halbes Promille ist, bestimmen Sie  $n$  so, dass der Zeitfehler von derselben Größenordnung wird, insgesamt also das Ergebnis einen Fehler von etwa 1 Promille aufweist.

Notieren Sie sich für die nächste Aufgabe die mittlere Schwingungsweite (ggf. gleich in Abhängigkeit von der Zeit für die Bestimmung der Dämpfung  $\delta$ ).

2. Hierzu ist die kleine Spiegelskala in Richtung des Ausschlags zu montieren. Beobachten Sie den Ausschlag am Faden direkt über der Kugel und notieren Sie die Amplitude für verschiedene Zeiten  $t$ .

## VII Auswertung

1. Berechnen Sie die Erdbeschleunigung aus der gemessenen Periodendauer und der Pendellänge. Diskutieren Sie die Fehlerquellen und deren Einfluss auf das Endergebnis.

2. Tragen Sie  $a(t)$  graphisch auf eindekadisches Logarithmenpapier auf und ermitteln Sie aus der Steigung (siehe auch Versuch 13 Resonanz) die Dämpfung  $\delta$ , deren Einfluss auf die Schwingungsdauer nach obenstehender Formel zu ermitteln ist. Berechnen Sie die Erdbeschleunigung unter Berücksichtigung der Korrekturterme.

Hinweis zur Rechengenauigkeit: Der Quotient  $4\pi^2 l/T^2$  ist sehr genau auszurechnen, dagegen genügen für die Korrekturglieder in einigen Fällen (welchen?) sogar Abschätzungen. Machen Sie sich das klar, bevor Sie einen der Korrekturterme ausrechnen.

### VIII Anhang

Für die Bestimmung der Korrektur der Schwingungszeit auf endliche Winkel  $\varphi_0$  geht man z.B. vom Energiesatz aus.  $E = E_{kin} + E_{pot}$  wobei  $E_{kin}$  die kinetische und  $E_{pot}$  die potentielle Energie der Schwingung ist:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + (1 - \cos \varphi) lmg = (1 - \cos \varphi_0) lmg \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \tag{18}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt \tag{19}$$

Falls der Zeitnullpunkt so gewählt wird, dass für  $t = 0$  gerade  $\varphi = 0$  ist, dann ist bei  $\varphi = \varphi_0$ ,  $t = T/4$ . Integration von (19) über die Zeit (eine viertel Schwingungsperiode, bis das Pendel im höchsten Punkt ist und den Winkel  $\varphi_0$  aufspannt) ergibt:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{2g}{l}}. \tag{20}$$

Um das links stehende Integral auszuwerten, substituieren wir

$$u = \arcsin\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)}\right) \tag{21}$$

und berechnen  $du/d\varphi$ :

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\varphi/2)}{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \tag{22}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2}{1 - \sin^2(\varphi/2)}} du. \tag{23}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (20) ein, so erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)}} = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{24}$$

wobei sich die neuen Integrationsgrenzen aus (21) ergeben. Definieren wir noch

$$k^2 = \sin^2(\varphi_0/2), \tag{25}$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung von (21) schließlich:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = F(k, \pi/2) = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{26}$$

Das Integral heißt vollständiges elliptisches Integral erster Gattung<sup>1</sup>.

Für kleine Werte von  $k^2$  kann man eine Reihenentwicklung durchführen, indem man die Wurzel unter dem Integral entwickelt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 u + \frac{3}{8}(k^2 \sin^2 u)^2 + \dots \tag{27}$$

Mit den Beziehungen

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u) \tag{28}$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u), \tag{29}$$

lässt sich Gleichung (27) leicht integrieren:

$$F(k, \pi/2) = \pi/2 \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \tag{30}$$

Setzt man nun  $k^2 = \sin^2 \varphi_0/2 \approx (\varphi_0/2)^2$  und bricht nach dem quadratischen Term in  $k$  ab, so ergibt sich:

<sup>1</sup>Tabellen des elliptischen Integrals finden Sie z.B. in Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen; Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik; Kurt Uhde: Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik (Tafeln II); U. Abramowitz, I. Stegun (ed.): Handbook of Mathematical Functions.

$$F(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right). \quad (31)$$

Schließlich kann nun die Periodendauer  $T$  mit Hilfe Gleichung (20) angegeben werden:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} F(k, \pi/2) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right), \quad (32)$$

und somit

$$T^2 = T_0^2 \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{8} \right), \quad (33)$$

wobei  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$  gesetzt wurde und der Term mit  $\varphi^4$  vernachlässigt wurde.

Für  $\varphi = \pi/2$  (also  $90^\circ$ !) ergibt die Korrektur  $T = 1,144 T_0$ , d.h. selbst in diesem Extremfall ist die Schwingungszeit nur um ca. 14% verlängert. Für  $\varphi = \pi/15$  ( $12^\circ$ ) gilt für die korrigierte Periodendauer  $T = 1,002738 T_0$  also nur noch eine Abweichung von  $3 \times 10^{-3}$ .

## Versuch 15 Schiefe Ebene



Abbildung 1: *Aufbau des Versuchs schiefe Ebene.*

### I Messaufbau

- höhenverstellbare Rollbahn
- Lichtschranken mit Steuergerät
- Wasserwaage
- Lineal
- Rollkörper
  - Vollzylinder (Aluminium,  $\rho = 2,70 \text{ g/cm}^3$ )
  - Hohlzylinder (Messing,  $\rho = 8,44 \text{ g/cm}^3$ )
  - Verbundzylinder: Mantel aus Aluminium, Kern aus Messing.
- Schieblehre
- Waage

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>.

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Gewichtskraft, Gleitreibung, Rollreibung, Drehmoment, Drehimpuls, Trägheitsmoment, Impuls, Impulserhaltung, mechanische Energieformen, Energieerhaltung. **Verständnisfragen:**

1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment für folgende Körper, die um ihre Symmetrieachse rotieren.
  - Vollzylinder
  - Hohlzylinder

Führen Sie die Rechnung durch Integration aus der allgemeinen Definition des Trägheitsmoments durch.

2. Ein „reibungsfreier“ Quader, ein Vollzylinder, ein Hohlzylinder und eine Vollkugel mit jeweils gleichen Radien, gleiten bzw. rollen eine geneigte Ebene hinunter. Vergleichen Sie die Bewegungen miteinander. Welcher Körper kommt als erstes „unten“ an?
3. Ein „reibungsbefahreter“ Quader soll durch Oberflächenbehandlung so getrimmt werden, dass seine Beschleunigung an einem um  $10^\circ$  gegen die Horizontale geneigten Hang genauso groß ist wie die eines Vollzylinders. Auf welchen Wert müsste man die Gleitreibungszahl dann einstellen? (Tipp: neben der Hangabtriebskraft wirkt auf den Quader die Gleitreibungskraft.)

## IV Aufgaben

- Bestimmung der Beschleunigung auf einer schiefen Ebene für zwei Rollkörper.
- Untersuchungen zum Energieerhaltungssatz.

## V Grundlagen

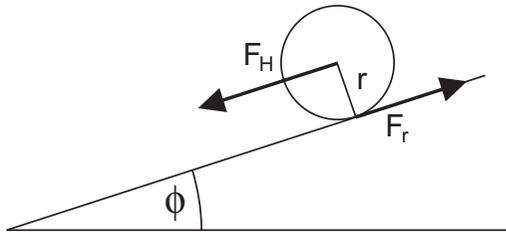


Abbildung 2: Zur Herleitung der Beschleunigung auf der schiefen Ebene.

Die Reibungskraft  $F_r$  (Haftreibungskraft) eines Rollkörpers am „Hang“ bewirkt am Radius  $r$  das Drehmoment

$$M = F_R \cdot r = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (1)$$

Dabei ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit und  $I$  das Trägheitsmoment des rollenden Körpers. Mit der Rollbedingung  $v_s = r\omega$ , wobei der Index „s“ auf den Schwerpunkt verweist, lässt sich diese Gleichung wie folgt umformen:

$$M = F_R \cdot r = \frac{I}{r} \frac{dv_s}{dt} = \frac{I_s}{r} \cdot a_s \quad (2)$$

und somit

$$F_R = \frac{I}{r^2} \cdot a_s. \quad (3)$$

Auf den Schwerpunkt des rollenden Körpers wirken Hangabtriebskraft  $F_H$  und Reibungskraft in entgegengesetzte Richtung:

$$ma_s = mg \sin \varphi - F_R \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) erlauben die Eliminierung der Reibungskraft:

$$ma_s = mg \sin \varphi - \frac{I}{r^2} \cdot a_s \quad (5)$$

und man erhält für die Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$a_s = \frac{mg \sin \varphi}{m + \frac{I}{r^2}}. \quad (6)$$

## VI Durchführung des Versuchs

Machen Sie sich zunächst mit der Zeit-Messtechnik vertraut. Die Lichtschranken und der Zähler sind bereits fertig verkabelt. Schließen Sie den am Startmechanismus angebrachten Schalter an den Starteingang der Uhr an. Die Stopp-Eingänge der Uhr werden durch die vier Lichtschranken geschaltet. Die Lichtschranken bestehen jeweils aus einem Sender (Infrarot-Leuchtdiode) und einem Empfänger (Infrarot-Photodiode), die beide jeweils an einen gemeinsamen Kanal der Lichtschrankenbox anzuschließen sind. Der Ausgang jedes Kanals wird dann mit dem entsprechenden Stopp-Eingang der Uhr verbunden. Die Leuchtdioden an der Lichtschrankenbox zeigen jeweils an, ob die Lichtschranken „scharf“ sind, das heißt, ob die Photodiode hinreichend von der gegenüber platzierten Leuchtdiode angestrahlt wird.

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Vermessung der schiefen Ebene und der Probekörper

Für die folgenden Untersuchungen an der geneigten Ebene müssen die Versuchskörper (Voll- und Hohlzylinder) genau vermessen werden. Verwenden sie zur Bestimmung des Durchmessers einen Messschieber.

Überprüfen Sie mit der Wasserwaage ob die geneigte Ebene über die gesamte Breite die gleiche Neigung aufweist. Falls dies nicht der Fall ist, müssen Sie die Ebene nachjustieren, indem Sie die Höhe einer der „Füße“ nachstellen. Die Platte ist sehr schwer. Führen Sie dies daher am besten zu zweit durch. Einer stützt die Platte, der andere löst die beiden seitlichen Schrauben und variiert die Länge der Stahlstange.

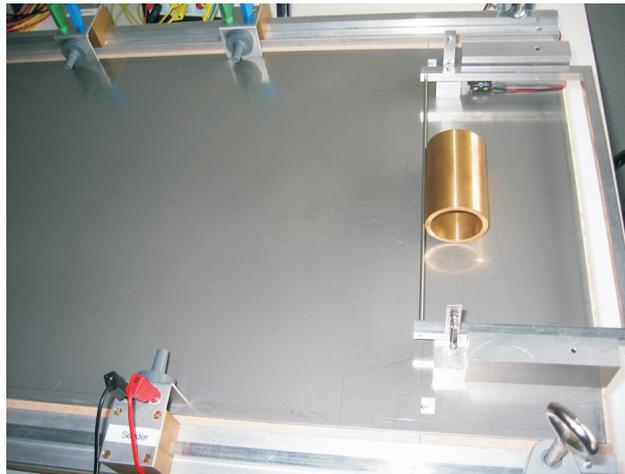
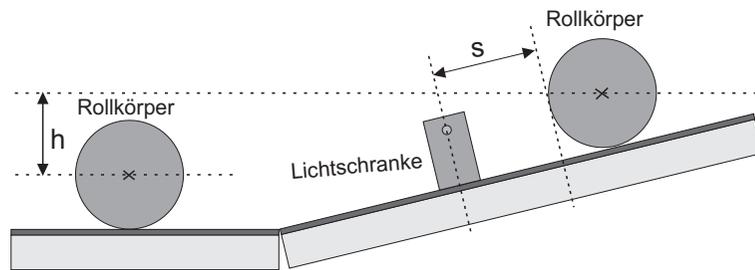


Abbildung 3: Skizze des Versuchsaufbaus.

Überlegen Sie sich genau, welche Länge und Höhe Sie messen müssen, um den Neigungswinkel der Ebene ausrechnen zu können (Abbildung (3)).

### Aufgabe 3: Untersuchung der Bewegungsart für das Rollen an der geneigten Ebene

Überprüfen Sie zunächst, ob sich für das Rollen an der geneigten Ebene gleichmäßig beschleunigte Bewegungen ergeben. Hierzu sollten Sie die Lichtschranken **in sinnvollen Abständen** auf der schiefen Ebene positionieren ( $t \propto \sqrt{s}$ ).

Untersuchen Sie qualitativ die Beschleunigungen der Rollkörper. Alle drei Zylinder passen gemeinsam nebeneinander in den Startmechanismus. Erläutern

sie ohne Rechnung, warum die verschiedenen Probekörper unterschiedlich lange brauchen um unten anzukommen.

Verwenden Sie für die folgenden Messungen nur den Voll- und Hohlzylinder und eine beliebige Neigung der Ebene. Die Abstände vom Rollkörper bis zu den einzelnen Lichtschranken, müssen vom Mittelpunkt der Lichteintrittsöffnungen an den Lichtschranken bis zum Anlagepunkt des Rollkörpers am Startmechanismus gemessen werden. Die Anlagelinie des Rollkörpers am Startmechanismus ist auf der Edelstahlfläche seitlich neben dem Startmechanismus markiert.

### Aufgabe 4: Genaue quantitative Untersuchung der Beschleunigung

Bestimmen Sie für zwei Probekörper (Voll- und Hohlzylinder) die Beschleunigung. Messen Sie die Abstände  $s$  der Lichtschranken vom Startmechanismus (siehe Abbildung 3). Stoppen Sie jeweils 5-mal die Zeiten, die die Rollkörper benötigen, um die einzelnen Lichtschranken zu passieren.

### Aufgabe 5: Untersuchungen zum Energieerhaltungssatz

Die zu Beginn vorhandene potentielle Energie der Rollkörper wird im Verlauf der Beschleunigung in kinetische Energie umgewandelt. Die kinetische Energie lässt sich in einen Rotations- und einen Translationsanteil zerlegen, so dass sich die Gesamtenergie durch folgende Gleichung ergibt:

$$W_{ges} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh, \quad (7)$$

wobei  $v$  die Translationsgeschwindigkeit,  $I$  das Trägheitsmoment und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Rollkörpers darstellen. In diesem Versuchsteil soll am Fuß der geneigten Ebene auf einem horizontalen Teilstück die Translationsgeschwindigkeit der verschiedenen Rollkörper mit Hilfe von zwei Lichtschranken bestimmt werden. Führen Sie die Messungen jeweils 5-mal durch. Die daraus ermittelte kinetische Gesamtenergie wird mit der anfangs vorhandenen potentiellen Energie verglichen. Um die potentielle Energie zu berechnen benötigen Sie die Höhendifferenz zwischen Start- und Endposition der Rollkörper.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 4:** Tragen Sie in einem Diagramm die Strecken  $s$  über  $t^2$  auf und berechnen Sie aus der Steigung die Beschleunigung. Vergleichen Sie diese mit dem Wert, der sich aus der Masse und der Geometrie des Rollkörpers sowie aus dem Neigungswinkel der schiefen Ebene ergibt.

**Zu Aufgabe 5:** Berechnen Sie die kinetische Energie (Translation- und Rotationsenergie) und vergleichen Sie diese mit der potentiellen Energie. Sind die Ergebnisse innerhalb der statistischen Messfehler verträglich? Welche systematischen Fehler könnte es geben?

## Versuch 21 Elektrolyse



Abbildung 1: Übersicht des Versuchs Elektrolyse.

### I Messaufbau

- Elektrolytgefäß mit Kupfersulfatlösung
- Zwei Kupferplatten
- Schiebewiderstand
- Tischstoppuhr

- Analysewaage
- Fön
- Netzgerät mit Strom- und Spannungsanzeige
- Wasserzersetzungsgeschloß (nach Hoffmann) mit stark verdünnter Schwefelsäure

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Faraday-Konstante, Elektrolyse, Äquivalentmasse, elektrische Elementarladung, Gasgesetze. **Verständnisfragen:**

1. Was ist ein Elektrolyt? Was sind typische Beispiele?
2. Was ist ein Anion bzw. ein Kation?
3. Was ist die Faraday-Konstante?
4. Wie lässt sich mit einer Massenmessung die Faraday-Konstante berechnen?
5. Wie lässt sich mit einer Volumenmessung die Faraday-Konstante berechnen?
6. Welche Reaktionen laufen bei den beiden Teilaufgaben ab?
7. Was muss hinsichtlich der gemessenen Drücke in den Schenkeln des Hoffmann'schen Wasserzersetzungsgeschloßes bei der Wasserzersetzung beachtet werden?
8. Erläutern Sie die Wirkungsweise einer Brennstoffzelle.

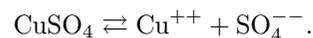
## IV Aufgaben

- Die Faraday-Konstante ist aus der Abscheidung von Kupfer bei der Elektrolyse von  $\text{CuSO}_4$  zu bestimmen.
- Die Faraday-Konstante ist aus der elektrolytischen Zersetzung von Wasser zu bestimmen.
- Beobachten Sie qualitativ die Umkehrung der Elektrolyse mit Hilfe einer Brennstoffzelle.

## V Grundlagen

Lösungen von Säuren, Hydroxiden und Salzen und deren Schmelzen leiten den elektrischen Strom. Im Gegensatz zu den metallischen Leitern erfolgt der Ladungstransport aber nicht durch freie Elektronen sondern durch Ionen. Ionen entstehen aus neutralen Atomen oder Molekülen durch Abgabe oder Aufnahme von Elektronen an bzw. von anderen Atomen/Molekülen oder durch Dissoziation. Im elektrischen Feld werden positiv geladene Ionen (Kationen) zur Kathode beschleunigt, negative Ionen (Anionen) zur Anode. Flüssigkeiten deren Leitfähigkeit auf der Ionenleitung basiert, werden als Elektrolyte bezeichnet. Befindet sich ein Elektrolyt im Feld zweier Elektroden, so tritt bei Stromfluss in der Regel eine Zersetzung des Elektrolytes auf. Man bezeichnet diesen Vorgang als Elektrolyse.

Im ersten Versuchsteil werden Sie Kupfersulfat ( $\text{CuSO}_4$ ) mit zwei Kupferelektroden elektrolysieren. Kupfersulfat dissoziiert in Wasser gemäß



Legt man nun an die Kupferelektroden eine elektrische Spannung an, so wandern die  $\text{Cu}^{++}$  Ionen zur Kathode, an der Sie durch Aufnahme zweier Elektronen zu Kupfer reduziert werden und sich an dieser niederschlagen. Die Sulfationen  $\text{SO}_4^{--}$  wandern zur Anode und geben dort ihre zwei Überschusselektronen ab. Gleichzeitig findet hier noch eine Sekundärreaktion statt: Kupfer wird von der Anode abgelöst. Die Gesamtmenge an gelöstem Kupfersulfat ändert sich also nicht. Effektiv wandert nur Kupfer von der Anode zur Kathode. Die Kathode wird um einen Teil schwerer, während die Anode um denselben Teil an Masse verliert.

Die bei der Elektrolyse an der Kathode abgeschiedene Masse  $m$  lässt sich aus dem ersten Faraday'schen Gesetz bestimmen:

$$m = nM_{Mol} = \frac{Q}{zF}M_{Mol}, \quad (1)$$

wobei  $Q$  die zwischen den Elektroden transportierte Ladung,  $M_{Mol}$  die Molmasse von Kupfer,  $z$  die Wertigkeit der transportierten Ionen und  $n$  die an der Kathode abgeschiedene Stoffmenge bezeichnen.

Die Konstante  $F$  ist die Faraday-Konstante:

$$F = eN_A = (9,648455 \pm 0,000027) 10^4 \text{C mol}^{-1}; \quad (2)$$

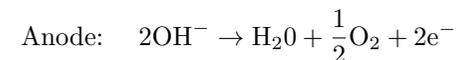
Sie entspricht der Ladungsmenge, die durch einen Elektrolyten fließt, wenn sich  $1/z$  Mol eines  $z$ -wertigen Stoffes an der Elektrode absetzt.

Die während des Versuchs transportierte Ladungsmenge  $Q$  lässt sich aus der Stromstärke  $I$  und der Versuchsdauer  $t$  mit Hilfe der Gleichung

$$Q = It \quad (3)$$

berechnen. Durch Wägung der Elektroden vor und nach der Elektrolyse kann so die Faraday-Konstante bestimmt werden.

Im zweiten Teil des Versuchs wird die Faraday-Konstante durch die elektrolytische Zersetzung von Wasser bestimmt. Der dabei eingesetzte Wasserzersetzungsgang nach Hoffmann besteht aus zwei Schenkeln mit jeweils einer Platinelektrode und einem verschiebbaren Vorratsgefäß mit stark verdünnter Schwefelsäure. Da reines Wasser ein sehr schlechter Elektrolyt ist, wurde die Leitfähigkeit durch Zugabe von Schwefelsäure erhöht. Bei Verwendung von Platin-Elektroden spielen sich an den Elektroden folgende Vorgänge ab:



An der Kathode bildet sich Wasserstoff und an der Anode Sauerstoff. Die genauen Vorgänge an den Elektroden sind im Einzelnen viel komplizierter und

<sup>1</sup>Quelle: Horst Hänsel, Werner Neumann, *Physik, Elektrizität- Optik- Raum und Zeit*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 1993

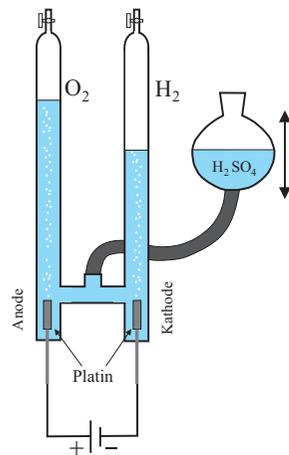


Abbildung 2: Wasserzersetzungsgararat nach Hoffmann.

sollen an dieser Stelle nicht diskutiert werden. Im Endeffekt wird aber bei diesem Prozess nur Wasser zersetzt.

Zur Berechnung der Faraday-Konstante nach Gleichung (1) muss die Stoffmenge aus den abgeschiedenen Volumen  $V$  des Wasserstoffs bzw. Sauerstoffs bestimmt werden:

$$n = \frac{Q}{zF} \quad (4)$$

mit

$$n = \frac{V}{V_{Mol}}. \quad (5)$$

Das Molvolumen können Sie aus dem idealen Gasgesetz ableiten. Unter Normalbedingungen ( $T_0=273,15$  K,  $p_0=1013,25$  mbar  $\equiv$  760 Torr) beträgt das Molvolumen eines idealen Gases  $V_{Mol}^0=22,414$  l/mol. Bei der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  gilt dann

$$V_{Mol} = \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} V_{Mol}^0. \quad (6)$$

Der Druck  $p$  setzt sich aus drei Teildrücken zusammen: äußerer Luftdruck  $p_L$ , hydrostatischer Druck  $p_H$  und dem Dampfdruck  $p_D$  der verdünnten Schwefelsäure. Wenn die Flüssigkeitsspiegel im Messrohr und im Ausgleichsgefäß auf gleicher Höhe sind, verschwindet der hydrostatische Druck und der Druck im Messrohr entspricht dem äußeren Luftdruck (Abbildung 2). In die Berechnung des Molvolumens darf aber nur der Partialdruck von Wasserstoff bzw. Sauerstoff eingehen. Wir müssen daher noch den Dampfdruck der verdünnten Schwefelsäure abziehen.

$$p = p_L - p_D^{H_2SO_4}, \quad (7)$$

$$p = p_L - 0,9p_D^{H_2O}. \quad (8)$$

Für den Sättigungsdampfdruck des Elektrolyten sind 90 % des Sättigungsdampfdruckes des reinen Wassers einzusetzen (das entspricht ca. 3 % Schwefelsäure). Die Werte für Wasser finden Sie im Anhang.

## V.1 Funktionsprinzip einer Brennstoffzelle

Das Funktionsprinzip einer Brennstoffzelle ist der umgekehrte Vorgang der Elektrolyse. Während bei der Elektrolyse Wasser in seine Bestandteile Sauerstoff und Wasserstoff unter Energiezufuhr zerlegt wird, wird in der Brennstoffzelle Wasserstoff in einem elektrochemischen Prozess mit Sauerstoff unter Abgabe von Energie zu dem Endprodukt Wasser „verbrannt“. Die Reaktion von Wasserstoff und Sauerstoff ist Ihnen bereits von der Knallgasreaktion bekannt. Werden zwei Teile  $H_2$  und ein Teil  $O_2$  miteinander vermischt und gezündet, so verbrennen diese explosionsartig zu Wasser. In einer Brennstoffzelle vollzieht sich dieselbe Reaktion „kalt“, d.h. ohne offene Verbrennung durch Trennung des Reaktionsraums.

Es gibt verschiedene Brennstoffzellentypen, die sich in Aufbau und Funktionsweise unterscheiden. Im Praktikum verwenden wir eine PEM-Brennstoffzelle (engl.: Proton Exchange Membrane). Eine PEM-Brennstoffzelle besteht aus zwei Elektroden, die durch eine protonenleitfähige Membran voneinander getrennt sind. Die Anode (Pluspol) wird mit dem „Brennstoff“ umspült (in unserem Fall Wasserstoff), die Kathode (Minuspole) mit dem Oxidationsmittel (Sauerstoff). Die Elektroden sind mit einem Katalysator (Platin) überzogen, wodurch Wasserstoff an der Anode in positiv geladene  $H^+$ - Ionen und freie Elektronen

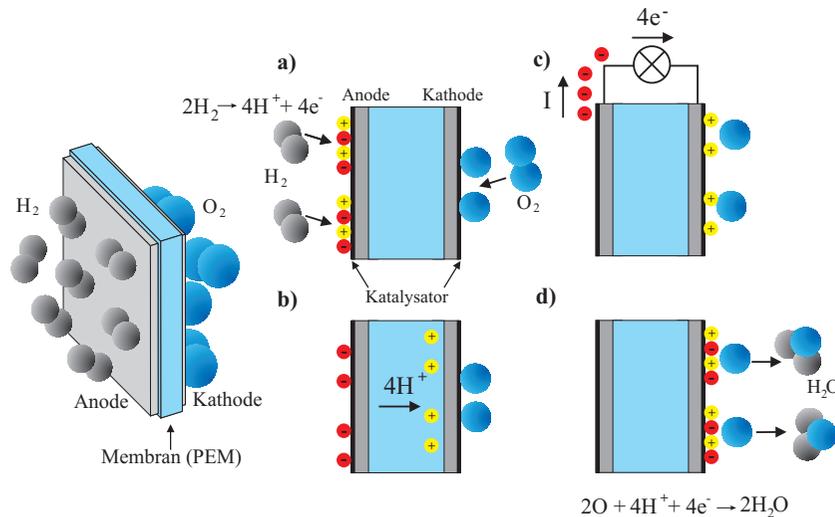


Abbildung 3: Funktionsprinzip einer PEM-Brennstoffzelle.

aufgespalten wird und an der Kathode Sauerstoff ( $\text{O}_2$ ) dissoziiert wird (Abbildung 3a). Die erzeugten Protonen können durch die protonenleitfähige Membran zur Kathode übertreten. Die Elektronen können die Membran allerdings nicht durchqueren und verbleiben an der Elektrode, die dadurch negativ aufgeladen wird (Abbildung 3b)<sup>2</sup>.

Werden die beiden Elektroden durch einen äußeren Stromkreis miteinander verbunden, so können die Elektronen zur Kathode fließen und dabei einen Verbraucher mit elektrischer Energie versorgen (Abbildung 3c). An der Kathode reagieren schließlich die Elektronen, Protonen und der Sauerstoff zu Wasser (Abbildung 3d).

## VI Durchführung des Versuchs

**Vorsicht: In den Steigrohren des Wasserzersetzungsapparates befindet sich mit Schwefelsäure angesäuertes Wasser. Austretende**

<sup>2</sup>Die negative Elektrode wird Anode genannt, da Wasserstoff hier zu Protonen oxidiert wird.

Flüssigkeit kann zu irreparablen Flecken und Löchern in Ihrer Kleidung führen.

**Aufgabe 1: Skizzieren Sie die beiden Versuchsaufbauten.**

**Aufgabe 2: Bestimmung der Faraday-Konstante aus der Abscheidung von Kupfer bei der Elektrolyse von  $\text{CuSO}_4$**

Drehen Sie am Netzteil den oberen Stromregler ganz nach rechts. Alle Stromeinstellung werden nur mit dem unteren Spannungsregler bzw. mit dem Schiebewiderstand durchgeführt.

Wiegen Sie die beiden Kupferplatten möglichst genau nach vorheriger gründlicher Reinigung (schmirgeln und spülen mit Wasser) und Trocknung. Anschließend tauchen Sie die Kupferplatten in die Kupfersulfatlösung ein. Die Stromstärke wird mit dem Schiebewiderstand auf etwa 0,5 bis 1 A eingestellt (Ablesung an der Anzeige des Netzgerätes) und in Zeitabständen von etwa 1/2 Minute auf ihre Konstanz geprüft und falls nötig nachreguliert. Der Strom soll mindestens 30 Minuten lang fließen. Überlegen Sie sich vor dem Einschalten der Spannung, welche Stromstärke Sie wählen wollen, und regulieren Sie diese nach dem Einschalten so schnell wie möglich ein (kein Probelauf). Sollte sich die Stromstärke sprunghaft ändern und nicht mehr auf den alten Wert regulieren lassen, so wenden Sie sich bitte an den Assistenten. Nach dem Durchgang des Stromes spülen Sie die Kupferplatten gründlich, aber sehr vorsichtig mit Wasser. Vorsicht, dass sich kein Kupfer ablöst. Anschließend werden die Platten mit dem Fön getrocknet und erneut gewogen. Das Elektrolytgefäß mit der Lösung ist am Ende wieder gut abzudecken, ebenso die Analysenwaage.

**Aufgabe 3: Bestimmung der Faraday-Konstante aus der elektrolytischen Zersetzung von Wasser**

Der Wasserzersetzungsapparat wird ohne Schiebewiderstand direkt an das Netzteil angeschlossen. Während eines kurzen Vorlaufs wird der Strom auf einen festen Wert zwischen  $I = 0,5 \text{ A}$  bis  $0,9 \text{ A}$  eingestellt. Das geschieht über den Stromregler am Netzteil. Stellen Sie dazu erst den Stromregler auf 0 A und die Spannung auf 15 V. Anschließend erhöhen Sie mit dem Stromregler den fließenden Strom auf den gewünschten Wert. Warten Sie anschließend bis alle Gasbläschen aus der Flüssigkeit aufgestiegen sind.

Die beiden Schenkel des Apparats werden vollständig mit Flüssigkeit gefüllt, indem man die Hähne öffnet und das Vorratsgefäß langsam soweit hebt bis der Flüssigkeitsspiegel etwas über den Hähnen steht. Dann die Hähne wieder schlie-

ben. Der Strom soll nun etwa so lange fließen, bis der Wasserstoff die eine Röhre zu etwa 3/4 füllt. Messen Sie die dazu benötigte Zeit. Die Stromstärke muss etwa jede Minute auf Konstanz kontrolliert werden (entweder nachregulieren oder jede Minute notieren und später mitteln). Es sind die Gasvolumina in beiden Röhren abzulesen. Dies geschieht unter vorsichtiger Senkung des Vorratsgefäßes bis die Flüssigkeitsspiegel im jeweiligen Schenkel und im Vorratsgefäß gleich hoch stehen – Erklären Sie warum die Gasvolumina so gemessen werden!

**Aufgabe 4: Qualitative Beobachtung der Umkehrung der Elektrolyse durch eine Brennstoffzelle**

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Wie lautet die chemische Reaktionsgleichung? Welche Prozesse finden statt? Berechnen Sie die Faraday-Konstante aus der Messzeit und dem Strom, der durch den Elektrolyten geflossen ist. Berücksichtigen Sie in zwei separaten Rechnungen die Massenzunahme der Kathode und die Massenabnahme der Anode. Vergleichen Sie die beiden Werte der Faraday-Konstante. Wie lassen sich die Abweichungen erklären? Diskutieren Sie die möglichen Fehlerquellen und deren Einfluss auf das Endergebnis.

**Zu Aufgabe 3:** Wie lautet die chemische Reaktionsgleichung? Aus den beiden Gasmengen und der durchgeschickten Elektrizitätsmenge ist jeweils die Faraday-Konstante zu berechnen.

Hinweis: Der bei der Elektrolyse freiwerdende Sauerstoff reagiert teilweise mit der Schwefelsäure zu Perschwefelsäure, so dass die gemessene Sauerstoffmenge ein wenig kleiner ist als erwartet. Die aus der Wasserstoffmenge berechnete Faraday-Konstante ist daher genauer als die Rechnung mit der gemessenen Sauerstoffmenge.

Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Versuche und diskutieren Sie die möglichen Fehlerquellen und deren Einfluss auf das Endergebnis.

## VIII Anhang

| T [°C] | $p_D$ [Torr] | T [°C] | $p_D$ [Torr] |
|--------|--------------|--------|--------------|
| 10     | 9,20         | 31     | 33,70        |
| 11     | 9,84         | 32     | 35,67        |
| 12     | 10,51        | 33     | 37,73        |
| 13     | 11,23        | 34     | 39,90        |
| 14     | 11,98        | 35     | 42,18        |
| 15     | 12,78        | 36     | 44,57        |
| 16     | 13,63        | 37     | 47,08        |
| 17     | 14,53        | 38     | 49,70        |
| 18     | 15,47        | 39     | 52,46        |
| 19     | 16,47        | 40     | 55,34        |
| 20     | 17,53        | 41     | 58,36        |
| 21     | 18,65        | 42     | 61,52        |
| 22     | 19,82        | 43     | 64,82        |
| 23     | 21,07        | 44     | 68,28        |
| 24     | 22,38        | 45     | 71,90        |
| 25     | 23,76        | 46     | 75,67        |
| 26     | 25,21        | 47     | 79,63        |
| 27     | 26,74        | 48     | 83,75        |
| 28     | 28,35        | 49     | 88,09        |
| 29     | 30,04        | 50     | 92,60        |
| 30     | 31,82        |        |              |

Tabelle 4: Sättigungsdampfdruck von Wasser

## Versuch 22 Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

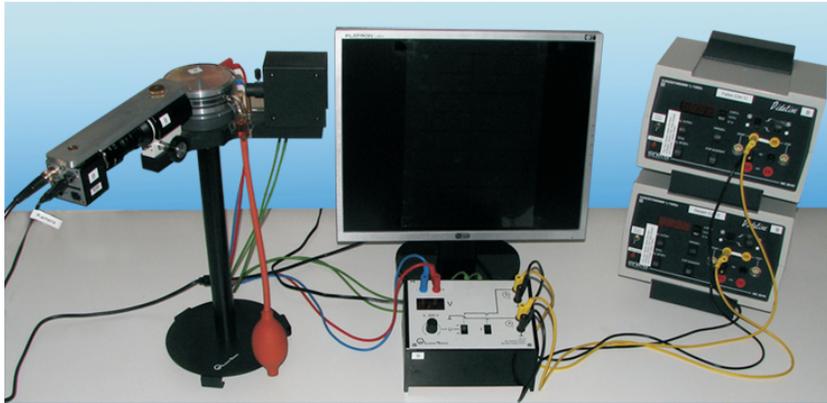


Abbildung 1: Übersicht des Millikan-Versuchs.

### I Messaufbau

- Millikan-Gerät (Plattenkondensator, Ölzerstäuber und Beleuchtung).
- Mikroskop-Kamera mit Monitor.
- Millikan-Steuergarät (Hochspannungsquelle, Triggerrung der Stoppuhren).
- Zwei elektronische Stoppuhren.
- PC mit Drucker, Datenauswertung mit dem Programm Excel.

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart, 7.Auflage 1994, S. 310-313.

- W. Ilberg, M. Krötzsch, D. Geschke, *Physikalisches Praktikum*, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, Leipzig 10. Auflage 1994, S. 254-256.
- J. Becker, H.J. Jodl, *Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf 1991, S. 152-155.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Auftrieb, Stokesches Gesetz, Elektrisches Feld in einem Kondensator, Kraft auf eine Ladung im homogenen elektrischen Feld. Berechnen Sie die Summe aller Kräfte auf ein im feldfreien Raum mit konstanter Geschwindigkeit sinkendes Öltröpfchen und auf ein im elektrischen Feld des Kondensators mit konstanter Geschwindigkeit steigendes Öltröpfchen. Leiten Sie hiermit die beiden Gleichungen (5) und (6) ab.

### IV Aufgaben

- Bestimmung der Elementarladung durch Messung der Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit von elektrisch geladenen Öltröpfchen im Plattenkondensator.

## V Grundlagen



Robert A. Millikan

Robert A. Millikan hat im Jahre 1913 in der Fachzeitschrift *Physical Review* eine Arbeit mit dem Titel „On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant“ (Phys.Rev. 2 (1913), 109-143) veröffentlicht. Für die in dieser Arbeit beschriebene Messung der elektrischen Elementarladung erhielt Millikan im Jahre 1923 den Nobelpreis für Physik. Der hier im Praktikum aufgebaute Versuch beruht im wesentlichen auf der Originalapparatur von Millikan. Grundprinzip des Millikan- Experiments ist die Tatsache, dass auf ein im homogenen Feld eines Plattenkondensators bewegliches, elektrisch geladenes Öltröpfchen verschiedene Kräfte wirken, die indirekt messbar sind. Dabei wird die Ladung eines Tröpfchens aus der Messung seiner Fallgeschwindigkeit  $v_f$  im feldfreien Raum und seiner

Steiggeschwindigkeit  $v_s$  bei einer an den Kondensator angelegten Spannung bestimmt.

Auf ein fallendes Tröpfchen (ohne elektrisches Feld) wirken drei Kräfte:

$$\text{Gewichtskraft:} \quad F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} g \quad (1)$$

$$\text{Auftriebskraft:} \quad F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g \quad (2)$$

$$\text{Stokesche Reibung:} \quad F_R = 6\pi r \eta v. \quad (3)$$

Wobei  $r$ ,  $\rho_{\text{Öl}}$ , und  $v$  der Radius, die Dichte und die Geschwindigkeit des Öltröpfchens bezeichnen,  $g$  ist die Schwerkraftbeschleunigung,  $\rho_{\text{Luft}}$  und  $\eta$  sind die Dichte und die Viskosität der Luft. Trägt das Öltröpfchen eine elektrische Ladung  $q$ , so wirkt im Feld eines Plattenkondensators eine zusätzliche Kraft,

$$\text{elektrische Kraft:} \quad F_e = q \frac{U}{d} \quad (4)$$

auf dieses ein. Hier ist  $q$  die Ladung des Tröpfchens,  $U$  ist die am Kondensator anliegende Spannung und  $d$  der Abstand der Kondensatorplatten.

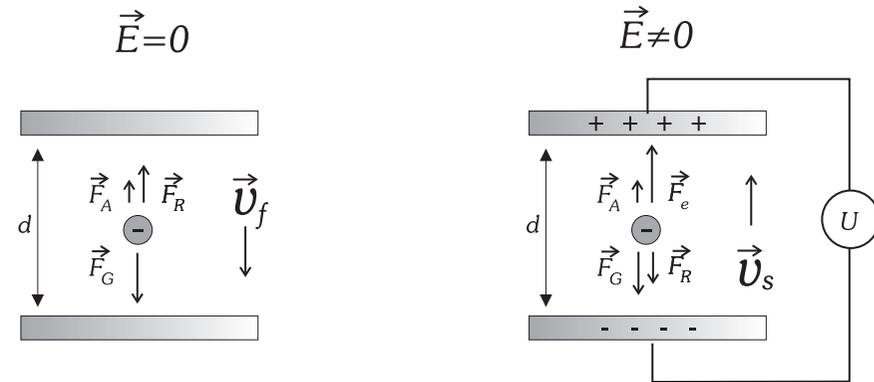


Abbildung 2: Einwirkende Kräfte auf ein elektrisch geladenes Öltröpfchen im Plattenkondensator. Links: Ohne elektrisches Feld. Rechts: Im elektrischem Feld.

Aus der Summe aller Kräfte, die ohne elektrisches Feld auf ein mit konstanter Geschwindigkeit  $v_f$  fallendes Tröpfchen wirken und aus der Summe der Kräfte, die auf ein im elektrischem Feld des Kondensators mit konstanter Geschwindigkeit  $v_s$  steigendes Tröpfchen wirken, lassen sich die beiden Gleichungen für den Radius  $r$  und die Ladung  $q$  des Öltröpfchens ableiten:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}} v_f \quad (5)$$

$$q = (v_f + v_s) \sqrt{\frac{9 v_f \eta^3}{2 \rho g}} \frac{6\pi d}{U}, \quad (6)$$

wobei  $\rho$  die Differenz ( $\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}$ ) darstellt.

Berechnet man die Ladungen der Öltröpfchen mit Hilfe von Gleichung (6) und leitet aus vielen solchen Messungen die Elementarladung  $e$  ab, so stellt man fest, dass der so bestimmte Wert um etwa einen Faktor 1,1 zu hoch ist. Genauere Untersuchungen zeigen, dass dieser Faktor um so größer wird, je kleiner der Radius der Öltröpfchen ist. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass die Radien der Öltröpfchen im Bereich  $10^{-6}$  m bis  $10^{-7}$  m liegen (folgt aus Gleichung (5)). Dies entspricht derselben Größenordnung wie die mittlere freie Weglänge der Moleküle in Luft. Die Viskosität  $\eta$  wurde aber bei der bisherigen

Betrachtung als konstant angenommen. Allerdings gilt dies nur dann, wenn der Durchmesser der Öltröpfchen deutlich größer ist als die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle. Man kann aber die Viskosität  $\eta$  mit einem radiusabhängigen Korrekturfaktor  $f(r)$  versehen. Dieser auch schon von Millikan benutzte Korrekturfaktor (die sogenannte Cunningham-Korrektur des Stokeschen Gesetzes) ist gegeben durch:

$$\eta(r) = \eta_0 f(r) = \frac{\eta_0}{1 + \frac{b}{rp}}. \quad (7)$$

Hier ist  $\eta_0$  der Grenzwert der Viskosität für sehr große Öltröpfchen,  $p$  ist der Luftdruck und  $b$  eine empirische Konstante. Da bei unserer Betrachtung der Radius  $r$  von  $\eta$  abhängt (Gleichung 5), müsste man, um  $r$  exakt zu berechnen, Gleichung (7) in Gleichung (5) einsetzen und nach  $r$  auflösen. Das führt zu einer quadratischen Gleichung. Es zeigt sich aber, dass es genügt, in Gleichung (5) mit  $\eta_0$  zu rechnen. Der Fehler, den man dabei für  $r$  macht, liegt bei etwa 5 %. Der daraus resultierende Fehler für den Korrekturfaktor  $f$  beträgt nur etwa 0,5 % und ist somit vernachlässigbar.

Bei der Auswertung zu verwendende Konstanten:

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| Viskosität der Luft            | $\eta_0 = 1,81 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$            |
| Schwerebeschleunigung          | $g = 9.81 \text{ m/s}^2$                                 |
| Dichte des Öls bei 15°C        | $\rho_{\text{Öl}} = 877 \text{ kg/m}^3$                  |
| Dichte des Öls bei 25°C        | $\rho_{\text{Öl}} = 871 \text{ kg/m}^3$                  |
| Dichte der Luft                | $\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$               |
| Konstante im Korrekturfaktor   | $b = 7,78 \times 10^{-3} \text{ Pa m}$                   |
| Abstand der Kondensatorplatten | $d = (6,00 \pm 0,05) \text{ mm}$                         |
| Skala auf dem Bildschirm       | $1\text{Skt} = (5,00 \pm 0,13) \times 10^{-5} \text{ m}$ |

Bachten Sie, dass die roten Linien auf dem Bildschirm nicht einem Skalenteil entsprechen sondern 10 Teilen.

## VI Durchführung des Versuchs

**Aufgabe 1:** Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.

**Aufgabe 2:** Machen Sie sich mit der Versuchsanordnung vertraut.

Bringen Sie Öltröpfchen in den Kondensator ein und beobachten Sie ihr Verhalten unter dem Einfluss der angelegten Spannung (Für diese und die folgenden Aufgaben ca. 500 V mit dem Drehknopf einstellen. Anschließend den eingestellten Wert notieren und dann für die gesamte Durchführung nicht mehr verändern – **die Spannung ab jetzt über den entsprechenden Kippschalter nur ein- und ausschalten!**). Benutzen Sie zur Scharfstellung das Einstellrad an der Mikroskopführung. Beachten Sie die Prozedur zum Nullstellen der Stoppuhren (ist auf den Uhren angegeben). **Diese müssen Sie nur einmal durchführen.** Mit dem rechten Schalter des Steuergeräts starten Sie die obere Uhr, mit der die Fallzeit der Tröpfchen gemessen wird. Mit dem linken Schalter wird die Spannung am Kondensator angelegt, gleichzeitig wird die obere Stoppuhr angehalten und die untere Stoppuhr gestartet. Am oberen Umkehrpunkt des Tröpfchens wird der linke Schalter wieder ausgeschaltet, dies stoppt die untere Uhr und startet wieder die obere Uhr, usw. Am Ende der Messung eines Tröpfchens wird schließlich wieder der rechte Schalter betätigt.

**Aufgabe 3:** Mehrmaliges Messen der Steig- und Fallgeschwindigkeit eines Öltröpfchens

Suchen Sie sich ein **langsam steigendes (ca. 8 s pro 10 Skt.)** Tröpfchen aus. Messen Sie seine Fallgeschwindigkeit (ohne elektrisches Feld) und seine Steiggeschwindigkeit (mit elektrischem Feld) jeweils 5 mal und notieren Sie die Werte der einzelnen Messungen (Wege und Zeiten). Aus der Verteilung der insgesamt 10 Messwerte soll später die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung abgeschätzt werden.

**Aufgabe 4:** Messen Sie die Fall- und Steiggeschwindigkeiten von insgesamt etwa 40 bis 60 Tröpfchen. Verfolgen Sie nach Möglichkeit ein Tröpfchen bei mehreren Fall- und Steigbewegungen.

**Aufgabe 5:** Notieren Sie die Werte für Temperatur und Luftdruck.

**Aufgabe 6:** Tragen Sie die jeweils 4 Werte für jedes gemessene Tröpfchen (Fallweg und Fallzeit, Steigweg und Steigzeit) in die Tabelle des Excel-Programms zur Auswertung ein.

**Aufgabe 7:** Drucken Sie die Excel-Tabelle aus.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 1:** Verifizieren Sie für ein ausgewähltes Tröpfchen die von Excel berechneten Werte, d.h. berechnen Sie für dieses Tröpfchen von Hand  $v_f$ ,  $v_s$ ,  $r_0$ ,  $f(r_0)$  und  $q$  unter Berücksichtigung der Einheiten ( $r_0$  ist der mit  $\eta_0$  berechnete Radius).

**Zu Aufgabe 2:** Zeichnen Sie (von Hand) ein Histogramm aller gemessenen Ladungen, die im Bereich von 0 As bis ca.  $10^{-18}$  As liegen. Wählen Sie als Intervallgröße  $2 \times 10^{-20}$  As.

**Zu Aufgabe 3:** Überprüfen Sie, ob der im Excel-Programm benutzte Wert für die obere Grenze der gemessenen Ladung eines einfach geladenen Tröpfchens vernünftig ist. Können Sie sicher sein, dass der im Excel-Programm berechnete Wert **einer** Elementarladung  $e$  entspricht (und nicht etwa  $2e$  oder  $3e$ )?

**Zu Aufgabe 4:** Schätzen Sie den systematischen Fehler  $\Delta q/q$  unter Berücksichtigung der oben angegebenen Fehler einiger Eingabegrößen ab. Nehmen Sie für den Fehler der Spannungsmessung 0,5 %, für den Fehler der Viskosität (einschließlich des Korrekturfaktors) 2,0 % und für den Fehler der Öldichte 0,5 % an. Verwenden Sie dazu die folgende Formel und begründen Sie die in der Formel enthaltenen Vorfaktoren 1/2 und 3/2:

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta s}{2s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta \eta}{2\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \quad (8)$$

mit  $s$  für die zurückgelegte Strecke beim Fallen bzw. Steigen.

**Zu Aufgabe 5:** Nehmen Sie an, dass der statistische Fehler im wesentlichen auf den Messfehlern beruht, die Sie bei den Geschwindigkeitsmessungen machen. Schätzen Sie aus der Verteilung der 5 Werte für  $q$ , die Sie mit Hilfe von Gleichung (6) aus den Messungen in Aufgabe 3 erhalten haben, den resultierenden Fehler einer Einzelmessung für  $q$  ab und vergleichen Sie ihn mit der von Excel bestimmten Standardabweichung einer Einzelmessung.

**Zu Aufgabe 6:** Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert

## Versuch 23 Strom- und Spannungsmessung



Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Strom- und Spannungsmessung.

### I Messaufbau

- 6V Netzteil mit zusätzlicher Präzisionsspannungsquelle ( $2,5\text{V} \pm 0,02\%$ )
- Komparator. Linearitätsfehler des Kompensationsreglers: 0,25%
- Milliamperemeter
- Schiebewiderstand ( $100\ \Omega$ )
- Drei Dekadenwiderstände
- Batterie
- Taster
- Steckbrett mit zwei Widerständen

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums: <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Gesetze, Innenwiderstand von Strom- und Spannungsmessinstrumenten, Drehspulinstrument, Kompensationsschaltung, Innenwiderstand und Quellenspannung von Spannungsquellen.

#### Verständnisfragen:

1. Was besagen die Kirchhoffschen Gesetze?
2. Was und wie misst man mit einem Kompensator?
3. Worin besteht der prinzipielle Vorteil eines Kompensators gegenüber einer „normalen“ Spannungsmessung?
4. Welcher Widerstandswert besitzt der Eichregler in Abbildung 5 wenn der Kompensator abgeglichen ist?
5. Wie wird der Messbereich eines Voltmeters bzw. eines Amperemeters erweitert?
6. Wie unterscheiden sich Quellenspannung und Klemmenspannung einer Spannungsquelle? Wie kann die Quellenspannung bestimmt werden?
7. Wie groß ist der maximale (Kurzschluss) Strom, den eine Batterie - kurzzeitig - zur Verfügung stellen kann? Berechnungsbeispiel: Auto-Batterie:  $U=12\text{ V}$ , Innenwiderstand:  $R=0,1\ \Omega$ ,  $I_{max} = ?$

## IV Aufgaben

- Erweitern Sie den Messbereich eines Drehspulinstruments auf 5 V.
- Eichen Sie eine Kompensationsschaltung zum Messen von Spannungen.
- Der Messbereich eines Amperemeters ist von 10 mA auf 200 mA zu erweitern.
- Die Klemmenspannung einer Batterie ist als Funktion der Belastung zu messen, um die Quellenspannung und den Innenwiderstand zu bestimmen.
- Zusatzaufgabe für Physiker: Berechnen Sie, für welchen Lastwiderstand aus der Batterie die maximale Leistung  $P = UI$  entnommen wird.

## V Grundlagen

Ideale Spannungsquellen zeichnen sich dadurch aus, dass die Spannung unabhängig vom entnommenem Strom ist. Die Spannung an den Ausgangsklemmen (Klemmenspannung) entspricht immer der Quellenspannung. Bei realen Spannungsquellen hängt dagegen die Spannung an den Anschlussklemmen vom entnommenen Strom  $I$  ab. Mit zunehmendem Strom sinkt die Klemmenspannung  $U$ :

$$U = U_q - U(I). \quad (1)$$

Bei linearen Spannungsquellen ist der Spannungsabfall  $U(I)$  proportional zum Strom. Solche Spannungsquellen können durch eine Serienschaltung einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung  $U_q$  und einem Widerstand  $R_{iS}$ , der als Innenwiderstand der Spannungsquelle bezeichnet wird, dargestellt werden (Abbildung 2). Für die Klemmenspannung gilt dann:

$$U = U_q - R_{iS}I. \quad (2)$$

Wird eine reale Spannungsquelle mit einem Widerstand  $R_L$  belastet, so fließt der Strom

$$I = \frac{U_q}{R_{iS} + R_L}. \quad (3)$$

Für die Klemmenspannung, die der Spannung über dem Lastwiderstand entspricht gilt dann:

$$U = R_L I = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L}. \quad (4)$$

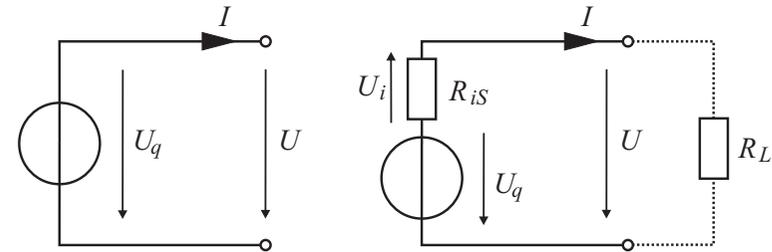


Abbildung 2: Links: Ideale Spannungsquelle. Die Spannung  $U$  ist unabhängig vom Strom  $I$  und entspricht immer der Quellenspannung  $U_q$ . Rechts: Reale Spannungsquellen besitzen einen Innenwiderstand  $R_{iS}$ . Fließt ein Strom so fällt am Innenwiderstand die Spannung  $U_i$  ab. Die Klemmenspannung  $U = U_q - U_i$  hängt somit von der Stromstärke ab.

Nur falls  $R_{iS} \ll R_L$  ist kann der Spannungsabfall am Innenwiderstand vernachlässigt werden und die Klemmenspannung entspricht in etwa der Quellenspannung.

### Strom- und Spannungsmessung

Ein Drehspulinstrument (Abbildung 3) ist ein Zeigerinstrument dessen Ausschlag proportional zum Strom ist. Eine drehbar gelagerte Spule befindet sich im Feld eines Permanentmagneten. An der Spule ist ein Zeiger und zusätzlich eine Rückstellfeder befestigt. Fließt ein Strom durch die Spule so wirkt aufgrund der Lorentzkraft ein Drehmoment auf die Spule die diese in Drehung versetzt. Die Spule wird soweit ausgelenkt, bis das Drehmoment der Lorentzkraft durch das Drehmoment der Rückstellfeder kompensiert wird. Der Ablenkwinkel  $\alpha$  ist proportional zum Strom  $I$  und zur Windungszahl  $n$  der Drehspule.

$$\alpha \propto nI. \quad (5)$$

Ein Drehspulinstrument ist demnach ein Strommessgerät. Die Messempfindlichkeit eines Instruments ist gegeben durch die Stromstärke bei maximal möglichem Ausschlag. Sollen sehr kleine Ströme gemessen werden, dann muss die Windungszahl  $n$  hoch sein und das rückwirkende Drehmoment klein. Im Allgemeinen werden daher Amperemeter für kleine Ströme auf Grund der hohen Windungszahl  $n$  hohe Innenwiderstände  $R_{iA}$  haben. Bei bekannten Innenwiderstand kann mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes ein Drehspulinstrument auch als Spannungsmessgerät verwendet werden. Strommessgeräte werden immer in Serie zum

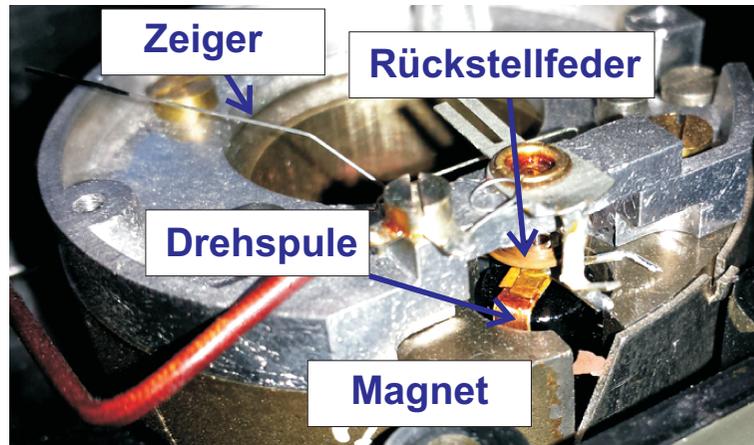


Abbildung 3: Aufbau eines Drehspulinstrument.

Verbraucher  $R_L$  geschaltet (Abbildung 4 oben), d.h. der Strom muss durch das Messgerät fließen. Amperemeter dürfen nie parallel zum Messobjekt geschaltet werden! Wegen seines Innenwiderstands beeinflusst ein Amperemeter den Messaufbau. Ohne Amperemeter fließt in der Schaltung 4 oben der Strom

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_{iS}}. \quad (6)$$

Wird ein Amperemeter eingebaut, so addiert sich zum Lastwiderstand der Innenwiderstand  $R_{iA}$  des Amperemeter hinzu. Der Strom verringert sich auf den Wert

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_{iS} + R_{iA}}. \quad (7)$$

Damit diese Abweichung gering ist, muss der Innenwiderstand des Amperemeters möglichst klein sein, bzw. viel kleiner als der Lastwiderstand.

Spannungsmessgeräte werden parallel zum Verbraucher geschaltet (Abbildung 4 unten). Auch hier hat der Innenwiderstand Einfluss auf die Messung. Ohne Messgerät liegt am Verbraucher  $R_L$  die Spannung

$$U = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L}. \quad (8)$$

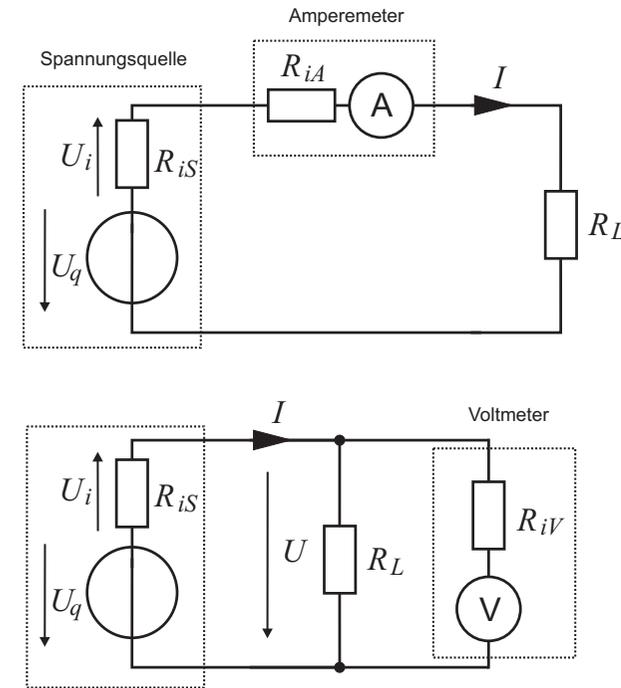


Abbildung 4: Strom- und Spannungsmessung.

an. Wird ein Voltmeter angeschlossen so ist der Lastwiderstand parallel zum Innenwiderstand  $R_{iV}$  geschaltet. Die Spannung an  $R_L$  beträgt dann

$$U = U_q \frac{R_L}{\frac{R_{iS}R_L}{R_{iV}} + R_{iS} + R_L}. \quad (9)$$

Bei einem großen Innenwiderstand  $R_{iV} \gg R_{iS}R_L$  ist der erste Term im Nenner klein und somit der Einfluss des Voltmeters gering. Ein Spannungsmessgerät sollte daher einen möglichst großen Innenwiderstand besitzen.

#### Kompensator

Bei einem Kompensator wird an die zu messende Spannung  $U_x$  eine bekannte, einstellbare Spannung  $U_e$  gelegt und der Strom zwischen den beiden Spannungsquellen gemessen. Die einstellbare Spannung wird so variiert bis kein Strom mehr

fließt (Abbildung 5 oben). In diesem Fall entspricht die zu messende Spannung der bekannten einstellbaren Spannung. Da bei der Kompensation kein oder nur ein sehr kleiner „Fehlerstrom“ fließt, besitzt ein Kompensator einen sehr großen Innenwiderstand. Der Schaltplan des Kompensators ist in Abbildung 5 unten

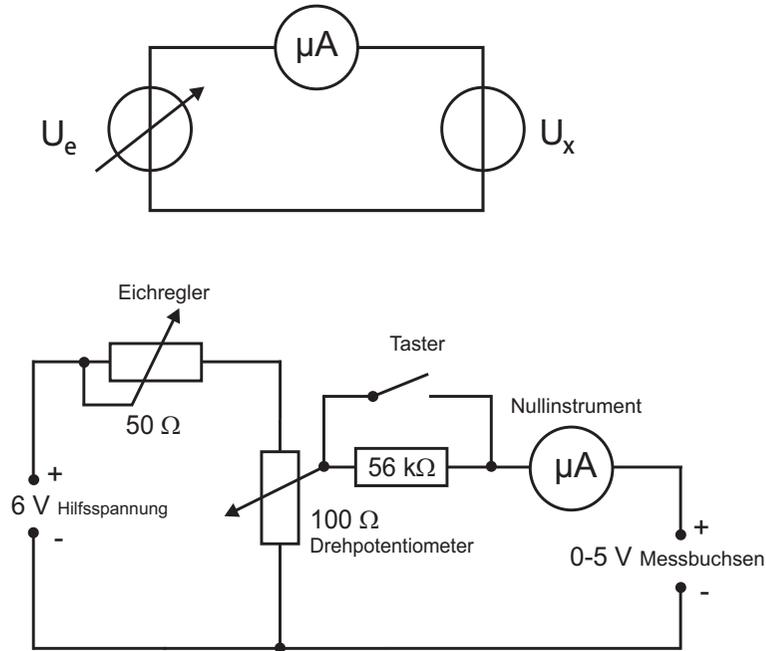


Abbildung 5: Schaltplan des Kompensators.

dargestellt. Die Gegenspannung wird mit einem Drehpotentiometer mit einer digitalen Skala von 0 bis 1000 eingestellt. Diese Skala muss zuvor geeicht werden. Als Eichspannung steht eine präzise Referenzspannung von  $2,5 \text{ V} \pm 0,02\%$  zur Verfügung. Der Kompensator soll in einem Bereich von 0 V bis 5 V arbeiten. Das Drehpotentiometer wird auf 500 Skalenteile (entsprechend 2,5 V) eingestellt und die 2,5 V Referenzspannung angeschlossen. Mit einem weiteren Potentiometer, dem Eichregler, wird der Kompensator abgeglichen bis kein Strom mehr fließt. Damit ist der Kompensator geeicht und die Spannung kann direkt am Skalentrieb abgelesen werden.

**Messbereichserweiterung**

Übersteigt eine zu messende Größe den Messbereich eines Instruments, so muss der Bereich mit Hilfe von Widerständen erweitert werden. Bei Strommessgeräten wird ein Widerstand  $R_p$  parallel zum Instrument geschaltet, bei Spannungsmessgeräten in Serie (Abbildung 6). Sei  $I_0$  der Maximalbereich eines Amperemeters

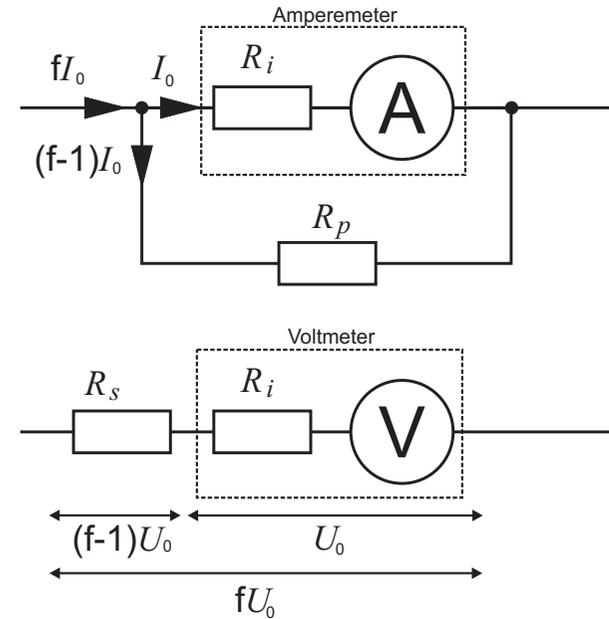


Abbildung 6: Messbereichserweiterung eines Amperemeters (oben) und eines Voltmeters (unten).

mit dem Innenwiderstand  $R_i$ . Soll der Bereich um einen Faktor  $f$  erweitert werden, muss durch den Parallelwiderstand der Strom  $(f - 1)I_0$  fließen. Da an beiden Widerständen die gleiche Spannung liegt gilt:

$$U_{R_i} = U_{R_p} \rightarrow R_i I_0 = R_p (f - 1)I_0 \rightarrow R_p = \frac{R_i}{f - 1}. \tag{10}$$

Soll bei einem Amperemeter der Messbereich um den Faktor  $f$  erweitert werden, so muss der Parallelwiderstand den Wert  $R_i/(f - 1)$  besitzen. Bei einem Voltmeter mit dem Messbereich  $U_0$  muss am Serienwiderstand die Spannung

$(f - 1)U_0$  und am Innenwiderstand die Spannung  $U_0$  anliegen. Da die Ströme durch beide Widerstände gleich groß sind, folgt:

$$I_{R_i} = I_{R_s} \rightarrow U_0/R_i = (f - 1)U_0/R_s \rightarrow R_s = R_i(f - 1). \quad (11)$$

Soll bei einem Voltmeter der Messbereich um den Faktor  $f$  erweitert werden, so muss der Serienwiderstand den Wert  $R_i(f - 1)$  besitzen.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Abgleich des Kompensators

Schließen Sie die 6 V Hilfsspannung zum Betrieb des Kompensators an die linken Buchsen an. Die Eichspannung von 2,5 V wird an das rechte Buchsenpaar angeschlossen. Beachten Sie die Polung! Die roten Buchsen sind immer mit dem Pluspol zu verbinden, die schwarzen mit dem Minuspol. Die Genauigkeit der Eichspannung beträgt 0,02%.

Stellen Sie den Kompensationsregler auf 500 Skt. Durch Drehen am Eichregler und drücken des Tasters wird der Kompensator auf Null abgeglichen. Die Drucktaste ist mit 56 kΩ überbrückt. Dadurch fließt bei Fehleinstellung ein kleiner Strom durch das Nullinstrument. Dieser verrät sofort die richtige Drehrichtung zum Nullabgleich. (Überlegen Sie sich, was hinter dieser Eichvorschrift steckt). Den Eichregler dürfen Sie auf keinen Fall mehr verstellen. Am besten Sie verriegeln den Drehknopf mit dem seitlichen Hebel. Nach dem Abgleich entsprechen 1000 Skt. am Kompensationsregler genau 5 Volt an den Messbuchsen, 800 Skt. entsprechen genau 4 Volt usw. Der Linearitätsfehler des Kompensationsreglers beträgt 0,25%.

### Aufgabe 2: Spannungsmessungen mit verschiedenen Messgeräten

Betreiben Sie das Drehspulinstrument als Voltmeter und erweitern Sie den Messbereich so, dass Vollausschlag bei 5 V erfolgt. Benutzen Sie dazu die drei Dekadenwiderstände (schauen Sie sich die Skizze auf deren Rückseite an). Der Innenwiderstand ist auf dem Messgerät angegeben (Genauigkeit 1%). Notieren Sie den Gesamtwiderstand des Messgerätes (Innenwiderstand plus den verwendeten Serienwiderstand). Bauen Sie auf dem Steckbrett und den beiden Steckwiderständen einen Spannungsteiler auf. Die Widerstände sind mit Buchstaben beschriftet. Achten Sie darauf, dass diese bei beiden Widerständen gleich sind. Messen Sie mit dem Drehspulinstrument einmal die Batteriespannung  $U_0$  und

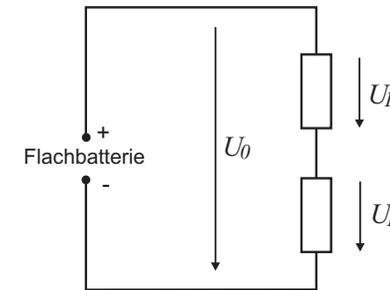


Abbildung 7: Schaltung zu Aufgabe 2.

die Spannung über den Widerständen  $U_R$ . Notieren Sie die gemessenen Werte. Was fällt Ihnen auf? Wiederholen Sie die Messung mit dem Kompensator.

### Aufgabe 3: Messen des Innenwiderstands einer Batterie

Erweitern Sie den Messbereich des Drehspulinstruments von 10 mA auf 200 mA. Mit dem erweiterten mA-Meter und dem Kompensator wird in der angezeichneten Anordnung die Klemmenspannung der Batterie bei Belastung aufgenommen. Der Batterie wird ein Strom  $I$  entnommen und gleichzeitig die Klemmenspannung mit dem Kompensator gemessen. Mit dem Schiebewiderstand wird die Stromstärke von ca. 0 bis 200 mA geregelt (9 Messpunkte). Um die Batterie zu schonen, wird die Morsetaste zur Messung immer nur kurz (während des Abgleichs des Kompensators) gedrückt. Sofort ein Diagramm  $U = U(I)$  zeichnen! Welchen Verlauf erwarten Sie?

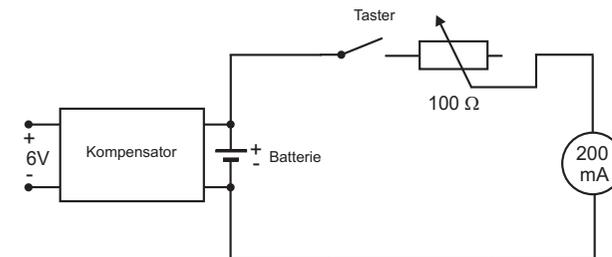


Abbildung 8: Schaltung zu Aufgabe 3.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Warum entspricht bei der Messung mit dem Drehspulinstrument, die Summe der Teilspannungen über den Widerständen  $U_R$  nicht der Batteriespannung  $U_0$  (Maschenregel)? Berechnen Sie ohne Berücksichtigung der Messfehler den Wert der Widerstände des Spannungsteilers. Beide Widerstände sind gleich groß. Wie gut stimmt die Maschenregel bei der Messung mit dem Kompensator?

**Zu Aufgabe 3:** Bestimmen Sie aus dem Diagramm  $R_i$  und die Quellenspannung der Batterie. Diskutieren Sie Ihre Messungen unter Berücksichtigung der Messfehler.

**Zusatzaufgabe für Physiker:** Rechnen Sie durch Differenzieren der Gleichung  $P = U(I)I$  aus, bei welchem Lastwiderstand die von der Batterie abgegebene Leistung am größten ist. (Leistungsanpassung).  
Wie groß ist dann  $U(I)$  ?

## Versuch 25 Oszilloskop

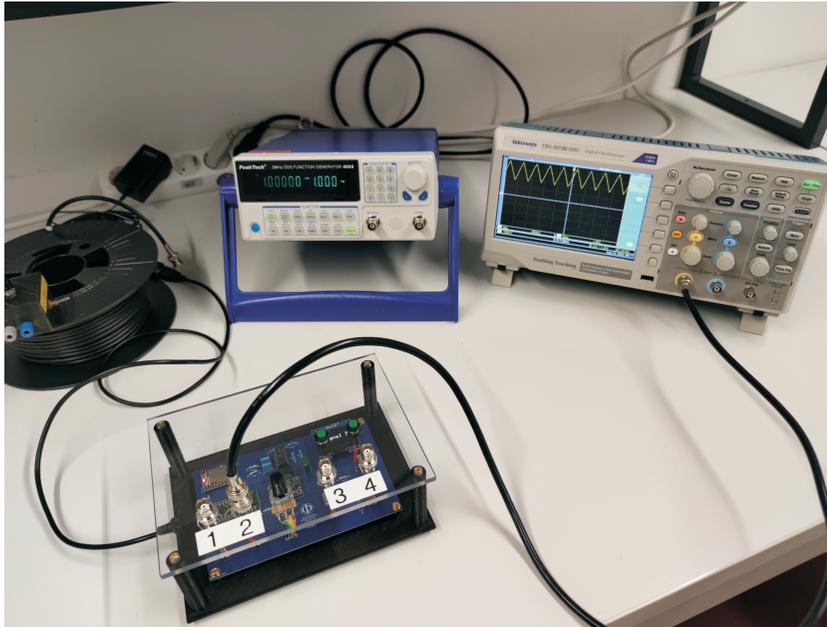


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Oszilloskop TBS1072B
- Funktionsgenerator
- Signalgenerator
- Koaxialkabel RG58, 50 $\Omega$ , Länge 25 m
- Einstellbarer Abschlusswiderstand

### II Motivation

Ziel dieses Versuchs ist nicht die Untersuchung eines physikalischen Gesetzes oder die Bestimmung einer Naturkonstanten, sondern das Kennenlernen und richtige Anwenden eines in Wissenschaft und Technik weit verbreiteten Instrumentes.

Am häufigsten wird das Oszilloskop zur Darstellung der zeitlichen Veränderung eines elektrischen Signals in Echtzeit benutzt. Nahezu alle physikalischen Größen, die sich mit geeigneten Sensoren in korrespondierende elektrische Signale umwandeln lassen, können mit einem Oszilloskop dargestellt werden. Das Anwendungsfeld reicht von einfachen Amplitudenmessungen einer Sinusspannung bis hin zur Darstellung von Herz- bzw. Gehirnströmen im medizinischen Bereich. Dabei überdeckt die Zeitaufösung einen Bereich von einigen ns bei schnellen Oszilloskopen, bis zu mehreren Minuten bei digitalen Speicheroszilloskopen.

### III Vorbereitung

Informieren Sie sich mit Hilfe zusätzlicher Literatur über das Funktionsprinzip eines Oszilloskops. Bereiten Sie sich außerdem auf folgende Themen vor: Kenngrößen von Wechselspannungen: Frequenz, Periode, Phase, Spitze-Spitze-Spannung  $U_{SS}$  bzw.  $U_{PP}$ , Effektivspannung. Pulsweitenmodulation. Reflexion auf Kabeln. Wellenwiderstand eines Kabels.

### IV Aufgaben

- Durch gezieltes Verstellen der Bedienelemente des Oszilloskops und Beobachtung der damit verbundenen Auswirkungen, soll die Bedienung des Oszilloskops geübt werden.
- Messung der Periodendauer und Amplitude von verschiedenen Signalformen. Für ein periodisch exponentiell abfallendes und aufsteigendes Signal ist die Halbwertszeit zu bestimmen.
- Dimmung einer LED, Pulsweitenmodulation.
- Reflexion an einem Kabel.

## V Grundlagen

**Aufbau und Funktion eines Oszilloskops** Bis vor einigen Jahren waren noch analoge Kathodenstrahl-Oszilloskope im Einsatz. Dieses Gerät wurde heutzutage vorwiegend durch digitale Speicheroszilloskope ersetzt. Auch in diesem Versuch und im Praktikum arbeiten wir mit digitalen Speicheroszilloskopen. Bei einem analogen Oszilloskop steuert das anliegende Signal einen Elektronenstrahl der das Eingangssignal auf einem Leuchtschirm in Echtzeit wiedergibt. Bei einem digitalen Oszilloskop hingegen, wird das anliegende Signal nicht kontinuierlich aufgezeichnet, sondern es werden mit Hilfe eines Analog-Digital Wandlers in festen Zeitabständen der jeweils aktuelle Spannungswert gemessen und in einem Speicher abgelegt. Diese Werte werden anschließend auf einem Display dargestellt. Ein analoges Oszilloskop stellt das Eingangssignal demnach kontinuierlich dar, während ein digitales Oszilloskop nur eine Punktfolge aufnehmen kann.

Wegen dieser lückenlosen Messung zeigen analoge Geräte in Bezug auf die Amplitudenauflösung in vielen Fällen bessere Eigenschaften als digitale Geräte. Der Vorteil digitaler Oszilloskope liegt darin, dass Signale zwischengespeichert werden. Damit lassen sich auch einmalige Vorgänge aufzeichnen und zu einem späteren Zeitpunkt wiedergeben. Wollen Sie z.B. mit einem Mikrofon einen kurzen Knall aufzeichnen, wird Ihnen das im Analogmodus nicht gelingen. Das Signal ist viel zu kurz und das Auge zu träge um diesem kurzen Signal auf dem Schirm zu folgen. Im Digitalmodus wird hingegen das Signal gespeichert und kann daher auch noch dann wiedergegeben werden, wenn das Signal bereits abgeklungen ist. Ein weiterer Vorteil des Digitalmodus ist die Möglichkeit der digitalen Signalverarbeitung. Sie können mit den gemessenen Werten Berechnungen durchführen z.B. den Effektivwert bestimmen oder das Spektrum des Signals mit Hilfe einer Fouriertransformation berechnen.

### Das Oszilloskop im yt-Betrieb

Im yt-Betrieb zeigt ein Oszilloskop ein Spannungspegel als Funktion der Zeit an. Die Signalspannung wird auf der vertikalen y-Achse dargestellt, die horizontale t-Achse ist die Zeitachse. Das zu messende Signal wird an die Eingangsbuchse (BNC- Buchse: Bayonet Neill Concelman) angelegt. Das Signal wird danach analog aufbereitet, d.h. gedämpft oder verstärkt und gefiltert. Diese Analogelektronik des Oszilloskops hat eine gewisse Bandbreite, d.h. es können keine beliebig hohen Frequenzen ohne Fehler aufbereitet werden. Die Bandbreite ist definiert als die Frequenz, bei welcher ein sinusförmiges Eingangssignal auf 71 % (-3 dB) seiner ursprünglichen Größe abgeschwächt wird. Die hier verwendeten

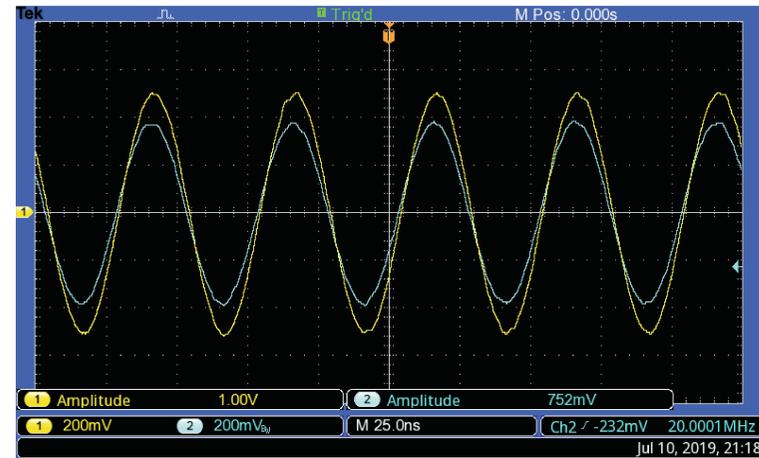


Abbildung 2: An beiden Kanälen liegt ein Sinussignal mit einer Frequenz von 20 MHz und einer Amplitude von 1 V. Bei Kanal 2 (blaue Kurve) wurde die Bandbreite auf 20 MHz reduziert wodurch die Amplitude auf ungefähr 70 % des ursprünglichen Werts abfällt.

Geräte haben eine Bandbreite von 70 MHz. Ein 70 MHz Sinussignal mit einer Amplitude von 1 V hat nach dem durchlaufen des Analogteils somit nur noch eine Amplitude von etwa 0,7 V (Abbildung 2). Nach Durchlaufen der Analogaufbereitung wird das Signal mit einem schnellen Analog-Digital Wandler (AD-Wandler) digitalisiert. Dazu wird die momentane Signalspannung in festen, diskreten Zeitabständen mit dem DA- Wandler abgetastet und die digitalen Werte in einem Speicher abgelegt. Der AD- Wandler hat eine Auflösung von 8 bit. Somit können 256 verschiedene diskrete Spannungswerte gemessen werden. Die Rate mit der diese Messungen erfolgen wird als Samplerate oder Abtastrate bezeichnet. Das hier verwendete Oszilloskop hat eine Samplerate von 1 GS/s, d.h. pro Sekunde können maximal 1 Milliarde diskrete Einzelmessungen durchgeführt werden. Die tatsächliche Samplerate hängt von der Größe des Speichers (hier 2500 Messwerte) und der gewählten Zeitauflösung ab. Bei der höchsten Samplerate wird jede Nanosekunde eine Messung durchgeführt. Da der Speicher 2500 Messwerte aufnehmen kann beträgt die Aufzeichnungszeit 2,5  $\mu$ s. Soll das Zeitfenster z.B. auf 250  $\mu$ s erhöht werden, muss die Samplerate auf 10 MS/s reduziert werden. Das Prinzip der Abtastung ist in Abbildung 3 dargestellt. Da-

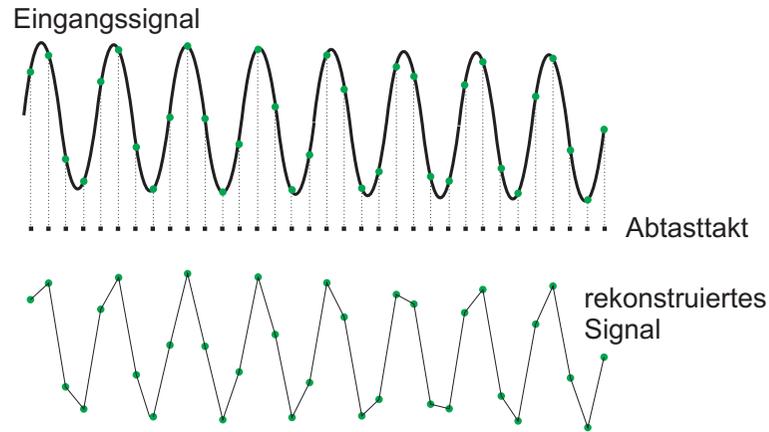


Abbildung 3: Oben: Das Eingangssignal (schwarze Kurve) wird mit einem festen Takt (Abtasttakt) abgetastet und die diskreten Messwerte in einem Speicher abgelegt. Die Messwerte sind als grüne Punkte dargestellt. Unten: Rekonstruktion des Signals durch lineare Interpolation. Zur „Glättung“ des Signals sind auch andere Interpolationsverfahren ( $\sin(x)/x$  Interpolation) möglich.

mit das rekonstruierte Signal möglichst unverfälscht wiedergegeben wird, muss die Abtastrate deutlich höher sein wie die Frequenz des zu messenden Signals. Die gespeicherten Daten können von einem Prozessor weiter verarbeitet werden. So lassen sich verschiedene mathematische Operationen anwenden und es können automatische Messungen durchgeführt werden. Schließlich werden die gespeicherten und eventuell weiter verarbeiteten Werte auf einen Display dargestellt.

### Triggerung

Im Allgemeinen möchte man mit einem Oszilloskop periodische Signale darstellen. Legt man beispielsweise an den y-Eingang ein kontinuierliches Sinussignal, so soll auf der Anzeige stets ein zeitlich konstanter Ausschnitt dieses Signals angezeigt werden. Die Anzeige muss daher mit dem Signal synchronisiert werden. Ohne solch eine Synchronisation würde man auf dem Schirm nach jedem Durchlauf des Signals unterschiedliche Signalausschnitte sehen was zu einem flackernden, unregelmäßigen Bild führt (Abbildung 4 oben). Wir müssen dem Oszilloskop daher mitteilen, dass es immer den gleichen Signalausschnitt darstellen

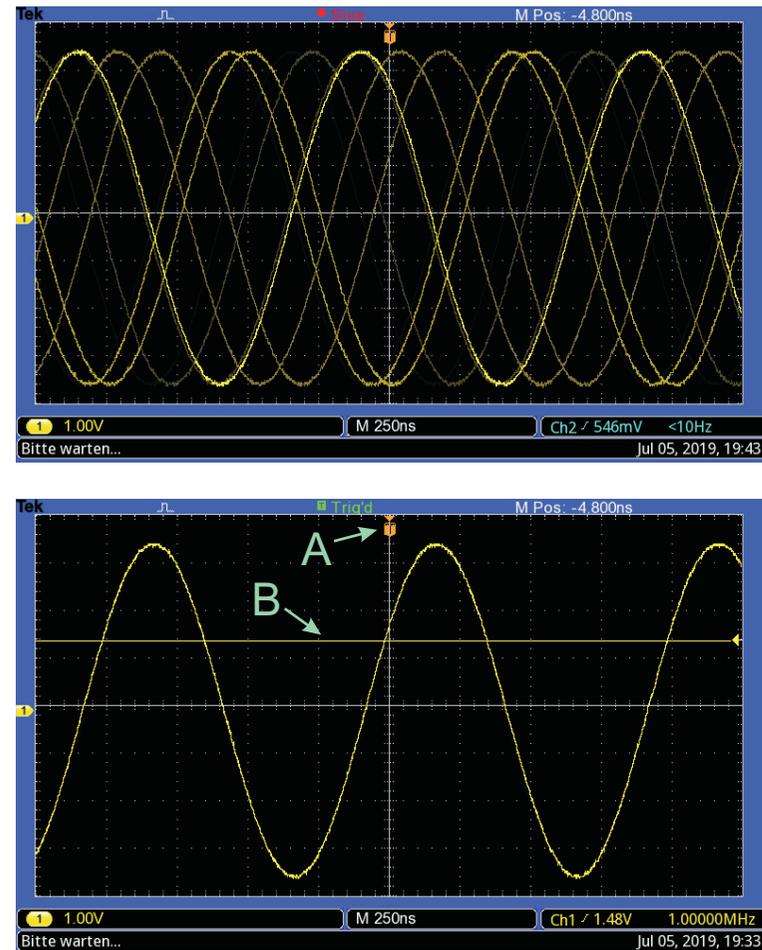


Abbildung 4: Oben: Ungetriggertes Signal. Das Oszilloskop nimmt bei jedem Durchlauf das Signal bei unterschiedlichen Positionen auf. Das angezeigte Bild ist daher nicht stabil und flackert. Unten: Getriggertes Signal.

soll. Dieses Vorgehen wird als Triggern bezeichnet. Bei der sogenannten Flanken-  
 triggerrung (Abbildung 4 unten) beginnt das Oszilloskop erst mit der Dar-  
 stellung wenn an der Position *A* das Signal einen bestimmten Wert *B* schneidet.  
 Dieser sogenannte Triggerlevel lässt sich frei einstellen und wird als waagrechte  
 Linie angezeigt. Nach einem Durchlauf wird die Anzeige abgeschaltet und erst  
 dann wieder eingeschaltet, wenn das Signal wieder diesen Triggerlevel schneidet.  
 Somit wird immer der gleiche Signalausschnitt dargestellt. Ferner kann man  
 noch vorgeben, ob das Signal von unten kommend den Triggerlevel schneidet  
 (Triggern auf die steigende Flanke) oder von oben kommend (Triggern auf die  
 fallende Flanke). In Abbildung 4 unten erfolgt die Triggerrung beispielsweise  
 auf die steigenden Flanke. Auf die genaue Einstellung der Triggerparameter wird  
 an späterer Stelle noch detailliert eingegangen.

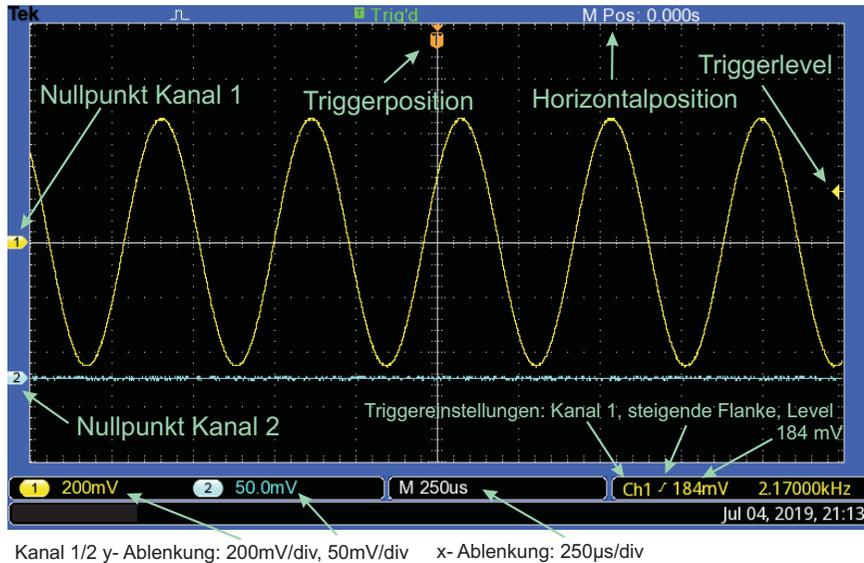


Abbildung 5: Bildschirm des Oszilloskops. Wichtige Einstellungen werden an den Rändern eingeblendet.

**Bedienung des Oszilloskops** Das Display des Oszilloskops (Abbildung 5) besitzt ein Koordinatensystem mit dem Sie die Signale leicht vermessen können. Zusätzlich befindet sich auf dem Bildschirm noch ein Gitternetz bestehend aus

acht mal zehn Kästchen. Die Breite und Höhe eines Kästchens wird im folgenden als DIV bezeichnet (DIV ist die englische Abkürzung für „division“ und bedeutet hier die Unterteilung des Koordinatensystems des Bildschirms). Die horizontale und vertikale Achse des Koordinatenkreuzes besitzen zusätzlich noch eine Feineinteilung von 0,2 DIV.



Abbildung 6: Bedienfeld des Oszilloskops TBS 1072B. Die wichtigsten Bedienelemente sind mit einem blauen Rahmen markiert. 1: Eingangsbuchsen 2: Vertikalablenkung, 3: Horizontalablenkung, 4: Trigger, 5: Multifunktionsknopf.

Die Frontplatte des Oszilloskops ist in vier Bereiche gegliedert:

**1. Vertikalablenkung**

Die Eingangssignale werden über BNC- Buchsen an das Oszilloskop angeschlossen (Bereich 1 in Abbildung 6). Alle Oszilloskope im Praktikum sind für den Zweikanalbetrieb ausgelegt, d.h. sie können gleichzeitig zwei verschiedene Eingangssignale auf dem Schirm darstellen.

Das Feld Vertikalablenkung (Bereich 2 in Abbildung 6) ist symmetrisch für beide Kanäle aufgebaut. Die Bedienelemente der linken Seite sind für den Kanal 1 aus-

gelegt, die der rechten Seite für den Kanal 2. Durch Drücken der Tasten **1** bzw. **2** können Sie die einzelnen Kanäle ein- und ausschalten. Zusätzlich erscheinen am rechten Monitorrand weitere Einstellmöglichkeiten für den gewählten Kanal. Wichtige Optionen sind **Kopplung** und **Tastkopf**. Da wir keinen Tastkopf verwenden muss für diese Einstellung **1X Spannung** gewählt werden. Drücken Sie auf die Taste neben **Kopplung**. Es erscheinen drei Einstelloptionen: **AC** **DC** sowie **Erde**. Die gewünschte Option können Sie mit dem Drehregler (Bereich 5 in Abbildung 6) auswählen und durch drücken auf diesen einstellen.

Falls Sie die Option **Erde** wählen, wird die Eingangsbuchse auf Masse (Erde) geschaltet, so dass 0 V anliegen. Das Signal wird ausgeschaltet und Sie sehen eine waagrechte Linie. Diese Einstellung dient zur Justierung der Nulllinie. Mit den Positionsreglern **Position** im Feld 2 können Sie bei dieser Kopplung die Nulllinie so verschieben, dass diese im Ursprung des Koordinatenkreuzes liegt. Dies ist dann wichtig, wenn Gleichspannungen gemessen werden sollen, da in diesem Fall eine exakte Ausrichtung des Nullpunkts erforderlich ist. Mit den Optionen **AC** **DC** legen Sie die Eingangskopplung fest. Möchten Sie beispielsweise, wie in Abbildung 7 dargestellt, eine Sinusspannung messen, die einen Gleichspannungsanteil besitzt, so ist dies nur bei der direkten Kopplung **DC** möglich. Bei der DC- Kopplung wird das Eingangssignal direkt, ohne weitere Beeinflussung, wie z.B. Filterung, dargestellt. Möchten Sie bei dieser Kopplung quantitative Messungen durchführen, müssen Sie aber zuvor den Nullpunkt mit Hilfe der Kopplung **Erde** einstellen. Die Lage des Nullpunkts wird durch einen gelben (Kanal 1) bzw. blauen (Kanal 2) Pfeil am linken Monitorrand angezeigt (Abbildung 5). In den meisten Fällen ist man aber nur an den Änderungen eines Signals interessiert, d.h. am Wechselspannungsanteil. Um nur diesen Anteil darzustellen muss die Option **AC**<sup>1</sup> eingestellt werden. Bei dieser Kopplung wird zusätzlich ein Hochpassfilter zugeschaltet, der etwaige Gleichspannungsanteile ausfiltert. Bei der AC- Kopplung wird auf dem Oszilloskopschirm dann nur das Sinussignal ohne den Gleichspannungsanteil dargestellt (Abbildung 7 Mitte).

Mit dem Oszilloskop sollen Spannungspegel über mehrere Dekaden gemessen werden können. Da der Analog- Digital- Wandler seine volle Auflösung in einem festen Spannungsbereich besitzt, müssen die Eingangspegel an diesen Bereich angepasst werden. Sollen sehr kleine Spannungen dargestellt werden, so müssen diese verstärkt werden, damit der Spannungsverlauf möglichst den optimalen

<sup>1</sup>AC: alternating current (Wechselstrom), DC: direct current (Gleichstrom), AC/DC: genaue Rockband.

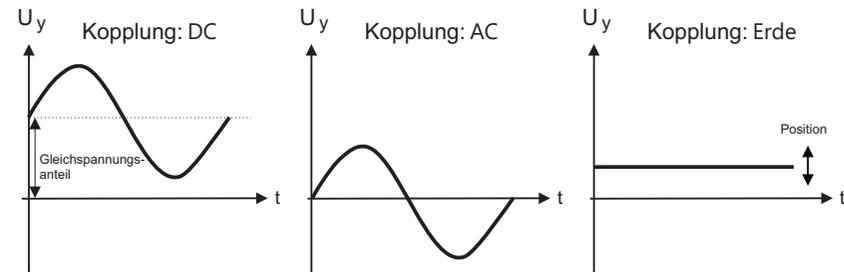


Abbildung 7: Auswirkungen der verschiedenen Eingangskopplungen. Bei der DC-Kopplung wird sowohl der Gleichspannungs- als auch der Wechselspannungsanteil auf dem Schirm angezeigt, während bei der AC-Kopplung nur der Wechselspannungsanteil des Eingangssignals dargestellt wird. In der Erde-Einstellung wird die y-Ablenkung geerdet. Mit dem Positionsregler kann zur Festlegung des Nullpunkts die Nulllinie vertikal verschoben werden.

Bereich des AD- Wandlers ausfüllt. Bei der Darstellung von sehr hohen Spannungen müssen diese entsprechend abgeschwächt werden. Zu diesem Zweck ist zwischen der Eingangsbuchse und dem AD- Wandler eine interne Elektronik zwischengeschaltet, mit dessen Vorwahlschalter der y-Vertikalablenkung eingestellt werden kann. Diese Vorwahlschalter **Scale** befinden sich im Bereich 2 in Abbildung 6. Bei dem hier verwendeten Oszilloskop kann der Ablenkkoeffizient im Bereich von 2 mV/DIV bis 5 V/DIV eingestellt werden. 50 mV/DIV bedeutet beispielsweise, dass bei einer Spannungsänderung von 50 mV, das Signal ein Kästchen in vertikaler Richtung durchläuft. Die aktuelle Einstellung wird am Monitor am linken unteren Rand angezeigt (Abbildung 5).

## 2. Horizontalablenkung

Mit dem Regler **Scale** im Horizontalfeld (Bereich 3 in Abbildung 6) können Sie die Zeitauflösung einstellen. Der Einstellbereich deckt einen Bereich von 5 ns bis 50 s ab. Der aktuell eingestellte Wert wird am Monitor am unteren Rand angezeigt (Abbildung 5). Die Einstellung 50  $\mu$ s bedeutet, dass das Signal 50  $\mu$ s benötigt um ein Kästchen des Bildschirms in horizontaler Richtung zu durchlaufen. Über dem Regler befindet sich ein weiterer Einstellregler **Position** mit dem Sie das Oszilloskopbild in horizontaler Richtung verschieben können.

## 3. Triggerun

Mit dem Potentiometer **LEVEL** kann die Triggerschwelle stufenlos eingestellt werden. Die Triggerschwelle wird beim Drehen als horizontale Linie auf dem Bildschirm angezeigt.

Mit der Taste **Menu** über dem Einstellregler der Triggerschwelle können Sie weitere Einstellungen der Triggerung auswählen. Mit der Taste **Quelle** wählen Sie die Triggerquelle aus. Sie können entweder auf Kanal 1, Kanal 2 oder auf ein externes Signal, welches an der zusätzlichen rechten Eingangsbuchse anliegt, triggern. Mit der Taste **Modus** wählen Sie den Triggermodus. Mögliche Optionen für den Modus sind **Auto** und **Normal**. Im Modus **Normal** erfolgt die Triggerung so wie es zuvor in der Einführung beschrieben wurde. Das Oszilloskop beginnt erst dann mit der Signalaufzeichnung, wenn das Eingangssignal eine bestimmte Schwelle, die Sie mit dem Potentiometer **LEVEL** einstellen können, überschreitet. Liegt die Triggerschwelle außerhalb des Signals stoppt das Oszilloskop und es wird permanent das zuletzt getriggerte Signal angezeigt. Bei der automatischen Triggerung **Auto** wird das Oszilloskop zur Darstellung gezwungen, auch wenn der Triggerlevel außerhalb des Signals liegt. Es werden aktuelle Spannungswerte angezeigt. Da allerdings keine Triggerung vorliegt werden keine stabilen Signale auf dem Display angezeigt. Ob eine Triggerung erfolgt wird durch den Text *Trig d* am oberen Bildschirm angezeigt. Ferner können Sie noch mit der Taste **Anstieg** die Triggerflanke einstellen (**steigend, fallend**).

**Reflexion auf einer Leitung** Trifft eine Welle von einem Medium auf ein anderes mit einer unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit so wird diese an der Grenzschicht teilweise reflektiert. Das gilt auch für elektromagnetische Wellen in einer Leitung wenn sich in diesem Fall der Wellenwiderstand der Leitung ändert. Der Wellenwiderstand hängt vom Leitungsmaterial und der Leitungsgeometrie ab und ist gegeben durch:

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad (1)$$

wobei  $L'$  Induktivität pro Länge und  $C'$  die Kapazität pro Länge sind. Die Einheit des Wellenwiderstands ist Ohm. Breitet sich ein elektrisches Signale entlang einer Leitung aus so können diese an den Änderungen des Wellenwiderstands reflektiert werden. Das passiert vor allem am Ende der Leitung, je nachdem wie die Leitung abgeschlossen ist. Betrachten wir einzelne Pulse auf einer Leitung. Treffen diese auf ein offenes Leitungsende so werden diese hier ohne Phasensprung reflektiert und laufen zurück zum Sender (Reflexion am offenen Ende).

Ist dagegen das Leitungsende kurzgeschlossen so werden die Impulse mit einem Phasensprung reflektiert. Der zurücklaufende Impuls hat die umgekehrte Polarität wie die hinlaufende Welle (Reflexion am festen Ende). Wird dagegen am Kabelende ein Widerstand angeschlossen (Abschlusswiderstand) der dem Wellenwiderstand der Leitung entspricht treten keine Reflexionen auf. Bei diesem Versuch schauen Sie sich mit dem Oszilloskop kurze Pulse auf einer Leitung an. Durch Messung der Laufzeit des reflektierten Puls können Sie die Lichtgeschwindigkeit oder die Kabellänge bestimmen. Schließen Sie am Kabelende einen variablen Widerstand an und beobachten bei welchem Widerstand die Reflexionen verschwinden, können Sie den Wellenwiderstand der Leitung bestimmen.

### Pulsweitenmodulation (PWM)- Dimmung einer LED

Eine LED lässt sich sehr einfach mit der Methode der Pulsweitenmodulation dimmen. Dabei handelt es sich um eine Modulation bei der z.B. eine elektrische Spannung bei konstanter Frequenz zwischen zwei Spannungswerten umgeschaltet wird. Anstatt die Helligkeit einer LED über die Höhe der Betriebsspannung zu steuern, wird per Pulsweitenmodulation einfach die Spannung für eine kurze Zeit ausgeschaltet. Über das Verhältnis zwischen den Spannungsimpulsen und Pausen kann man die gewünschte Effektivspannung erzeugen (Abbildung 8). Das Verhältnis der Periodendauer  $T$  zur Pulsdauer  $t$  wird als Tastgrad (duty cycle). Für den Mittelwert einer Pulsweitenmodulierte Spannung  $U_M$  und den Effektivwert  $U_{eff}$  ergibt sich bei einer Impulsspannung  $U_0$ :

$$U_M = U_0 \frac{t}{T} \quad (2)$$

$$U_{eff} = U_0 \sqrt{\frac{t}{T}}. \quad (3)$$

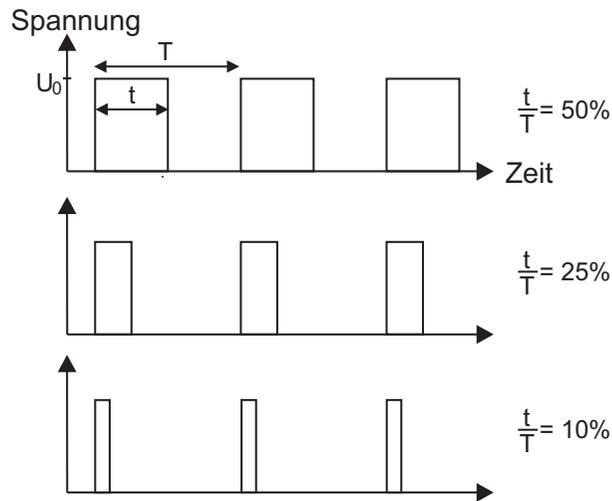


Abbildung 8: Pulsweitenmodulation bei unterschiedlichen Tastgraden.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Bedienung des Oszilloskops

Schließen Sie den Funktionsgenerator an Kanal 1 des Oszilloskop an. Als Signalform wählen Sie am Funktionsgenerator die Stellung Sinus mit einer Frequenz von ca. 100 Hz. Drücken Sie die Kanaltaste **1** und überzeugen Sie sich, dass für die Option **Dämpfung** der Wert **1X Spannung** eingestellt ist. Falls hier ein anderer Wert eingestellt ist, werden Spannungen entsprechend des gewählten Faktors größer angezeigt. Wenn Sie den Trigger richtig eingestellt haben sollten Sie ein stehendes Bild der Sinusspannung erkennen. Untersuchen Sie die Auswirkungen der Regler **Scale** im Vertikal- und Horizontalfeld (Abbildung 6) sowie die Positionsregler für die x- und y-Richtung. Stellen Sie danach die x-Position wieder symmetrisch ein indem Sie auf den Positionregler im Horizontalfeld drücken.

Drücken Sie im Triggerfeld die Taste **Menu** und wählen Sie für den Modus **Auto**. Beobachten Sie durch Drehen des **Level**-Reglers, wie sich das Signal an der Triggerposition verschiebt. Die Triggerposition wird am oberen Bildschirmrand durch ein T-Symbol angezeigt und der Triggerlevel durch eine ho-

izontale Linie. Liegt der Triggerlevel außerhalb des Signals ist natürlich keine Triggerung möglich. Im **Auto**-Modus wird trotzdem, das ungetriggerte Signal angezeigt. Allerdings erhält man hier kein stabiles Bild des Signals. Beobachten Sie was passiert wenn Sie im Triggermenü den Modus **Normal** auswählen sowie die Auswirkung der Triggerflanke (Option **Anstieg**). Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse dieses Abschnitts in Ihr Protokoll.

### Aufgabe 2: Amplituden- und Zeitmessung

**Signal 1-4:** Verbinden Sie den Ausgang 2 des **Signalgenerators** mit Kanal 1 des Oszilloskops und die Versorgungsspannungsbuchse mit dem Netzteil. Stellen Sie die Nulllage ein: Kanal Taste **1** drücken und in der Option **Kopplung** Erde wählen. Verschieben Sie nun die Nulllinie in die vertikale Mitte des Bildschirms. Anschließend die Kopplung wieder auf DC umschalten.

Der Signalgenerator erzeugt mehrere Signale mit unterschiedlicher Frequenz und Amplitude. Mit den beiden Tastern können die einzelnen Signale ausgewählt werden. Das aktuell ausgewählte Signal wird auf einem Display angezeigt.

Verbinden Sie Ausgang 2 des Signalgenerators mit Kanal 1 des Oszilloskops. Führen Sie die folgenden Messungen für die **Signale 1 - 4** zunächst in der DC-Kopplung durch. Sie werden bemerken das Sie auch auf die AC-Kopplung umschalten müssen, da die Signale einen großen Offset haben und Sie so nicht auf das Signal triggern können. Messen Sie für jede Signale die folgenden Größen und Schätzen Sie den Fehler aus den Ablesegenauigkeiten ab. Bei den Cursormessungen ist es sinnvoll nicht kontinuierlich zu messen sondern eine Messung zu speichern. Drücken Sie dazu rechts oben am Oszilloskop die Taste **Run / Stop** und nach den Cursormessungen erneut die Taste wieder damit wieder kontinuierlich gemessen wird.

- Periodendauer bzw. Frequenz.
- Spitze-Spitze Spannung  $U_{SS}$  sowie den Gleichspannungsanteil.
- Skizze des anliegenden Signals. Sie können das Oszilloskopbild auch speichern. Stecken Sie dazu einen USB-Stick in die Buchse unter dem Monitor und drücken Sie dann auf die Taste **Save** oben links neben dem Multifunktionsknopf.

Benutzen Sie bei diesen Messungen die unterschiedlichen Eingangskopplungen sowie die Cursor Funktionen. Um diese auszuwählen drücken Sie die Taste

**Cursor**. Bei der Option **Typ** können Sie zwischen Amplituden- oder Zeitmessung auswählen und bei **Quelle** können Sie den Kanal einstellen an dem die Messung durchgeführt werden soll. Je nachdem was Sie gewählt haben erscheinen auf dem Monitor zwei horizontale oder vertikale Cursor, die Sie mit dem Multifunktionsknopf verschieben können. Möchten Sie den anderen Cursor verschieben, müssen Sie diesen mit den Tasten rechts neben dem Monitor auswählen. Die aktuellen Messwerte werden rechts am Monitor angezeigt.

Viele Größen können auch automatisch vom Oszilloskop bestimmt werden. Drücken Sie dazu die Taste **MEASURE** und wählen Sie den gewünschten Kanal. Es erscheint eine Liste mit verschiedenen Messgrößen die Sie mit dem Multifunktionsknopf auswählen können. Durch Drücken des Knopfs wird die gewählte Funktion eingestellt und am unteren Monitorrand angezeigt. Insgesamt können gleichzeitig 6 Messgrößen angezeigt werden

Um den Fehler möglichst klein zu halten, müssen die vertikalen Skalierungen so eingestellt werden, dass das Signal auf dem Oszilloskop möglichst den gesamten Bildschirm ausfüllt. Dies liegt daran, dass der Analog/Digital- Wandler eine Auflösung von 8 Bit besitzt. Der gesamte y-Bereich kann daher nur in 256 Stufen erfasst werden. Diese Auflösung können Sie aber nur nutzen, wenn das Signal den vollen y-Bereich abdeckt. Ist das Signal nur halb so hoch, verlieren Sie auch die Hälfte der Auflösung. Machen Sie sich dies anhand einer Testmessung klar. Führen Sie eine automatische Messung der Spitze-Spitze Spannung durch. Wählen Sie dazu zunächst die y-Ablenkung so, dass das Signal möglichst den vollen y-Bereich nutzt. Variieren Sie anschließend die y-Ablenkung so, dass das Signal immer kleiner dargestellt wird und beobachten Sie dabei die Anzeige der MEASURE Funktion.

**Signal 5:** Bei **Signal 5** handelt es sich um ein Signal, das periodisch exponentiell abfällt und danach wieder exponentiell ansteigt (Lade- und Entladevorgang eines Kondensators). Hier müssen Sie die DC- Kopplung einstellen. Bei der AC- Kopplung werden die Signale verzerrt. Probieren Sie es aus. Können Sie erklären warum das so ist. Messen Sie entweder für die abfallende oder ansteigende Flanke die Zeit, die das Signal benötigt bis die halbe Spannung  $U_{SS}$  erreicht wird (Halbwertszeit). Stellen Sie die Zeitbasis so ein das Sie einen möglichst großen Zeitbereich vermessen können.

### Signale 6 - 8

- **Signal 6:** Bei diesem Signal werden zufällig einzelne „Wellenpakete“ unterschiedlicher Höhe ausgesendet. Schauen Sie sich diese im Triggermodus Au-

to und AC- Kopplung an. Zentrieren Sie mit dem Positionregler das Signal mittig im Bildschirm und wählen sie die Zeitbasis so, dass Sie ein gesamtes Wellenpaket sehen können. Legen Sie den Triggerlevel etwas über die Nulllinie. Sie werden nur ab und zu ein Wellenpaket sehen welches aufgrund der automatischen Triggerung aber sofort wieder verschwindet. Schalten Sie nun auf manuelle Triggerung um. Nun wird das Wellenpaket so lange dargestellt bis das nächste erneut den Triggerlevel schneidet. Indem Sie den Triggerlevel erhöhen können Sie sich nur die größten Signale „herausfiltern“. Versuchen Sie das höchste Signal darzustellen.

- **Signal 7:** Schauen Sie sich das Signal im Triggermodus Auto und AC- Kopplung an. Zentrieren Sie es wieder mit dem Positionregler und wählen Sie die Zeitbasis so, dass Sie einige Perioden sehen. Legen Sie den Triggerlevel zunächst auf die Nulllinie. Sie werden kein stabiles Bild beobachten. Überlegen Sie sich wo Sie den Triggerlevel hinlegen müssen um eine stabile Anzeige zu bekommen.
- **Signal 8:** Verbinden Sie zusätzlich den Ausgang 1 des **Signalgenerators** mit Kanal 2 des Oszilloskops und schalten Kanal 2 ein. Stellen Sie beide Kanäle auf AC-Kopplung: Bei beiden Signalen handelt es sich um Dreieckssignale wobei das Signal an Kanal 1 verrauscht ist. Falls Sie auf Kanal 1 triggern werden beide Signale nicht stabil dargestellt. Im Zweikanalbetrieb sollten Sie nicht auf ein verrauschtes Signal triggern und in der Regel immer auf das Signal mit den steilsten Flanken. Wenn Sie nun auf Kanal 2 triggern werden beide Signale stabil dargestellt.

**Signal 9: Frequenzspektrum, Fast Fourier Transformation** Entfernen Sie das Kabel an Kanal 2 und schalten Sie nur Kanal 1 an. Verwenden Sie die AC-Kopplung. Signal 9 entspricht einer Schwebung, d.h. eine Überlagerung von zwei Sinussignalen. Zum Ausmessen ist es besser das Signal zu speichern. Drücken Sie dazu rechts oben am Oszilloskop die Taste **Run / Stop**. Bestimmen Sie mit den Cursor die Schwingungsfrequenz  $f_1$  indem Sie z.B. die Zeit von 10 Perioden ausmessen und dann durch 10 teilen. Messen Sie zusätzlich die Schwebungsfrequenz  $f_2$ . Diese entspricht der Einhüllenden des Signals (Abbildung 9). Drücken Sie danach wieder die Taste **Run / Stop**. Beide Frequenzen setzen sich aus der Summe und Differenz zweier Fundamentalfrequenzen zusammen. Diese können Sie durch Fouriertransformation bestimmen. Drücken Sie dazu die Taste **FFT**. Im FFT- Modus ist nun auf der Abszisse die Frequenz

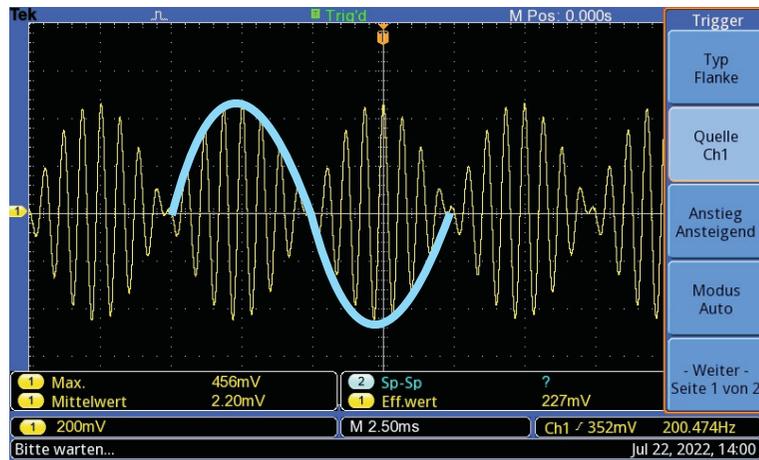


Abbildung 9: Die Frequenz der Einhüllende des Signals entspricht der Schwebungsfrequenz.

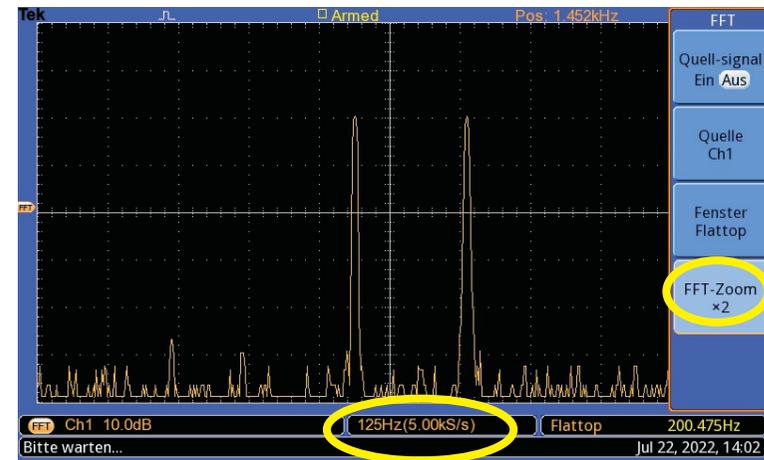


Abbildung 10: Markierung unten: Die Samplerate darf nicht kleiner als 5.00 kS/s sein. Markierung rechts: Zoom.

aufgetragen. Den Frequenzbereich können Sie mit dem Scale- Regler im den Bedienfeld 3 (Abbildung 6) einstellen. Achtung: Je nachdem was Sie hier einstellen ändert sich die Samplerate. Diese wird unten am Bildschirm angezeigt. Dieser Wert darf nicht kleiner als 5.00 kS/s sein (Stichwort: Nyquist- Abtasttheorem). Mit der Taste Zoom rechts neben dem Bildschirm können Sie den Frequenzbereich entsprechend anpassen (Abbildung 10). Messen Sie mit dem Cursor die beiden Frequenzen  $f_I$  und  $f_{II}$ . Taste **Cursor**, Quelle: FFT, Typ: Frequenz. Drücken Sie anschließend die Kanaltaste **1** um wieder in den Zeitbereich zurückzukommen.

**Aufgabe 3: Pulsweitenmodulation**

Verbinden Sie den Ausgang 3 des **Signalgenerators** mit Kanal 1 des Oszilloskops. Mit dem Potentiometer können Sie den Tastgrad variieren und damit die Helligkeit der LED. Messen Sie für zwei Einstellungen die Periode, die Pulsbreite und Pulshöhe. Notieren Sie jeweils den Mittelwert und den Effektivwert (Taste **Measure**).

**Aufgabe 4: Reflexion auf einer Leitung**

Verbinden Sie Ausgang 4 des **Signalgenerators** mit Kanal 1 des Oszillo-

skops. Dieses Signal liefert sehr kurze Pulse. Um diese zu sehen müssen Sie die Zeitaufösung sehr klein einstellen. Wählen Sie diese so das Sie 2 Pulse auf dem Bildschirm sehen. Entfernen Sie nun das Kabel und stecken Sie ein T-Stück auf die Eingangsbuchse von Kanal 1 des Oszilloskops. Schließen Sie Ausgang 4 des **Signalgenerators** an das T-Stück an. An den anderen Anschluss des T- Stück schließen Sie das lange Koaxialkabel (Kabelrolle) an. Beobachten Sie die Reflexionen der einzelnen Pulse. Stecken Sie auf das andere Ende des langen Kabels das kleine Gehäuse mit dem Potentiometer. Am Gehäuse befindet sich ein Schalter mit 3 Stellungen. Bei der Stellung „offen“ ist das Kabelende offen, in Stellung „zu“ ist das Kabelende kurzgeschlossen und in Stellung „R“ wird das Potentiometer an das Ende angeschlossen dessen Widerstand Sie einstellen können. Schauen Sie sich zunächst die Pulse in der Stellung offen und kurzgeschlossen an. Bestimmen Sie die Zeit nach der das reflektierte Signal das Oszilloskop erreicht. Hieraus können Sie die Kabellänge berechnen. Schalten Sie dann auf Stellung „R“ und variieren Sie den Widerstand bis die Reflexion verschwindet. Entfernen Sie das Gehäuse ohne das Potentiometer zu verstellen und messen Sie mit dem Multimeter den eingestellten Widerstand.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Fertigen Sie eine Tabelle an die folgende Spalten besitzt: Skizze der Signalform der Eingangsspannung, Periode, Frequenz,  $U_{SS}$ , Maximalspannung, Minimalspannung, Gleichspannungsanteil sowie für die exponentiell abfallende Spannung noch die Halbwertszeit. Tragen Sie für jede Signalform ihre Messwerte und die dazugehörigen Messfehler in die Tabelle ein und berechnen Sie die restlichen Größen.

Berechnen Sie aus den gemessenen Frequenzen des FFT  $f_I$  und  $f_{II}$  die Größen  $f_2 = \frac{1}{2}(f_{II} - f_I)$  mit ( $f_{II} > f_I$ ) und  $f_1 = \frac{1}{2}(f_{II} + f_I)$ . Vergleichen Sie dies mit der gemessenen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz.

**Zu Aufgabe 3:** Berechnen Sie aus Gleichungen (2) und (3) den Mittelwert und den Effektivwert und vergleichen Sie diese mit ihren gemessenen Werten.

**zu Aufgabe 4:** Berechnen Sie aus der Laufzeit des reflektierten Signals die Länge des Kabels. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt 66% der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Vergleichen Sie den gemessenen Widerstand mit dem Wellenwiderstand des Kabels (Kabel Typ RG58).

## Versuch 26 Schallgeschwindigkeit

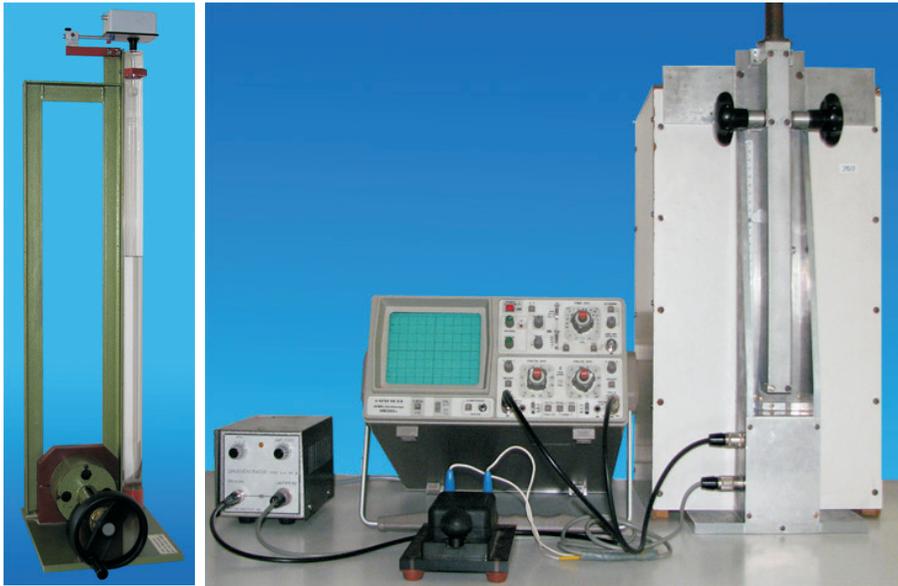


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

#### Versuchsaufbau I

- Steigrohr mit Stethoskop
- Ausgleichsgefäß für Wasser
- Lautsprecher mit Sinusgenerator
- Gasflasche mit Kohlendioxid, Reduzierventil, Drucktastventil und Zuführungsschläuchen für das Gas; Streichhölzer zur Kontrolle

#### Versuchsaufbau II

- Oszillograph HM 203
- Sinusgenerator mit den Frequenzen 2 kHz, 5 kHz, 10 kHz
- Kasten mit Schalldämmung, darin eingebaut: Lautsprecher und ein verschiebbares Mikrofon

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen über Wellen (transversale und longitudinale Wellen, stehende und fortschreitende Wellen, Reflexion von Wellen, Schallausbreitung, Quincke'sches Rohr. Desweiteren sind Grundkenntnisse in der Bedienung und dem Funktionsprinzip eines Oszilloskops notwendig. Informationen diesbezüglich entnehmen Sie der Versuchsbeschreibung: *Versuch 25, Oszilloskop*, und der angegebenen Literatur.

*Verständnisfragen:*

1. Was ist Schall? Beschreiben Sie den physikalischen Charakter einer Schallwelle. Warum kann es in Flüssigkeiten und Gasen keine Transversalwellen geben (höchstens an Grenzflächen)? Welchen Frequenzbereich kann der Mensch hören? Was ist die Größenordnung der Wellenlängen?
2. Welche Parameter eines Materials bestimmen die Schallgeschwindigkeit?
3. Warum ist die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten oder Festkörpern größer als in Gasen?
4. Zur Schallgeschwindigkeit in Gasen: Hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit etwas mit der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung der Gasatome/Gasmoleküle zu tun?

5. Was ist eine stehende Welle und wie kann man sie erzeugen?
6. Wie hängen Wellenbauch-Wellenknoten und Druckbauch-Druckknoten zusammen? Welche Situation liegt also im Resonanzfall am geschlossenen/offenen Ende vor?
7. Eine andere Möglichkeit die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen, ist die Messung der Wellenlänge einer fortlaufenden Schallwelle mittels der Phasenverschiebung zwischen Lautsprecher und Mikrofon. Wieso genügt es hier nicht, allein das Signal des Mikrofons zu beobachten?
8. Wieso kann ich jemanden hinter einem (großen) Baum hören aber nicht sehen? Welche Materialien eignen sich gut für die Schallabsorption (vergleiche Tonstudio)?

## IV Aufgabe

- Die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Kohlendioxid ist durch Beobachtung stehender Wellen im Quincke'schen Rohr zu bestimmen.
- Die Änderung der Laufzeit einer Schallwelle zwischen dem Lautsprecher und dem Mikrofon wird in Abhängigkeit des Abstandes Mikrofon-Lautsprecher gemessen; diese Messung wird nur für Luft durchgeführt.

## V Grundlagen

Die Schallgeschwindigkeit in Gasen kann mit Hilfe stehender Wellen gemessen werden. Dazu benötigt man einen Schallgeber (Lautsprecher) und ein Rohr, an dessen Ende sich ein Reflektor (Wasser) befindet (Quincke'sches Rohr). Die vom Lautsprecher ausgehende Schallwelle trifft auf die Wasseroberfläche und wird an dieser reflektiert. Die reflektierte Welle interferiert mit der einfallenden, so dass es zur Ausbildung einer stehenden Welle kommen kann.

Berücksichtigt man, dass die schwingende Luftsäule am Ort des Schallgebers einen Wellenbauch und am Reflektor einen Wellenknoten aufweist, so gilt im Fall der Resonanz für den Abstand  $h$  der Luftsäule (Abstand zwischen Sender und Empfänger):

$$h = \frac{2n + 1}{4} \lambda, \quad (1)$$

wobei für  $n \in \mathbb{N}$  gilt und  $\lambda$  die Wellenlänge bezeichnet. Die Schallgeschwindigkeit  $c$  ist mit  $\lambda$  und der Frequenz  $\nu$  durch  $c = \nu \lambda$  verknüpft. Überlegen Sie sich, dass nur im Resonanzfall die Tonintensität einen erheblichen Wert erreicht und dass nicht etwa beim Heben des Wasserspiegels, Maxima und Minima an der oberen Rohröffnung vorbeiwandern.

Die Schärfe der Resonanz hängt von der Dämpfung des Resonators ab (siehe Versuch 13). Durch Variierung der Resonatorlänge  $h$  kann so ein ein Lautstärkemaximum eingestellt werden und damit indirekt über die Wellenlänge  $\lambda$  die Schallgeschwindigkeit  $c$  bestimmt werden. Eine weitere Möglichkeit die Schallgeschwindigkeit in Gasen zu bestimmen ist die Laufzeitmessung einer fortschreitenden Schallwelle. Bei diesem Experiment befindet sich ein Mikrofon in einem einstellbarem Abstand von einem Lautsprecher entfernt. Als Signalquelle für den Lautsprecher wird ein Sinusgenerator verwendet. Das Signal des Sinusgenerators wird gleichzeitig an den Lautsprecher und an ein Oszilloskop angeschlossen. Die Signalzufuhr zum Lautsprecher kann durch einen Taster unterbrochen werden. Der Lautsprecher konvertiert das Signal des Sinusgenerators in eine Schallwelle gleicher Frequenz, die sich mit der zu bestimmenden Schallgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Nach Durchlaufen einer einstellbaren Strecke  $h$  gelangt die Schallwelle zu einem Mikrofon, wird hier in ein proportionales elektrisches Signal umgewandelt und am zweiten Kanal des Oszilloskops dargestellt. Auf dem Oszilloskop werden nun zwei Signale dargestellt. Kanal 1 zeigt das Signal des Sinusgenerators, das direkt den Lautsprecher ansteuert, Kanal 2 zeigt das um die Schallgeschwindigkeit zeitverzögerte Signal

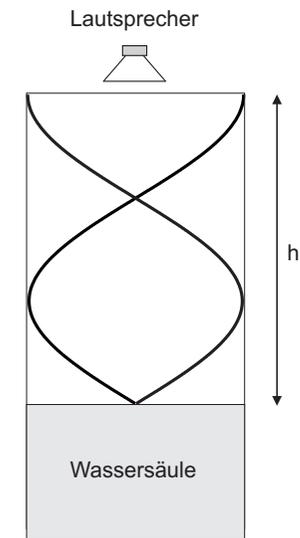


Abbildung 2: *Stehende Welle im Quincke'schen Rohr.*

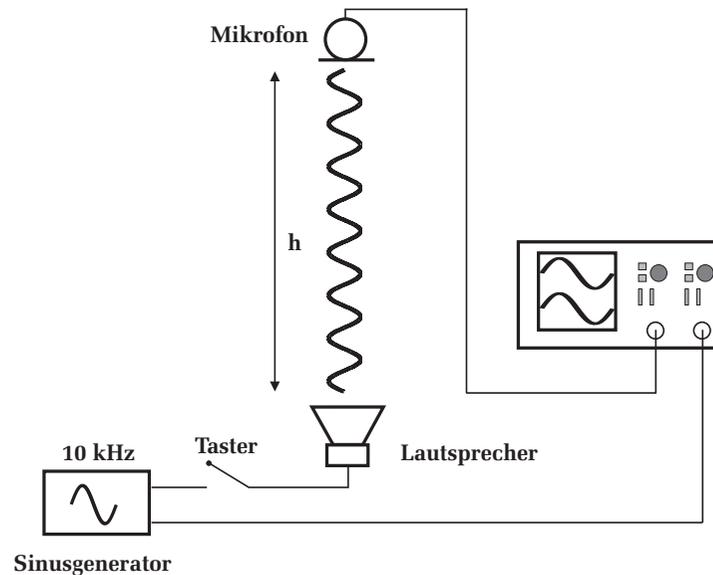


Abbildung 3: Skizze zum Versuchsaufbau II.

des Mikrofons. Um nun die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen, misst man die Phasenverschiebung der Signale. Das vom Sinusgenerator in das Oszilloskop direkt eingespeiste Signal wird nahezu ohne Zeitverzögerung dargestellt. Dagegen benötigt das Signal, das vom Lautsprecher zum Mikrofon läuft, die Zeit

$$\tau = h/c. \quad (2)$$

Hieraus kann durch Messung der Laufzeit der Schallwelle zwischen Lautsprecher und Mikrofon und durch Messung der Laufstrecke  $h$  die Schallgeschwindigkeit mit Hilfe eines Oszilloskops bestimmt werden.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft und $\text{CO}_2$ mit dem Quincke'schen Rohr

Das Quincke'sche Rohr ist zunächst mit Luft gefüllt. Stellen Sie am Sinusgenerator eine Frequenz zwischen 2 kHz bis 2,5 kHz ein. Die Lautstärke kann sehr gering eingestellt werden. Durch Heben und Senken des Wasserspiegels wird die effektive Länge des Rohres variiert. Bei bestimmten Höhen wird die Resonanzbedingung erfüllt. In diesem Fall ist ein deutlicher Ton zu hören (Lautstärkemaxima). Zur Vermeidung psychologischer Nachwirkungen beim Einstellen blickt derjenige, der die Resonanz aufsucht, nicht auf die Skala; die Ablesung erfolgt durch den Partner. Suchen Sie die Positionen der Lautstärkemaxima auf. Finden Sie mindestens zehn Lautstärkemaxima. Nach der Messung führt der Praktikumpartner diese erneut durch. Notieren Sie sich die eingestellte Frequenz.

Messen Sie die Schallgeschwindigkeit in  $\text{CO}_2$ : Lösen Sie die Rändelschraube an der Stativstange des Lautsprechers und schwenken Sie den Lautsprecher zur Seite, so dass die Rohröffnung gut zugänglich ist. Drehen Sie den Flüssigkeitsspiegel ganz nach unten und platzieren Sie den  $\text{CO}_2$  Einfüllschlauch etwas über der Wasseroberfläche, so dass das spezifisch schwerere  $\text{CO}_2$  die Luft aus dem Rohr von unten nach oben verdrängen kann. Durch Betätigung des Drucktastenventil wird die Röhre mit  $\text{CO}_2$  befüllt. Es ist wichtig, dass die gesamte Röhre nur mit  $\text{CO}_2$  gefüllt ist und kein Luftanteil mehr vorhanden ist. Als Probe können Sie ein brennendes Streichholz verwenden, das bei vollständiger Befüllung mit  $\text{CO}_2$  sofort erlischt. Schwenken Sie den Lautsprecher wieder über das Rohr und fixieren Sie diesen mit der Rändelschraube. Falls Sie während der Messung den Wasserspiegel absenken, so müssen Sie die dadurch angesaugte Luft durch erneutes Nachströmenlassen von Gas verdrängen.

Die Bestimmung der Resonanzstellen der schwingenden  $\text{CO}_2$ -Säule erfolgt wie bei der Messung in Luft. Notieren Sie sich zur Umrechnung der gemessenen Schallgeschwindigkeiten auf Normalbedingungen die Raumtemperatur! Nach Versuchsende das Hauptventil schließen und den Wasserspiegel wieder ganz nach unten absenken!

### Aufgabe 3: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch eine Laufzeitmessung

- Zur Bedienung des Oszilloskops: Die Messung wird mit einer Frequenz von 10 kHz durchgeführt. Die vom Frequenzgenerator erzeugte Wechselspannung wird auf den Lautsprecher und auf Kanal 1 des Oszilloskops (Trig. Ausg.-Buchse am Frequenzgenerator) gegeben.

Ein Mikrofon empfängt die Schallwelle und wandelt sie in eine Wechselspan-

nung von 10 kHz um, die auf den y-Eingang des Kanal 2 des Oszilloskops angeschlossen wird.

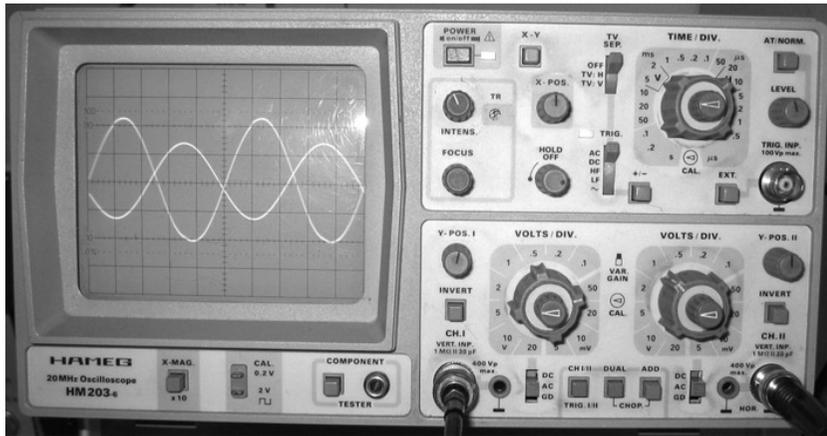


Abbildung 4: Oszilloskop zur Messung der Phasenverschiebung.

Überprüfen Sie, ob der innere rote Drehknopf des TIME / DIV.-Einstellreglers in der Stellung CAL. steht, d.h. der Pfeil nach links bzw. rechts je nach Typ des Oszilloskops zeigt. Nur dann sind die Zeitangaben am Einstellknopf kalibriert (Abbildung 4).

Beim Drücken der Taster sollten auf dem Oszilloskop zwei Sinussignale sichtbar sein. Stellen Sie mit Hilfe des Spannungsbereichsschalters und der Ablenkgeschwindigkeit das Bild der Sinusspannung in der gewünschten Größe ein und legen Sie einen markanten Signalpunkt (z.B. Nulldurchgang) auf irgendeinen Rasterpunkt des Oszillographenschirmes. Vergrößert man den Abstand zwischen Mikrofon und Lautsprecher, so wandert das Signal auf dem Oszilloskop nach rechts: die Phase der am Mikrofon einlaufenden Welle verschiebt sich gegenüber der Phase der am Kanal 1 anliegenden Sinusspannung. Entspricht die Abstandsänderung gerade einer Wellenlänge, so ist das Signal auf dem Schirm entsprechend der um  $\tau = \lambda/c$  vergrößerten Laufzeit um eine Periode verschoben (Phasenverschiebung  $360^\circ$ ). Bestimmen Sie zweimal alle Abstände zwischen Mikrofon und Lautsprecher, bei denen das Oszilloskopbild um jeweils eine Periode weitergewandert ist.

b Bestimmen Sie aus der eingestellten x-Ablenkgeschwindigkeit durch Ablesen der Periodenlänge die Frequenz  $\nu$  des Frequenzgenerators.

**Aufgabe 4:** Beobachten Sie zum Schluss das Spektrum Ihrer Stimme auf dem Oszilloskop. Dazu Deckel des Kastens öffnen.

**Aufgabe 5:** Falls Sie die Phase genauer messen möchten, lesen Sie die Bemerkung im Anhang.

**Aufgabe 6:** Der Frequenzgenerator liefert auch Sinussignale mit 2 kHz und 5 kHz. Sie können sich damit überzeugen, dass die Schallgeschwindigkeit nicht von der Frequenz abhängt (qualitative Messung).

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Aus den gemessenen Höhen der Luftsäule im Resonanzfall (Mittelwert bilden) ist die Schallgeschwindigkeit in Luft bzw. Kohlendioxid zu bestimmen; dabei benutzen Sie nur die Höhendifferenzen. Die Schallgeschwindigkeit in Gasen ist durch die folgende Formel wiedergegeben:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \quad (3)$$

wobei  $\kappa$  den Adiabatenkoeffizienten (für Luft  $\kappa=1,40$ , für  $\text{CO}_2$   $\kappa = 1,30$ ),  $R$  die allgemeine Gaskonstante,  $T$  die Temperatur des Gases in Kelvin und  $M$  die Molekülmasse (Luft:  $M=29$  g/mol,  $\text{CO}_2$ :  $M=44$  g/mol) bezeichnen.

Zur Umrechnung der gemessenen Schallgeschwindigkeit auf Normalbedingungen benutzen Sie die Gleichung:

$$\frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}. \quad (4)$$

Benutzen Sie diese Formel, um die bei Zimmertemperatur gemessenen Werte auf  $0^\circ\text{C}$  umzurechnen. Vergleichen Sie weiterhin das Verhältnis der gemessenen Schallgeschwindigkeiten  $c_{\text{Luft}}/c_{\text{CO}_2}$  für die beiden Gase mit dem entsprechenden Wert den Sie aus Gleichung (3) gewinnen.

**Zu Aufgabe 3:** Berechnen Sie den Mittelwert von  $\lambda$  und dessen Fehler. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit gemäß

$$c = \nu\lambda \quad (5)$$

verwenden Sie den sehr viel genaueren Wert von 10 kHz, der am NF-Generator fest eingestellt werden kann. Auch hier ist  $c$  wieder auf Normalbedingungen umzurechnen.

### VIII Anhang

Beim Aufsuchen der Abstände an denen die Phase gerade um  $360^\circ$  verschoben ist, d.h. das Schirmbild wieder gleich aussieht, werden Sie festgestellt haben, dass dies nicht sehr genau durchzuführen ist. Bei einer Ablenkung von  $30 \mu\text{s}/\text{cm}$  ist der Abstand zwischen zwei Nulldurchgängen (d.h.  $180^\circ$ ) ca. 17 mm. Ein Ablesefehler von 1 mm entspricht in diesem Fall einem Phasenfehler von  $\pm 10^\circ$ . Falls man wie hier die Phase zweier Sinussignal gleicher Frequenz vergleichen will, gibt es ein empfindlicheres Verfahren: Man gibt das eine Signal auf die Y-Ablenkplatten und das andere anstelle des Sägezahns auf die X-Ablenkplatten. Dazu müssen Sie das Oszilloskop durch Drücken der Taste X - Y in den XY-Modus schalten. Auf dem Schirm entsteht eine sogenannte Lissajous-Figur. Die vertikale und horizontale Größe der Ellipse können Sie mit den beiden Y-Reglern einstellen.

Gehen wir zunächst zur Vereinfachung davon aus, dass die beiden Amplituden gleich groß sind, so hat der Leuchtpunkt in jedem Augenblick die Koordinaten

$$x = a \sin(\omega t) \tag{6}$$

$$y = a \sin(\omega t + \alpha), \tag{7}$$

wobei  $\alpha$  den Phasenwinkel zwischen den beiden Signalen beschreibt. Die Figur ist in einem Quadrat der Seitenlänge  $2a$  eingeschlossen (Abbildung 5).

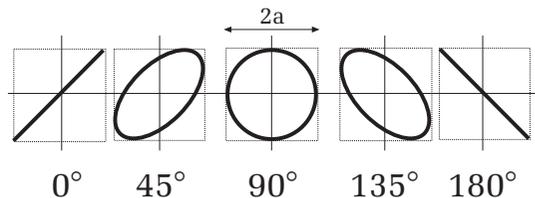


Abbildung 5: Lissajous- Figuren bei unterschiedlichen Phasenwinkeln.

Einige Spezialfälle:

$\alpha = 0^\circ, y = x$ : der Strahl läuft auf einer Diagonalen des Quadrates hin und her.

$\alpha = 180^\circ, y = -x$ : der Strahl läuft auf der orthogonal entgegengesetzten Diagonalen.

$\alpha = 90^\circ(-90^\circ), y = x$ : der Strahl beschreibt eine rechts- oder linkslaufende Kreisbahn.

Im allgemeinen Fall handelt es sich um in einem Quadrat einbeschriebene Ellipsen, deren Hauptachsen in Richtung der Diagonalen liegen. Für  $2a=4 \text{ cm}$  und  $\alpha=10^\circ$  ergibt sich für die kleine Hauptachse  $0,3 \text{ cm}$ , d.h. die Ellipse ist ca.  $0,5 \text{ cm}$  breit, was man bequem von einem Strich unterscheiden kann! Ist die X-Amplitude nicht gleich der Y-Amplitude, so muss man an Stelle des Quadrates ein Rechteck annehmen.

## Versuch 31 Optische Abbildung

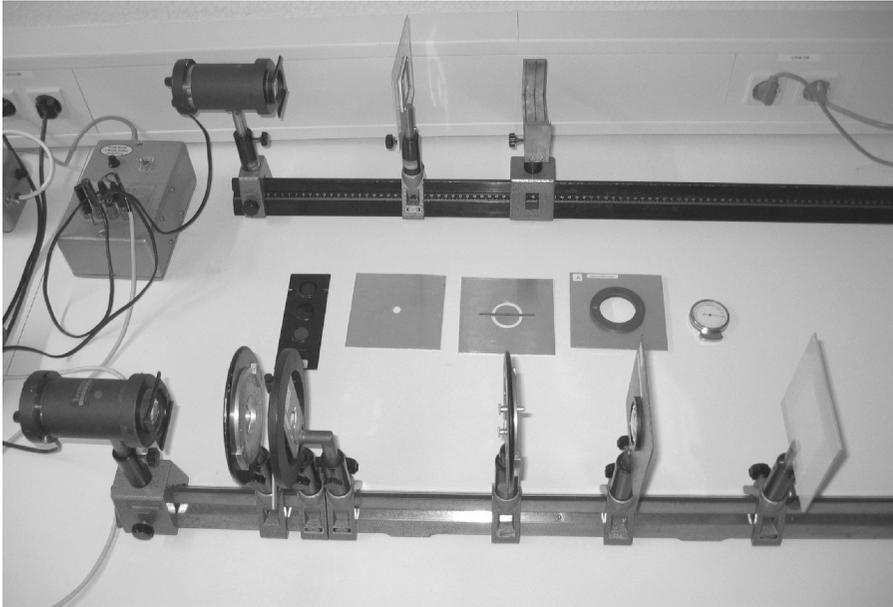


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Optische Abbildung.

### I Messaufbau

- Optische Schiene.
- Lampe mit Kondensator und verschiebbaren Farbfiltern.
- 2 bikonvex Linsen, 1 Achromat- Linse.
- Loch- und Ringblende.
- Fassung zur Aufnahme der Linsen und Blenden.
- Schirm.

- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter.
- verstellbarer Messspalt (Spaltbreite ist in mm geeicht).
- Zwischenbild mit mm-Einteilung.

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer,
- W. Demtröder *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, Springer- Verlag.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Abbildung durch Linsen, Linsenfehler (speziell sphärische und chromatische Aberration), Snelliussches Brechungsgesetz, Dispersion, graphische Konstruktion der optischen Abbildung, Mikroskop: Strahlengang und Auflösungsvermögen, Beugung am Spalt, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung.

*Verständnisfragen:*

1. Konstruieren Sie die Abbildung eines Objekts durch eine Sammellinse und eine Streulinse.
2. Was ist der Unterschied zwischen den Begriffen Abbildungsmaßstab und Vergrößerung?
3. Was ist die physikalische Ursache für die chromatische- und sphärische Aberration?
4. Wie funktioniert die Entspiegelung einer Linse?
5. Wie groß ist das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges? Wodurch wird es limitiert? Wie können kleinere Gegenstände betrachtet werden?

6. Aus welchen optischen Elementen besteht ein Mikroskop?
7. Was ist die Aufgabe des Objektivs, was die Aufgabe des Okulars? Was ist das Messprinzip des Mikroskops?
8. Wie ist die Auflösung definiert?
9. Welche Vergrößerung kann man mit einem professionellen Mikroskop erreichen?
10. Auf einem Mikroskopobjektiv sind folgende Werte abgedruckt: Vergrößerung=40, Tubuslänge=160, NA=0,65. Wie groß ist die Brennweite des Objektivs und wie hoch ist das Auflösungsvermögen wenn mit grünem Licht beleuchtet wird?
11. Qualitativ: Was ist ein Elektronenmikroskop und warum erreicht man damit eine so viel höhere Auflösung als mit einem optischen Mikroskop?

## IV Aufgabe

- Durch variieren der Bild- und Gegenstandsweite sollen die Eigenschaften der optischen Abbildung untersucht werden (Abbildungsmaßstab, virtuelles und reelles Bild, etc.)
- Es ist die Brennweite einer Sammellinse zu messen. Die chromatische Aberration ist experimentell zu untersuchen und der Einfluss der sphärischen Aberration ist qualitativ zu beobachten.
- Bauen Sie ein Mikroskop auf einer optischen Bank auf. Messen Sie a) die Gitterkonstanten der beiden Strichgitter, b) das Auflösungsvermögen des Objektivs in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Objektivs (quantitativ) und der Wellenlänge (qualitativ).

## V Grundlagen

### Reele und virtuelle Bilder

Bei einer optischen Abbildung werden die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel nach Durchgang durch ein optisches System (Linsen, Spiegel, Auge, „Lochkamera“) in einem Punkt, dem Bildpunkt, wieder vereinigt. Ein

einfaches Beispiel für ein abbildendes optisches System ist der Planspiegel (Abbildung 2). Die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel werden am Spiegel nach dem Reflexionsgesetz in den unteren Halbraum divergent reflektiert. Dadurch scheinen für einen Beobachter alle Lichtbündel aus einem Punkt hinter dem Spiegel zu kommen, obwohl die reflektierten Lichtbündel diesen Bildpunkt überhaupt nicht erreichen. Das Spiegelbild wird daher auch als virtuelles Bild bezeichnet. Allgemein entsteht ein virtuelles Bild im Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung divergenter Lichtbündel. Solche Bilder lassen sich nicht mit einem Schirm (Mattscheibe) auffangen.

Im Gegensatz zum Planspiegel erzeugt ein sphärischer Spiegel ein reelles Bild. Das Abbildungsprinzip beruht auch hier allein auf dem Reflexionsgesetz. Allerdings bedingt die Krümmung der Spiegeloberfläche, dass die Lichtbündel nicht divergieren sondern sich im Bildpunkt schneiden. Allgemein entsteht ein reelles Bild im Schnittpunkt von Lichtbündeln, die vom gleichen Objektpunkt ausgehen. Das reele Bild lässt sich mit einem Schirm auffangen.

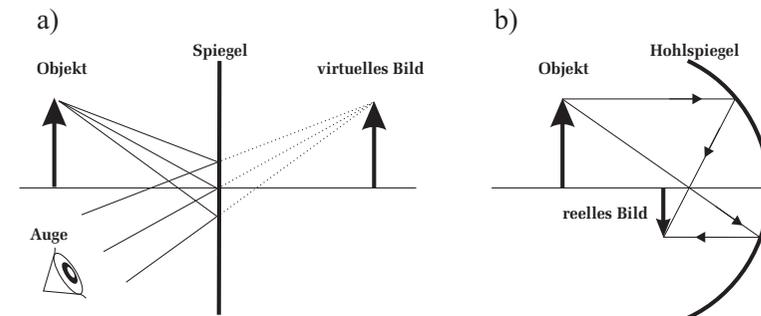


Abbildung 2: a) Virtuelles Bild eines Planspiegels. b) Reelles Bild eines Hohlspiegels.

### Brechung an sphärischen Flächen

Treffen **parallel** zur optischen Achse verlaufende Lichtbündel auf eine transparente, kugelförmige Fläche, die das Medium 2 begrenzt, so werden alle Lichtbündel in einem Punkt auf der optischen Achse gebrochen (Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser Teilbündel wird als Brennpunkt  $F$  bezeichnet. Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Kugeloberfläche entlang der optischen Achse, heißt Brennweite  $f$ . Mit Hilfe einfacher geometrischen

Überlegungen und unter Berücksichtigung des Brechungsgesetz folgt für die Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \frac{1}{r}, \tag{1}$$

wobei  $n_i$  die Brechungsindizes der beiden Medien darstellen und  $r$  der Radius der Kugelkrümmung ist. Diese Gleichung gilt allerdings nur für kleine Einfallswinkel bzw. nur für Lichtbündel, die in einem geringen Abstand  $h$  zur optischen Achse auf die Linse treffen. In der Literatur wird diese Näherung auch als paraxiale oder als Gaußsche Näherung bezeichnet. Bereits mit einer einzigen sphärischen

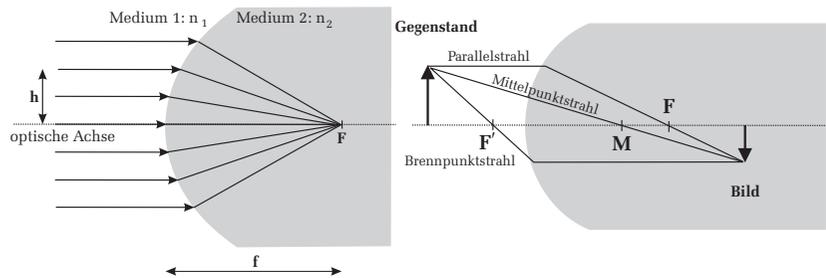


Abbildung 3: Links: Brechung von parallelen Lichtbündeln an einer sphärischen Fläche. Rechts: Abbildung eines Gegenstandes durch ein Kugelsegment.

Grenzfläche lässt sich ein Gegenstand abbilden (Abbildung 3 rechts). Um das Bild des Gegenstandes geometrisch zu konstruieren, bedarf es lediglich zweier Strahlenbündel<sup>1</sup>, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen. Besonders einfach ist die Bildkonstruktion, wenn man spezielle Lichtbündel einzeichnet, nämlich einen der gegenstandsseitig parallel zur optischen Achse verläuft und einen der durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugeloberfläche geht. Mittelpunktstrahlen fallen senkrecht auf die Kugeloberfläche und werden daher nicht gebrochen. Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie zu Brennpunktstrahlen werden (siehe Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entspricht dem abgebildeten Bildpunkt. Zur Konsistenzprüfung kann zusätzlich noch ein dritter Strahl eingezeichnet werden: Aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges folgt, dass ein Strahl, der im Medium 2 parallel zur optischen Achse läuft, im Medium 1 die optische Achse im gegenstandsseitigen Brennpunkt  $F'$  schneidet. Von der Gegenstandsseite aus gesehen bedeutet dies, dass ein Brennpunktstrahl zu einem

<sup>1</sup>Der Begriff Strahlenbündel und Strahl wird in diesem Text synonym verwendet.

bildseitigen Parallelstrahl wird.

Zusammenfassend sind bei der geometrischen Abbildung eines Gegenstandspunktes, folgende drei Regeln zu beachten:

1. Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt
2. Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen
3. Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen

### Linsen

Linsen, speziell sphärische Linsen, bestehen aus einem transparenten Material mit dem Brechungsindex  $n$  und sind durch eine kugelförmige Fläche begrenzt. Trifft ein Lichtbündel auf die Linse ist zu berücksichtigen, dass der Strahl insgesamt zweimal an den Grenzflächen mit den Radien  $r_1, r_2$  gebrochen wird. Für dünne Linsen, bei denen die Dicke klein gegenüber der Krümmungsradien ist, ergibt sich für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \tag{2}$$

Die Brennweite hängt also nur vom Brechungsindex und von den Radien der Grenzflächen ab. Je nach Vorzeichen und Kombination der Grenzflächen definiert man verschiedene Linsentypen. Eine Zusammenfassung kann Abbildung 4 entnommen werden. Bei der geometrischen Konstruktion der Abbildung durch eine dünne Linse, gelten die gleichen Merksätze wie bei der Brechung an einer einzelnen sphärischen Fläche: **Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt, gegenstandsseitige Parallelstrahlen werden zu bildseitigen Brennpunktstrahlen und gegenstandsseitige Brennpunktstrahlen werden zu bildseitigen Parallelstrahlen.** Die Brechung erfolgt dabei an der Mittelebene der Linse (Abbildung 5). Es soll nochmals betont werden, dass dies nur für dünne Linsen gilt. Im allgemeinen Fall hat eine Linse zwei sogenannte Hauptebenen, an denen die Brechungen erfolgen. Nur für dünne Linsen fallen diese Hauptebenen zusammen. Bei der optischen Abbildung mit einer Linse sind die Größen Bildweite  $b$ , Gegenstandsweite  $g$  und Brennweite  $f$  durch die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{3}$$

miteinander verknüpft. Bildweite und Gegenstandsweite stehen im direkten Zusammenhang mit der Gegenstandsgröße  $G$  und der Bildgröße  $B$ . Man definiert

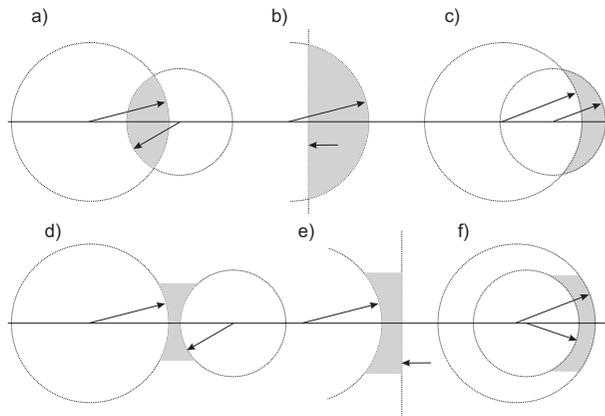


Abbildung 4: *Klassifizierung von Linsen: a) bikonvex b) plankonvex c) positiver Meniskus d) bikonkav e) plankonkav f) negativer Meniskus.*

den Abbildungsmaßstab  $\beta$  durch:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \tag{4}$$

der sich mit Gleichung (3) schreiben lässt als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{b}{f} - 1. \tag{5}$$

**Messung der Brennweite einer Linse**

Die Bestimmung der Brennweite einer Linse kann prinzipiell durch Messung der Gegenstands- und Bildweite unter Anwendung der Abbildungsgleichung (3) erfolgen. Allerdings ist diese Methode in der Regel mit größeren Fehlern behaftet, da die Abstände absolut gemessen werden. Dies setzt voraus, dass die Linse gut zentriert in die Fassung montiert sein muss. Für reale, „dicke“ Linsen kommt hinzu, dass sich die Abstände  $g$  und  $b$  nicht auf die Mittelebene sondern auf die Hauptebenen beziehen, deren genaue Lage im allgemeinen unbekannt ist. Diese Nachteile treten bei der sogenannten *Bessel-Methode* nicht auf. Bei diesem Verfahren (Abbildung 6) wird ausgenutzt, dass es bei einem konstanten Abstand

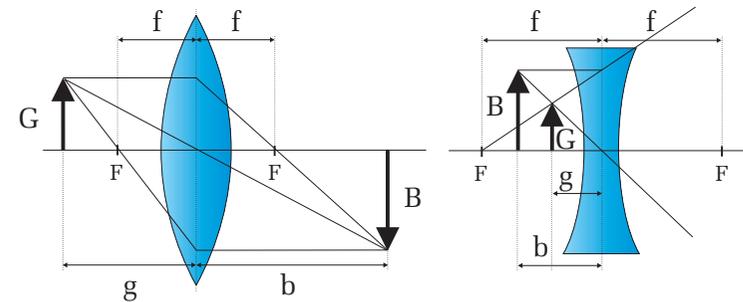


Abbildung 5: *Optische Abbildung durch eine dünne bikonvex Linse und eine bikonkav Linse.*

$L > 4f$  zwischen Bild und Gegenstand zwei Linsenstellungen gibt, die zu einer scharfen Abbildung führen. Bei einer Stellung findet eine Vergrößerung, bei der anderen eine Verkleinerung statt. Ist  $d$  der Abstand zwischen diesen beiden Stellungen, der über eine Differenzmessung recht genau ermittelt werden kann, so gilt für die Brennweite:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{6}$$

Die Genauigkeit des Besselverfahrens reicht aus, um bestimmte Abbildungsfehler (Linsenfehler) zu untersuchen. Bei sphärischen Linsen gilt Gleichung (3) nur für achsennahe Strahlen. Lichtbündel, die auf weiter außen von der optischen Achse gelegenen Zonen der Linse treffen, werden nicht mehr in den gleichen Punkt fokussiert und haben daher eine etwas andere Brennweite als das Linsenzentrum. Dieser Linsenfehler wird als sphärische Aberration bezeichnet. Es gibt mehrere Methoden die sphärische Aberration einer Linse zu minimieren. Am einfachsten gelingt dies durch Abblenden d.h. mit Hilfe einer Lochblende werden nur achsennahe Lichtbündel zur Abbildung zugelassen. Allerdings geht dies auf Kosten der Lichtstärke, die proportional zur Fläche der Linse ist. Je kleiner der Blendendurchmesser, desto schärfer ist zwar das Bild aber auch umso dunkler. Eine andere Methode ist die Verwendung von asphärischen Linsen. Solche Linsen sind so geschliffen, dass auch achsenferne Strahlen in den selben Punkt fokussiert werden wie achsennahe. Die Herstellung dieser Linsen ist allerdings sehr aufwendig, so dass diese vorwiegend nur in teuren Spezialoptiken eingesetzt werden.

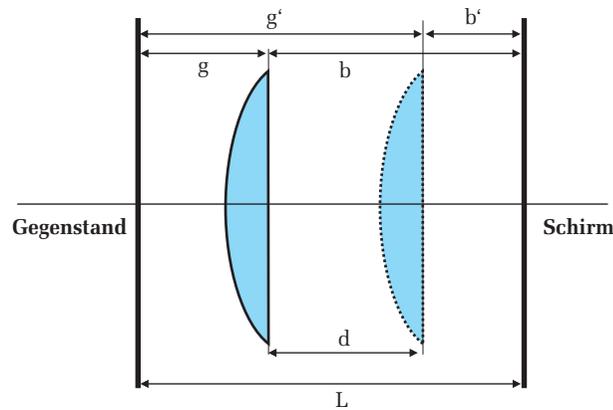


Abbildung 6: Prinzip des Bessel-Verfahren zur Brennweitenbestimmung.

Ein weiterer Linsenfehler ist die chromatische Aberration. Bei der Abbildung eines Gegenstandes der mit weißem Licht beleuchtet wird, treten im Bild Farbsäume auf. Diese beruhen auf der Dispersion des Linsenmaterials. Nach Gleichung (2) geht in die Brennweite der Brechungsindex  $n$  ein, der wiederum von der Wellenlänge abhängt. Im Fall der normalen Dispersion hat blaues Licht beispielsweise einen größeren Brechungsindex als rotes und wird daher stärker gebrochen. Somit ist die Brennweite für kurzwelliges Licht kleiner als für Licht mit einer größeren Wellenlänge.

Da achsenferne Lichtbündel am meisten zur Aberration beitragen, lässt sich der Farbfehler ebenfalls durch Abblenden reduzieren. Eine bessere Methode ist die Verwendung von sogenannten Achromaten. Dabei handelt es sich um Linsensysteme mit unterschiedlicher Dispersion und Brechkraft, die den Farbfehler für zwei Wellenlängen vollständig ausgleichen können.

**Vergrößerung des Sehwinkels: Lupe und Mikroskop**

Wenn Sie einen kleinen Gegenstand möglichst groß sehen möchten, so verringern Sie den Abstand zwischen Ihrem Auge und dem Gegenstand, indem Sie beispielsweise den Gegenstand näher an Ihr Auge herantführen. Dadurch wird das Bild auf der Netzhaut größer dargestellt und Sie können feinere Details erkennen. Aus dem linken Teilbild in Abbildung 7 ist zu erkennen, dass das Bild auf der Netzhaut um so größer ist je geringer der Abstand zum Gegenstand ist oder um so größer der Sehwinkel  $\alpha$  ist. Allerdings können Sie den Gegenstand

nicht beliebig nah an das Auge herantführen, da die Ziliarmuskulatur des Auges den Krümmungsradius der Linse nur bedingt variieren kann (Akkommodation). Unterhalb einer bestimmten Entfernung kann der Gegenstand nicht mehr auf die Netzhaut fokussiert werden und der Gegenstand erscheint verschwommen. Der kleinste Abstand auf dem ein gesundes Auge über einen längeren Zeitraum ermüdungsfrei akkomodieren kann, heißt deutliche Sehweite  $s_0$ . Der Wert von  $s_0$  ist auf 25 cm festgelegt. Überprüfen Sie doch mal die deutliche Sehweite bei Ihnen selbst, in dem Sie z.B. diese Anleitung an Ihr Auge herantführen und den Abstand messen, bei dem Sie auch über einen längeren Zeitraum den Text ohne Anstrengung lesen können. Sollen noch feinere Details eines Objekts erkannt

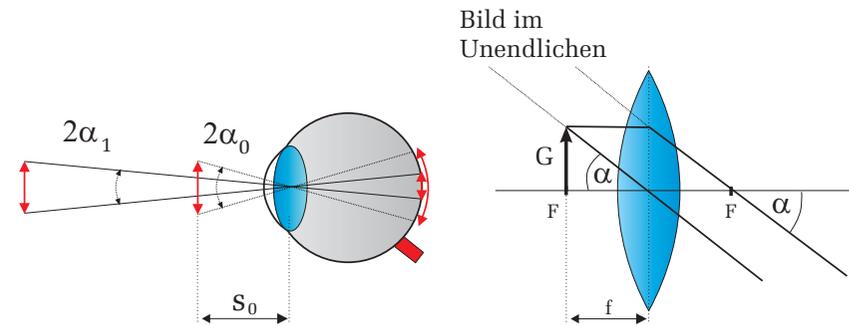


Abbildung 7: Links: Je größer der Sehwinkel  $\alpha$  desto größer ist das Bild auf der Netzhaut. Für Abstände kleiner als die deutliche Sehweite  $s_0 \doteq 25$  cm kann das Bild in der Regel nicht mehr scharf auf die Netzhaut abgebildet werden. Rechts: Wirkungsweise einer Lupe.

werden, so benötigt man optische Instrumente, die den Sehwinkel und damit die Bildgröße auf der Netzhaut vergrößern. Das einfachste Instrument ist die Lupe. Eine Lupe besteht lediglich aus einer einfachen biconvex Linse mittlerer Brennweite. Ist bei der Abbildung die Gegenstandsweite kleiner oder gleich der Brennweite so erfolgt eine Vergrößerung des Sehwinkels. In Abbildung 7 rechts liegt der Gegenstand z.B. genau in der Brennebene der Linse. In diesem Fall ist das Auge völlig entspannt und somit auf Unendlich akkomodiert. Für den Sehwinkel  $\alpha_L$ , wobei der Index L für Lupe steht, ergibt sich:

$$\tan \alpha_L = \frac{G}{f}. \tag{7}$$

Ohne Lupe, bei dem sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite  $s_0=25\text{ cm}$  befindet, erhält man dagegen für den Sehwinkel  $\alpha_0$ :

$$\tan \alpha_0 = \frac{G}{s_0}. \tag{8}$$

Definiert man als Vergrößerung  $V$  das Verhältnis der Sehwinkel mit Lupe (bzw. allgemein mit einem zusätzlichen optischen Instrument) und ohne Lupe (allgemein ohne optisches Instrument) in der deutlichen Sehweite, so ergibt sich für die Vergrößerung  $V$ :

$$V_{Lupe} = \frac{\tan \alpha_L}{\tan \alpha_0} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \tag{9}$$

**Wenn im Folgenden von Vergrößerung gesprochen wird, ist grundsätzlich die Vergrößerung des Sehwinkels gemeint!**

Typische Werte für die Brennweite einer Lupe liegen zwischen 25 mm und 50 mm. Werte unter 25 mm können nicht realisiert werden, da dann die Abbildungsfehler zu groß werden. Somit kann mit einer gewöhnlichen Lupe maximal eine 10-fache Vergrößerung erreicht werden.

Weitaus größere Vergrößerungen lassen sich mit einem Mikroskop erreichen. Ein Mikroskop besteht im wesentlichen aus zwei Linsen, dem Objektiv und dem Okular, die die Abbildung und Vergrößerung bewirken. Der Strahlengang ist in Abbildung 8 dargestellt. Der zu beobachtende Gegenstand  $G$  befindet sich in der Gegenstandsweite  $g$  etwas außerhalb der Brennweite des Objektivs. Mit dem Objektiv wird dieser Gegenstand in die Bildebene abgebildet. Es entsteht ein reelles, umgekehrtes Bild  $B$ , das im Folgenden als Zwischenbild bezeichnet wird. Mit dem Okular wird dieses Zwischenbild als Lupe betrachtet, d.h das Zwischenbild befindet sich genau in der Brennweite der Okularlinse, so dass das Auge auf Unendlich akkomodiert.

Um die Vergrößerung des Mikroskops zu bestimmen, muss wieder der Sehwinkel mit und ohne Mikroskop bestimmt werden. Für den Sehwinkel mit Mikroskop ergibt sich aus Abbildung 8:

$$\tan \alpha_M = \frac{B}{f_2}, \tag{10}$$

wobei  $B$  die Bildgröße des Zwischenbilds und  $f_2$  die Okularbrennweite darstellt. Aus dem unteren Teilbild in Bild 8 kann zusätzlich abgelesen werden, dass sich

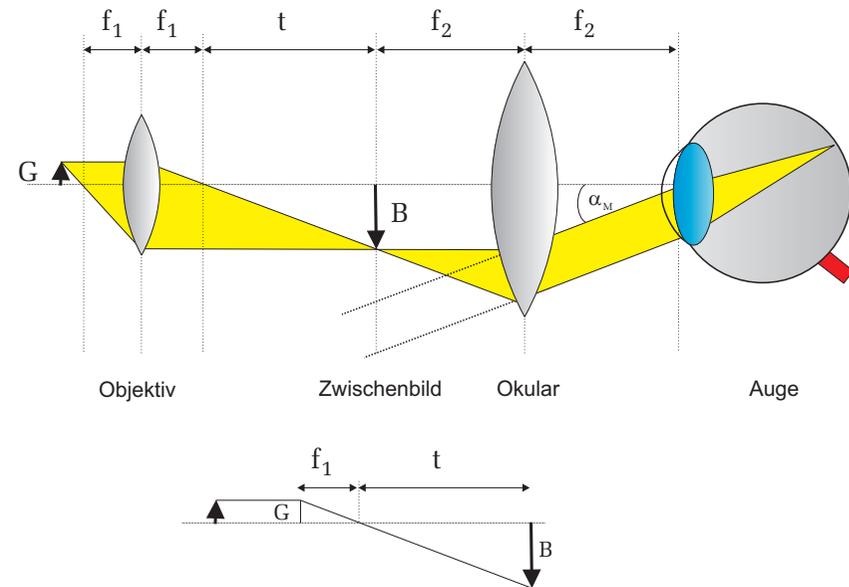


Abbildung 8: Strahlengang eines Mikroskops. Die untere Skizze dient zur Berechnung der Mikroskopvergrößerung.

$G : f_1$  genauso verhält wie  $B : t$ :

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B}{t}. \tag{11}$$

Die Größe  $t$  wird als Tubuslänge bezeichnet und gibt den Abstand zwischen gegenstandsseitigen Objektivbrennpunkt und bildseitigen Okularbrennpunkt an. Setzt man Gleichung (11) in (10) ein, so ergibt sich für den Sehwinkel:

$$\tan \alpha_M = \frac{Gt}{f_1 f_2} \tag{12}$$

und für die Vergrößerung

$$V_M = \frac{\tan \alpha_M}{\tan \alpha_0} = \frac{Gt}{f_1 f_2} / \frac{G}{s_0} = \frac{s_0}{f} = \frac{s_0 t}{f_1 f_2}. \tag{13}$$

Definiert man nun die Objektivvergrößerung durch

$$v_1 = \frac{t}{f_1} \tag{14}$$

und schreibt für die Okularvergrößerung nach Gleichung (9)

$$v_2 = \frac{s_o}{f_2}, \tag{15}$$

so ist die Gesamtvergrößerung das Produkt dieser beiden Einzelvergrößerungen:

$$V_M = v_1 v_2 = \frac{t}{f_1} \frac{s_o}{f_2}. \tag{16}$$

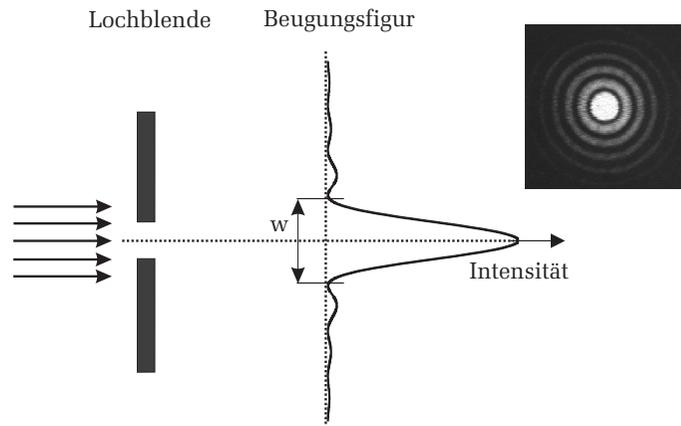


Abbildung 9: *Beugung an einem Spalt.* Auf einem hinter dem Spalt befindlichen Schirm wird nicht ein scharfer Lichtstreifen dargestellt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern eine Beugungsfigur mit einem sehr hellen Maximum, gefolgt von Nebenmaxima, dessen Intensität mit höherer Ordnung rasch abfällt. Das Bild rechts zeigt die Beugungsfigur einer Lochblende.

Offenbar könnte man meinen, dass die Gesamtvergrößerung beliebig erhöht werden kann, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Mikroskops sehr groß wählt. In der Realität ist aber die nutzbare Vergrößerung aufgrund der Wellennatur des Lichtes durch die Beugung begrenzt.

Die Beugung ist eine spezielle Interferenzerscheinung von Wellen an geometrischen Hindernissen (Spalt, Lochblende etc.). Bei einem Mikroskop entspricht solch ein Hindernis beispielsweise dem endlichen Durchmesser des Objektivs, das als Lochblende wirkt.

Wird eine Lochblende mit parallelem Licht beleuchtet, so erkennt man auf einem dahinter stehenden Schirm nicht einen hellen Lichtpunkt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern ein Beugungsbild mit einer Intensitätsverteilung wie sie in Abbildung 9 zu sehen ist. Ihr Betreuer wird Ihnen dies mit Hilfe eines Lasers und einer Spaltblende demonstrieren. Das Beugungsbild besitzt ein sehr helles zentrales Maximum, gefolgt von mehreren Minima und Nebenmaxima, dessen Intensitäten allerdings schnell abnehmen. Bei einem

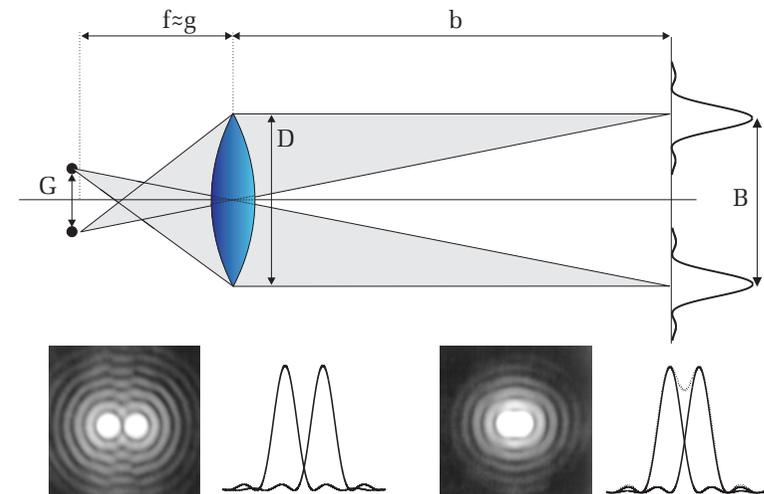


Abbildung 10: *Jeder Objektpunkt erzeugt im Zwischenbild eine Beugungsfigur.* Damit zwei Punkte noch getrennt zu erkennen sind, dürfen sich die Beugungsbilder nicht zu stark überlappen. Im unteren rechten Bild sind die beiden Punkte nicht mehr unterscheidbar.

Mikroskop erzeugt nun jeder Punkt des darzustellenden Gegenstands solch ein Beugungsbild im Zwischenbild (Abbildung 10). Die Breite  $w$  des zentralen Maximums beträgt:

$$w = 2,44 \frac{\lambda b}{D}. \tag{17}$$

Die Herleitung dieser Gleichung können Sie z.B. im Demtröder, *Experimentalphysik 2*, nachlesen.

Je kleiner der Abstand  $g$  zweier Objektpunkte, desto näher rücken auch die Beugungsbilder dieser Punkte im Zwischenbild zusammen. Ab einem gewissen Abstand  $b_{min}$  überschneiden sich die Beugungsbilder so stark, dass sie nicht mehr als zwei getrennte Objekte wahrnehmbar sind. Um dies zu quantifizieren, definiert man das Auflösungsvermögen nach dem Rayleigh-Kriterium: Zwei Objektpunkte sind nur dann voneinander unterscheidbar, wenn der Abstand der beiden Beugungsfiguren größer ist als die halbe Breite des zentralen Maximums. Die Auflösungsgrenze ist also dann erreicht, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das Beugungsminimum des anderen fällt. Der minimale Abstand der Beugungsfiguren ist dann nach Gleichung (17):

$$B_{min} = 1,22 \frac{\lambda b}{D}. \tag{18}$$

Mit Hilfe von (4) erhält man mit  $B_{min}/b = G_{min}/g$  den kleinsten Abstand  $G_{min}$

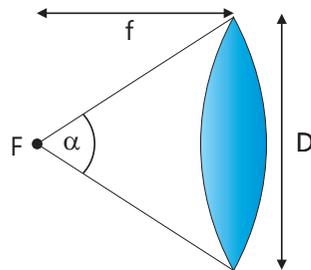


Abbildung 11: Numerische Apertur einer dünnen Linse.

zweier Objektpunkte, der mit dem Mikroskop noch aufgelöst werden kann:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda g}{D}. \tag{19}$$

Da die Objektpunkte praktisch in der Brennebene der Objektivlinse liegen ( $g \approx f$ ), können wir auch schreiben:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}. \tag{20}$$

Der Quotient  $D/f$  ist mit der sogenannten numerischen Apertur NA verknüpft (Abbildung 10). Diese ist definiert durch den Sinus des halben Öffnungswinkels der Objektivlinse multipliziert mit dem Brechungsindex  $n$  des Materials zwischen Objektiv und Präparat (Stichwort Immersionsöl):

$$NA = n \sin \alpha = n \sin \left[ \arctan \left( \frac{D}{2f} \right) \right] \approx n \frac{D}{2f}. \tag{21}$$

Somit folgt schließlich für das Auflösungsvermögen:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}, \tag{22}$$

bzw.:

$$G_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{NA}, \tag{23}$$



Abbildung 12: Kommerzielles Objektiv eines Lichtmikroskops. Die Objektivvergrößerung beträgt 40. Die Zahl 160 besagt, dass das Objektiv nur für Mikroskope mit einer Tubuslänge von 160 mm verwendet werden kann. Zusätzlich ist noch die numerische Apertur,  $NA=0,65$  und die zu verwendene Deckglasdicke von 0,17 mm angegeben.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie bei jedem Versuch den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Bestimmung der Linsenparameter der achromatisch korrigierten Linse

Bauen Sie auf der optischen Schiene einen Aufbau bestehend aus Lampe mit Kondensorlinse, Gegenstand, Linse und Bildschirm auf. Verwenden Sie dabei die achromatisch korrigierte Linse (Achromat). Als Gegenstand stehen zwei Dia's mit einer Teststruktur zur Verfügung. Verändern Sie nun die Bild- oder Gegenstandsweite so, dass Sie ein scharfes Bild erkennen können. Notieren Sie die Bild- und Gegenstandsweiten und berechnen Sie sofort die Brennweite.

Fertigen Sie folgende Tabelle an und messen Sie bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten, die Bildweite/Bildgröße, die Art des Bildes (reell oder virtuell) und die Ausrichtung. In den Bereichen  $\infty > g > 2f$  und  $2f > g > f$  sind jeweils drei verschiedenen Positionen auszumessen. Falls das Bild zu klein wird, verwenden Sie das Dia mit großen Doppelpfeil als Gegenstand. Andernfalls nehmen Sie das Dia mit der komplexen Teststruktur. Notieren Sie sich auch bei jeder Messung die Fehler.

|                   | g | G | b | B | Art           | Richtung           |
|-------------------|---|---|---|---|---------------|--------------------|
| $\infty > g > 2f$ |   |   |   |   | reel/virtuell | aufrecht/umgekehrt |
| $g = 2f$          |   |   |   |   |               |                    |
| $2f > g > f$      |   |   |   |   |               |                    |
| $g = f$           |   |   |   |   |               |                    |
| $f > g$           |   |   |   |   |               |                    |

### Aufgabe 3: Messung der Brennweite der bikonvex Linse $L_1$ nach dem Besselverfahren

Stellen Sie auf der optischen Bank einen geeigneten Abstand Bild-Gegenstand ein (etwa  $L \approx 5f$  bis  $6f$ , ein grober Wert für  $f$  ist am Linsenhalter angegeben) und suchen Sie die beiden Scharfeinstellungen auf. Beachten Sie dabei, dass der weiße Schirm nicht in der Mitte der Halterung sitzt. Sie müssen daher die Dicke des Alu-Blechtes (2 mm) beim Abstand  $L$  berücksichtigen (Die Seite mit dem Gitter ist in der Mitte). Es werden 3 Messungen von  $d$  bei festem  $L$  durchgeführt und gemittelt.

### Aufgabe 4: Untersuchung der chromatischen Aberration

Bei unverändertem Abstand  $L$  werden je 3 Messungen von  $d$  gemacht. Führen Sie diese Messung jeweils mit dem Rotfilter und b) mit dem Blaufilter durch. Beobachten Sie qualitativ die sphärische Aberration, indem Sie einmal die Lochblende und einmal die Ringblende vor die Linse stellen: Wie ändert sich  $d$ ? (Größeres  $d$  heißt kleineres  $f$ .)

### Aufgabe 5: Aufbau eines Mikroskops auf der optischen Bank

Bauen Sie das Objekt (Dia mit Kreuzgitter) hinter die Lampe mit dem eingesetzten Grünfilter ein. Dicht dahinter wird der Spalt mit den Schneiden zum Objektiv und wieder dicht dahinter das Objektiv eingesetzt. Der Abstand Linsenebene bis zur Mitte des Reiters ist genau 3 cm. Der Schirm für das Zwischenbild (Dia mit mm-Teilung) wird im Abstand von 25 cm vom Objektiv aufgestellt und dahinter im Abstand  $f_2$  das Okular. Zur Scharfeinstellung schauen Sie durch das Okular und verschieben Sie den Gegenstande bis Sie ein scharfes Bild sehen. Lampe und Kondensator werden so eingestellt, dass das Bild des Gitters in vernünftiger Helligkeit erscheint. Zu diesem Zweck kann der Lampensockel im Gehäuse verschoben werden.

a) Aus der Bildweite  $b$  und  $f_1$  lässt sich der Abbildungsmaßstab berechnen (Gleichung (5)). Bestimmen Sie aus der Größe des Zwischenbildes (z.B. Zahl der Striche pro 5 mm) bei weit geöffnetem Spalt und mit grünem Licht den Strichabstand des Gitters.

b) Verringern Sie nun die Öffnung des Messspalts und beobachten Sie dabei wie die senkrechten Strukturen des Kreuzgitters verschwinden. Messen Sie dreimal die Spaltbreite bei der die senkrechten Strukturen gerade nicht mehr auflösbar sind. Notieren Sie den Abstand des Spalts zum Objekt. Machen Sie sich klar, dass durch das Verengen des Spalts das Auflösungsvermögen nur in einer Dimension eingeschränkt wird! Beobachten Sie qualitativ den Einfluss der Wellenlänge auf das Auflösungsvermögen, in dem Sie das rote und das blaue Farbfilter benutzen.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Werten Sie Ihre Ergebnisse anhand folgender Tabelle aus ( $\beta$  bezeichnet den Abbildungsmaßstab.) Konstruieren Sie grafisch die Abbildung eines Objekts für die jeweiligen Gegenstandsweiten.

| Nr. | $g$               | $b$                  | Art               | Richtung               | $\beta$     |
|-----|-------------------|----------------------|-------------------|------------------------|-------------|
| I   | $\infty > g > 2f$ | z.B.<br>$2f = b > f$ | reel/<br>virtuell | aufrecht/<br>umgekehrt | z.B.<br>> 1 |
| II  | $g = 2f$          |                      |                   |                        |             |
| III | $2f > g > f$      |                      |                   |                        |             |
| IV  | $g = f$           |                      |                   |                        |             |
| V   | $f > g$           |                      |                   |                        |             |

Breite des Spalts und seinem Abstand vom Objekt den Öffnungswinkel des Systems und damit das Auflösungsvermögen; für  $\lambda$  wird der Wert 550 nm eingesetzt. Der erhaltene Wert wird mit der zuvor bestimmten Gitterkonstante verglichen.

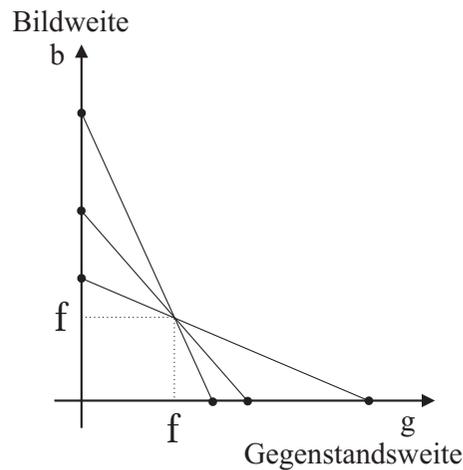


Abbildung 13: Grafische Bestimmung der Brennweite.

Zeichnen Sie Ihre gemessenen Werte für die Bild- und Gegenstandsweite in ein Diagramm ein. Tragen Sie dazu immer ein Wertepaar  $b, g$  so auf, dass die Gegenstandsweite auf der Abszisse und die Bildweite auf der Ordinate liegt und verbinden Sie die beiden Punkte durch eine Gerade (Abbildung 13). Alle Linien schneiden sich in einem Punkt, aus dem die Brennweite abgelesen werden kann. Schätzen Sie den Fehler ab.

**Zu Aufgabe 3:** Berechnen Sie die Brennweite nach dem Besselverfahren.

**Zu Aufgabe 4:** Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse bezüglich der untersuchten Linsenfehler.

**Zu Aufgabe 5:** Berechnen Sie die Gitterkonstante des Kreuzgitters und bestimmen Sie das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Berechnen Sie aus der

## Versuch 33 Prismenspektrometer



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Spektrometer mit Prisma.
- Hg-Lampe in einem Gehäuse montiert auf einem Stativfuß.
- He-Lampe in einem Gehäuse montiert auf einem Stativfuß.
- Netzteil.
- Wasserstofflampe mit Netzgerät (für je 2 Aufbauten gemeinsam)

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Brechungsgesetz, Aufbau des Prismenspektrometers, Dispersion, Auflösungsvermögen eines Prismenspektroapparates, Energieniveaus des Wasserstoffatoms, Balmerformel.

*Verständnisfragen:*

1. Ändert sich die Wellenlänge  $\lambda$  oder die Frequenz  $\nu$ , wenn Licht von einem Medium in ein anderes tritt?
2. Von welchen Parametern hängt der Gesamtablenkwinkel  $\delta$  (siehe Abbildung 2) im Allgemeinen ab? Wie kann man zeigen, dass  $\delta$  ein Minimum annimmt und in diesem Fall der Strahlengang im Prisma symmetrisch verläuft?
3. Wie setzt sich die Kurve  $n(\lambda)$  zu größeren und kleineren Wellenlängen fort? Was versteht man unter normaler und anomaler Dispersion?
4. Wird bei einem Prisma (normale Dispersion angenommen) bei gleichem Einfallswinkel, rotes Licht oder blaues Licht stärker abgelenkt?
5. Wie entstehen Spektrallinien? Welche Bedeutung hat die Spektralanalyse?
6. Was begrenzt die Möglichkeit zwei Spektrallinien benachbarter Wellenlängen im Spektrometer zu trennen?

### IV Aufgabe

- Die Winkeldispersionskurve  $\delta(\lambda)$  des Prismas ist durch Messung der Ablenkungswinkel  $\delta$  bei gegebenem Spektrum des Hg aufzunehmen und als Eichkurve zur Bestimmung der Wellenlänge des He-Spektrums zu benutzen.

Zusatzaufgabe: Führen Sie zusätzlich noch eine der beiden Aufgaben durch.

- Die Dispersionskurve  $n(\lambda)$  soll durch Messung der Minimalablenkwinkel  $\delta_{min}(\lambda)$  für vier Linien des Hg-Spektrums ermittelt werden.
- Die Wellenlänge der sichtbaren Linien des Wasserstoffspektrums sind zu bestimmen und daraus mit Hilfe der Balmerformel die Rydberg-Konstante für Wasserstoff zu berechnen.

### V Grundlagen

Ein Spektrometer ist ein Instrument, mit dem Licht in seine Spektralfarben (Wellenlängen) zerlegt werden kann. Beim Prismenspektrometer erfolgt diese Zerlegung durch ein optisches Prisma. Dabei handelt es sich um einen Körper aus einem lichtdurchlässigen Material (i.a. Glas), der von zwei ebenen, nicht parallelen Flächen begrenzt wird. Die Gerade, in der sich die beiden Flächen schneiden, wird brechende Kante genannt. In einem Schnitt senkrecht dazu (Hauptschnitt) liegt an der brechenden Kante der brechende Winkel  $\epsilon$ . Mit Hilfe des Brechungsgesetzes und unter der Annahme, dass für den Brechungsindex von Luft  $n_{Luft} = 1$  gilt, folgt für den totalen Ablenkungswinkel  $\delta$ , um den ein einfallendes Lichtbündel abgelenkt wird:

$$\delta = \alpha_1 - \epsilon + \arcsin(\sqrt{n^2 - \sin(\alpha_1)^2} \sin(\epsilon) - \sin(\alpha_1) \cos(\epsilon)). \tag{1}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, bei dem das Prisma symmetrisch vom Licht durchsetzt wird. Dabei trifft das einfallende Lichtbündel senkrecht auf die Ebene, die den brechenden Winkel  $\epsilon$  halbiert. Bei diesem Einfall nimmt der Ablenkungswinkel  $\delta$  ein Minimum ein und es gelten die Beziehungen:

$$\alpha_{min} = \alpha_1 = \alpha_2 = \left(\frac{\delta_{min} + \epsilon}{2}\right) \tag{2}$$

$$n = \frac{\sin((\delta_{min} + \epsilon)/2)}{\sin(\epsilon/2)} \quad \text{(Fraunhofersche Formel).} \tag{3}$$

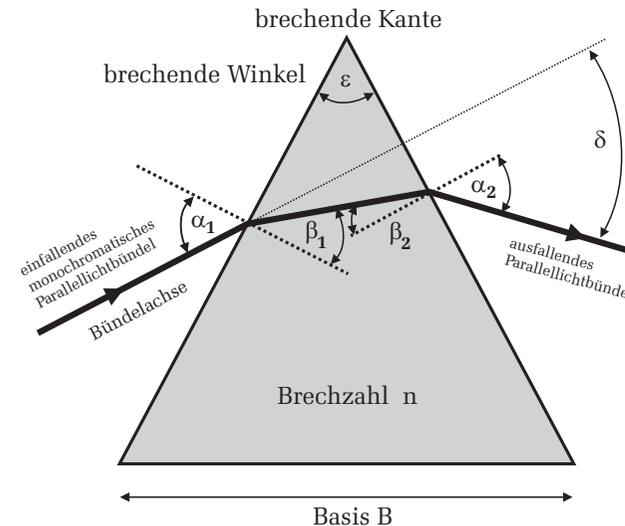


Abbildung 2: Hauptschnitt eines Prismas.

Gleichung (3) (Fraunhofersche Formel) beschreibt eine Methode um den Brechungsindex des Prismamaterials zu bestimmen. Messungen an Prismen sollten stets beim minimalen Ablenkungswinkel erfolgen, da in diesem Fall der Ablenkungswinkel  $\delta$  kaum vom Einfallswinkel  $\alpha_1$  abhängt ( $\delta$  nimmt ein Minimum ein!).

Bisher haben wir uns nur auf ein einfallendes monochromatisches Lichtbündel beschränkt. Allerdings hängt aufgrund der Dispersion der Brechungsindex  $n$  von der Wellenlänge ab, so dass bei einem einfallenden „weißes“ Lichtbündel  $n$  durch  $n(\lambda)$  ersetzt werden muss. Da der Ablenkungswinkel  $\delta$  von dem Brechungsindex abhängt, wird ein „weißes“ Parallellichtbündel spektral zerlegt.

### VI Durchführung des Versuchs

**Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau**

**Aufgabe 2: Justierung des Spektrometers**

Machen Sie sich zunächst mit den verschiedenen Funktionen der Arretierschrauben und Feintriebe vertraut. Bei Unklarheiten fragen Sie den Assistenten.

Der Strahlengang ist in Abbildung 3 dargestellt.

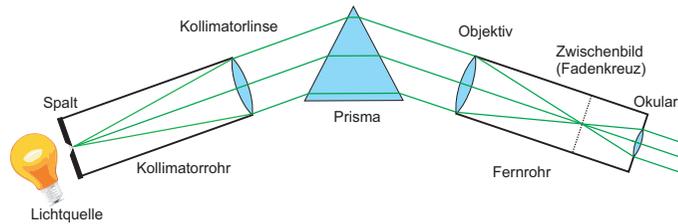


Abbildung 3: Strahlengang des Prismenspektrometers.

**Einstellen des Fernrohres** Entfernen Sie den oberen Teil des Prismentischs und visieren Sie ein weit entfernten Gegenstand an. Platzieren Sie dazu das Spektrometer auf dem Podest vor dem Laborraum und richten Sie das Fernrohr auf die gegenüberliegende Tür. Stellen Sie zunächst das Fadenkreuz scharf indem Sie das Okular im Okulartubus verschieben. Anschließend stellen Sie mittels der seitlichen Rändelschraube die anvisierte Tür scharf. Bild und Fadenkreuz sollen keine Parallaxe mehr zeigen, d.h. bei Bewegung des Auges vor dem Okular soll keine gegenseitige Verschiebung eintreten. (Beide liegen dann in einer Ebene).

**Einstellen des Kollimators** Beleuchten Sie den Spalt mit der Hg- Lampe und richten Sie das justierte Fernrohr auf den Kollimator. Zur Einstellung des Kollimatorrohres auf Parallellicht verschiebt man den Spalteinsatz, bis man im justierten Fernrohr ein scharfes Spaltbild parallaxenfrei zum Fadenkreuz beobachtet. Sollte das Spaltbild verkippt sein, so können Sie durch Drehen des Spalttubus dieses aufrichten.

**Aufgabe 3: Aufnahme der Eichkurve**

Für die Messung sollte der Prismenschwerpunkt ungefähr in der Spektrometerachse liegen. Stellen Sie den Minimalablenkwinkel für die grüne Hg-Linie ein. Dieser ist dann erreicht, wenn das im Fernrohr beobachtete grüne Spaltbild (Fadenkreuz benutzen) bei Drehung des Prismentisches stehen bleibt. Kleine Drehungen des Tisches nach rechts oder links lassen das Bild in die gleiche Richtung zurückwandern. Messen Sie bei festgehaltener Prismenlage die Ablenkungswinkel  $\delta(\lambda)$  für folgende zehn Linien des Hg-Spektrums:

Zur Feineinstellung können Sie die Mikrometerschraube am Fernrohrträger benutzen. Es genügt die genaue Messung der Ablenkungswinkel nach einer Seite. Nut-

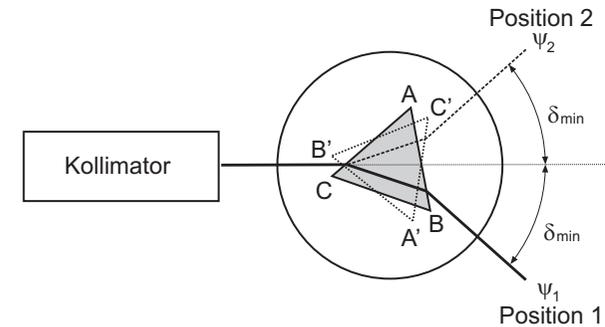


Abbildung 4: Messung des Minimalablenkwinkel.

| Nr. | $\lambda(\text{nm})$ | Farbe    | Intensität |
|-----|----------------------|----------|------------|
| 1   | 690,7                | rot      | schwach    |
| 2   | 623,4                | rot      | mittel     |
| 3   | 579,1                | gelb     | stark      |
| 4   | 577,0                | gelb     | stark      |
| 5   | 546,1                | grün     | stark      |
| 6   | 499,2                | blaugrün | schwach    |
| 7   | 491,6                | blaugrün | mittel     |
| 8   | 435,8                | blau     | stark      |
| 9   | 407,8                | violett  | mittel     |
| 10  | 404,7                | violett  | stark      |

Tabelle 5: Linien des Quecksilberspektrums.

zen Sie unbedingt die Genauigkeit des Nonius aus. Achten Sie darauf, dass während der Durchführung der Aufgabe 3, Aufgabe 4 und gegebenenfalls der Zusatzaufgabe II die Teilkreissskala in der gleichen Lage arretiert bleibt! Für die starken Linien kann der Spalt sehr eng gestellt werden; für die schwächeren Linien öffnen Sie den Spalt soweit wie nötig.

**Aufgabe 4: Wellenlängenbestimmung des He-Spektrums**

Messen Sie Bei unveränderter Einstellung des Prismas (Minimum der Ablenkung für die grüne Hg-Linie) die Ablenkungswinkel für folgende sechs Linien des

He-Spektrums: rot (stark); gelb (stark); grün (stark); grün (mittel); blau (mittel); blau (stark).

**Zusatzaufgabe I: Wellenlängenbestimmung der Balmerreihe des Wasserstoffspektrums.**

Die Wasserstofflampe samt Netzgerät wird vor den Spektrometerspalt gestellt und das Gerät eingeschaltet. Nach ca. 2 Minuten Betriebsdauer wird das Gerät vorsichtig so vor dem Spalt verschoben, dass die Linien mit maximaler Helligkeit sichtbar sind. Die Wellenlängen der drei starken Linien (rot, türkis, violett) werden aus der Eichkurve bestimmt. Versuchen Sie durch Öffnen des Spaltes eine vierte, kurzwelligere Linie zu sehen. Achtung: Die Wasserstofflampe hat starken Bandenuntergrund, der weitere Linien vortäuscht.

**Zusatzaufgabe II: Messung der Dispersion des Prismamaterials**

Für die Spektrallinien 2, 5, 7, 10 des Hg-Spektrums werden die Minimalablenkwinkel  $\delta_{Min}(\lambda)$  nach „rechts“ und „links“ (siehe Abbildung 4) gemessen.

**Zu Zusatzaufgabe II:** Bestimmen Sie nach der Gleichung (gültig für symmetrischen Strahlengang)

$$n(\lambda) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\delta_{Min}(\lambda) + \epsilon)\right)}{\sin(\epsilon/2)} \quad (5)$$

die Brechungsindizes für die gemessenen Hg-Linien. Der brechende Winkel des Prismas  $\epsilon$  beträgt  $60^\circ$ . Zeichnen Sie die Dispersionskurve  $n(\lambda)$ .

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 3 und 4:** Zeichnen Sie auf mm-Papier die Winkeldispersionskurve  $\delta(\lambda)$  des Hg-Spektrums und bestimmen Sie anhand dieser Eichkurve die Wellenlängen der He-Linien. Berücksichtigen Sie den Fehler aus der Ablesegenauigkeit des Nonius. Wie groß sind die Abweichungen von den Tabellenwerten (706,5 nm - 667,8 nm - 587,6 nm - 501,6 nm - 492,2 nm - 471,3 nm - 447,1 nm)?

**Zu Zusatzaufgabe I:** Vergleichen Sie die gemessene Spektrallinien mit den Literaturwerten (siehe Anhang). Berechnen Sie die Rydberg-Konstante  $R_\infty$  mit Hilfe der Balmer-Formel:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4)$$

und vergleichen Sie diese mit dem Literaturwert.  $m$  ist hier die Hauptquantenzahl des betreffenden angeregten Zustands ( $m = 3, 4, 5, \dots$ ).

VIII Anhang

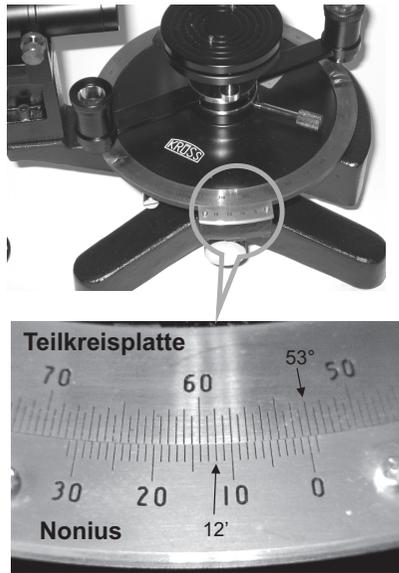


Abbildung 5: Die Spektrometer besitzen einen Nonius der den Winkel in Bogenminuten angibt. Das Ablesen geschieht folgendermaßen: Lesen Sie zunächst den Winkel der Teilkreisplatte mit dem Nullteilstrich des Nonius auf  $0,5^\circ$  genau ab. Im unteren Bild beträgt der Winkel  $53^\circ$ , da der Nullteilstrich zwischen  $53^\circ$  und  $53,5^\circ$  liegt. Die Nachkommastellen werden mit dem Nonius abgelesen. Beachten Sie, dass der Nonius in Bogenminuten geeicht ist. Dabei entsprechen die 30 Skalenteile ( $30'$  entspricht 30 Bogenminuten) einem halben Grad. Sie müssen nun den Teilstrich des Nonius suchen der genau unter einem Teilstrich der Kreisskala steht. Im Bild ist dies der Teilstrich 12. Das Ergebnis der Winkelmessung ist demnach  $53^\circ 12'$  bzw. im Gradmaß:  $53^\circ + (12'/60') = 53,2^\circ$ .

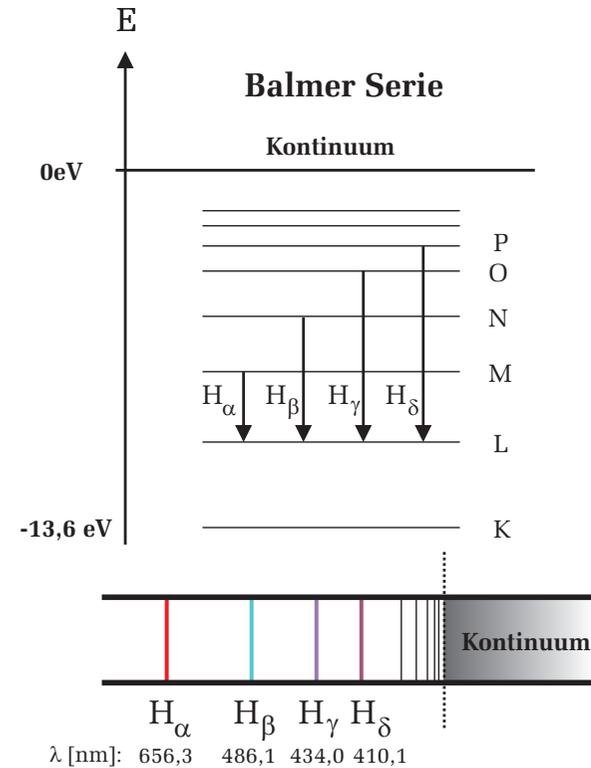


Abbildung 6: Balmer-Serie des Wasserstoffs.

## Versuch 34 Spektralphotometrie

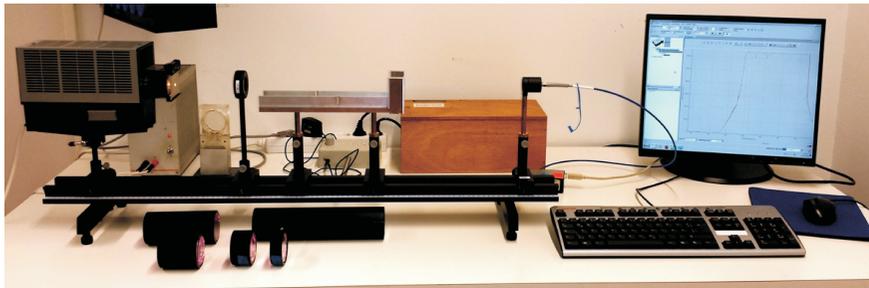


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Spektralfotometrische Messanordnung bestehend aus: Lichtquelle, Lochblende, Linse, Küvettenbank und Fasereinkoppler.
- Gitterspektrometer, Ocean Optics USB4000
- Computer mit Drucker.
- Je Versuchsaufbau:
  - 1 Satz (5 Stück) Küvetten mit 0,00005-molaren Kaliumpermanganatlösung ( $\text{KMnO}_4$ ), Schichtdicken:  $l_1=1,5$  cm,  $l_2=3$  cm,  $l_3=6$  cm,  $l_4=12$  cm,  $l_5=24$  cm.
  - Für alle Aufbauten gemeinsam: Eine 25 ml-Bürette mit 1/20 ml-Teilung und 2 l Vorratsgefäß (VE-Wasser), eine 25 ml-Bürette mit 1/10 ml-Teilung und 2 l Vorratsgefäß (0,001-molare wässrige  $\text{KMnO}_4$ -Lösung)
- Eine offene Küvette (rechteckig),  $l=1,5$  cm
- Zur Auswertung einfachlogarithmisches Papier mit 3 Dekaden.

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Aufbau eines Gitterspektrometers, Absorption (Extinktion) von Strahlung, Lambert-Beersches Gesetz, Absorptionsspektren (Absorption in Lösungen), Fotometrie, Spektralphotometrie. Beantworten Sie bei Ihrer Vorbereitung folgende Fragen zum Versuch:

1. Nach welchem Prinzip funktioniert ein Gitterspektrometer? Wie hoch ist die spektrale Auflösung?
2. Was passiert bei der Absorption von Licht durch die  $\text{KMnO}_4$ -Moleküle der verwendeten Probelösung?
3. Wie hängt die Absorption von Länge und Konzentration der durchstrahlten Lösung ab? Wie kommt man zu den entsprechenden Formeln?

### IV Aufgabe

- Aufnahme des Absorptionsspektrum einer  $\text{KMnO}_4$ -Lösung.
- Durch Messung der Absorption von Licht der Wellenlänge  $\lambda=525$  nm als Funktion der Schichtdicke bzw. der Konzentration einer  $\text{KMnO}_4$ -Lösungen wird der molare Extinktionskoeffizient  $\epsilon$  für  $\lambda=525$  nm ermittelt.

## V Grundlagen

### V.1 Fotometrie

Als Fotometrie bezeichnet man die Konzentrationsbestimmung einer Substanz durch Absorption (bzw. durch Streuung oder Fluoreszenz). Das Prinzip beruht auf der Messung der Abschwächung der Intensität eines einfallenden Lichtbündels durch die in der Messzelle enthaltene Substanz.

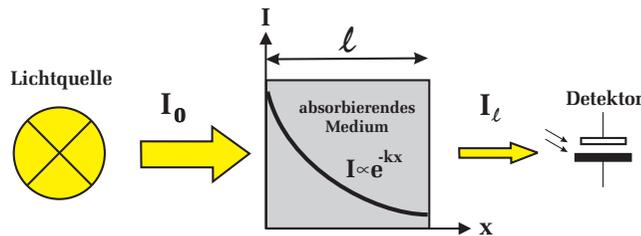


Abbildung 2: Veranschaulichung des Lambert'schen Absorptionsgesetzes.

Das Absorptionsgesetz für Licht lautet in der differentiellen Schreibweise:

$$\frac{dI}{I} = -kdl. \tag{1}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die relative Intensitätsabnahme  $dI/I$  bei kleinen Wegstrecken der Dicke  $dl$  proportional ist. Durch Integration von Gleichung (1) erhält man die Intensität  $I$  des Lichts nach Durchlaufen der Strecke  $l$  im absorbierenden Medium (Lambert'sches Absorptionsgesetz):

$$I = I_0 e^{-kl}. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet  $I_0$  die in das Medium eindringende Intensität,  $l$  die Länge des Lichtweges im absorbierenden Medium und  $k$  die Absorptionskonstante (bzw. „Extinktionskonstante“, die beiden Bezeichnungen werden in der Literatur nebeneinander verwendet und sind identisch).

Zur Auswertung von Messungen empfiehlt sich die logarithmische Schreibweise:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -kl \quad \text{bzw.} \quad \ln I = -kl + \text{const} \quad \text{mit} \quad \text{const} = \ln I_0. \tag{3}$$

Trägt man  $I$  gegen  $l$  auf halblogarithmischem Papier auf, so ergibt sich eine Gerade. In der Praxis verwendet man dekadische Logarithmen. Gleichung (3) hat dann die Gestalt

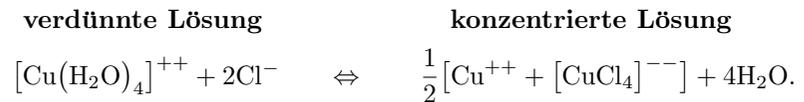
$$\log I = -k'l + \text{const}' \quad \text{mit} \quad k' = \log e k = 0,434 k. \tag{4}$$

$k'$  heißt „dekadischer oder Bunsenscher Absorptionskoeffizient“.

Für verdünnte Lösungen gilt im allgemeinen, dass die Absorptionskonstante  $k'$  der Konzentration  $c$  proportional ist (Beersches Gesetz):

$$k' = \epsilon c. \tag{5}$$

Man nennt  $\epsilon$  den molaren Extinktionskoeffizienten oder kurz Molarextinktion, wobei  $c$  in mol/l oder mol/cm<sup>3</sup> anzugeben ist. Nach dem Beerschen Gesetz ist  $\epsilon$  von der Konzentration  $c$  der Lösung unabhängig, d.h.  $\epsilon$  ist eine Stoffkonstante. Bei hohen Konzentrationen können Abweichungen vom Beerschen Gesetz auftreten. Ein Beispiel bietet die CuCl<sub>2</sub>-Lösung, bei der beim Übergang von verdünnter zu konzentrierter Lösung eine Gleichgewichtsverschiebung bei der Komplexbildung auftritt, gemäß



Eine Erhöhung der Konzentration bedeutet also in diesem Fall nicht einfach eine Vergrößerung der Zahl der an der Absorption beteiligten Ionen (wie im Gültigkeitsbereich des Beerschen Gesetzes), sondern Neubildung von Ionen anderer Art, die i.a. auch ein anderes Absorptionsverhalten zeigen.

Die Konzentrationsabhängigkeit der Absorption bietet auch eine einfache Möglichkeit, den zeitlichen Verlauf von chemischen Reaktionen (Auftauchen bzw. Verschwinden von Ionen) zu verfolgen.

$k'$  bzw.  $\epsilon$  hängen von der Wellenlänge ab. Die Funktionen  $k'(\lambda)$  bzw.  $\epsilon(\lambda)$  beschreiben das Absorptionsspektrum der Lösung. Unter einem Spektrum versteht man ein Diagramm, in dem die Intensität eines Strahlers bzw. eine ihr proportionale Größe (hier der Fotostrom) über der Wellenlänge aufgetragen ist. Die Stellen maximaler Absorption sind die Schwerpunkte von sog. Absorptionsbanden, die für jedes Ion charakteristisch sind und zu dessen Nachweis dienen können. Zusammenfassend lässt sich mit den eingeführten Größen das Absorptionsgesetz folgendermaßen schreiben:

$$I = I_0 10^{-k'l} = I_0 10^{-\epsilon cl} \tag{6}$$

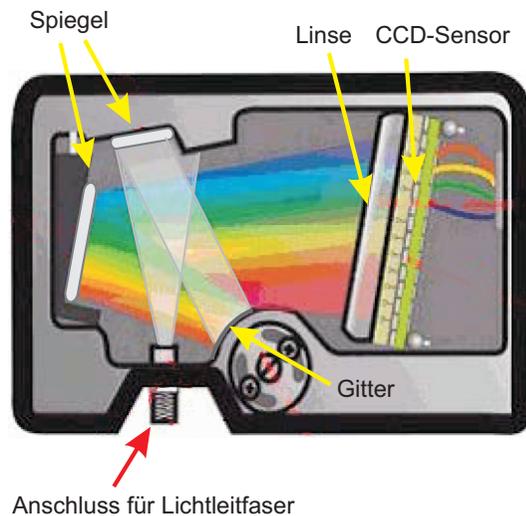


Abbildung 3: Strahlengang im Gitterspektrometer.

Es gibt zwei Methoden  $k'$  und  $\epsilon$  zu messen:

1. Man misst die Intensität des austretenden Lichts als Funktion der Länge der durchstrahlten Flüssigkeit bei konstant gehaltener Konzentration. Auftragung von  $\log I$  gegen  $l$  ergibt  $k'$ . Bei bekannter Konzentration errechnet sich daraus  $\epsilon$ .
2. Man hält die Schichtdicke  $l$  konstant und variiert die Konzentration  $c$  in definierter Weise. Auftragen von  $\log I$  gegen  $c$  ergibt zunächst das Produkt  $\epsilon l$  und damit bei bekanntem  $l$  wieder  $\epsilon$ .

## V.2 Bedienung des Spektrometers und der Software

Im Versuch wird ein computergesteuertes Gitterspektrometer (Abbildung 3) eingesetzt, das es erlaubt, den Spektralbereich einer Lichtquelle von 180 nm bis 950 nm zu registrieren. Die zu untersuchende Lichtquelle wird über eine Lichtleitfaser in das Spektrometer eingekoppelt und über ein optisches Gitter auf eine CCD- Zeile mit 3648 Pixel abgebildet. Dabei entspricht ein Pixel einem Wellenlängenintervall von 0,21 nm. Die Auflösung des Spektrometers beträgt

etwa 1 nm. Das verfügbare Datenerfassungsprogramm *OceanView* erlaubt es den Dunkelstrom zu messen und bei der Datenaufnahme automatisch abzuziehen. Zur Reduzierung von Fluktuationen kann automatisch über viele Scans gemittelt werden.

Starten Sie das Programm *OceanView* vom Desktop aus. Dabei sollte die Datenaufnahme des Spektrometers automatisch gestartet werden. In diesem Modus wird das Spektrum mit der angegebenen Integrationszeit kontinuierlich gemessen und dargestellt. Sie sehen dann ein Fenster gemäß Abbildung 4. Falls das Spektrometer vom Programm nicht erkannt wird, dann überprüfen Sie ob der USB-Stecker des Spektrometers angeschlossen ist. Klicken Sie anschließend auf das Icon *Device Manager* oder drücken Sie die Taste F5. Im erscheinenden Dialogfenster können Sie dann das Spektrometer durch Drücken der Taste *Rescan* neu initialisieren.

In diesem Modus werden kontinuierlich Spektren aufgenommen und grafisch dargestellt. Schalten Sie eine Lichtquelle ein und richten Sie den Fasereinkoppler auf die Lichtquelle aus. Das Maximum des angezeigten Spektrums sollte bis mindestens 2/3 des Skalenbereichs gehen. Die Anpassung der gewünschten Intensität erfolgt über die gewählte Integrationszeit. Reduzieren Sie die Integrationszeit, wenn die Intensität zu hoch ist, d.h. das Spektrum gesättigt ist, vergrößern Sie die Integrationszeit wenn sie zu klein ist. Die Integrationszeit können Sie am linken Rand im Reiter *Aquisition Group Window* einstellen. Sie können das Rauschen des Spektrums verringern, indem Sie über mehrere Einzelmessungen mitteln. Dazu im Feld *Scans to Average* die Zahl der Einzelmessungen eintragen.

### Dunkelmessung

Das Spektrometer liefert auch dann ein von Null verschiedenes Signal, wenn die Lichtquelle nicht eingeschaltet ist. Daher muss der Dunkelstrom für quantitative Messungen vom Spektrum abgezogen werden.

Stellen Sie zunächst die gewünschte Integrationszeit und die Anzahl der Messungen zur Mittelwertbildung ein. Schalten Sie anschließend die Lichtquelle aus und klicken Sie auf das Symbol der Dunkelmessung . Die korrigierte Messung wird in einem neuen Fenster mit der Bezeichnung *View Minus Bkgnd* angezeigt. Wenn Sie nun die Lichtquelle wieder einschalten sehen Sie in diesem Fenster das auf die Dunkelmessung korrigierte Spektrum.

Falls Sie die Integrationszeit oder die Zahl der Scans zur Mittelung ändern, müssen Sie eine neue Dunkelmessung durchführen.

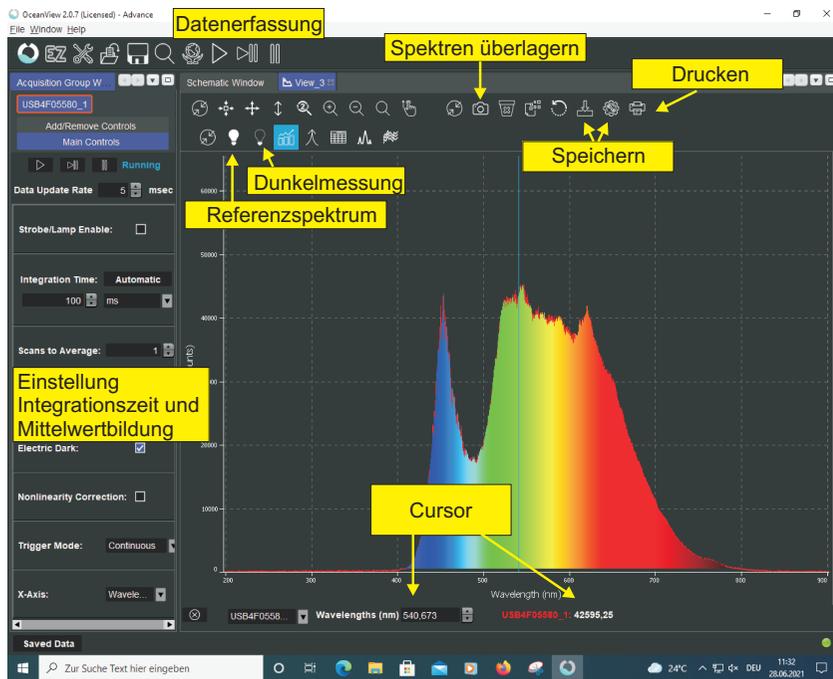


Abbildung 4: Oberfläche des Datenerfassungsprogramms.

## VI Durchführung

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Absorptionsbanden von $\text{KMnO}_4$

Starten Sie die Software. Schalten Sie die Lichtquelle ein. Der Fasereinkoppler muss symmetrisch ausgeleuchtet sein. Falls dies nicht der Fall ist können Sie die Lichtquelle und die Lochblende nachjustieren. Zum Einstellen dieser Messung können Sie einen Assistenten verwenden. Klicken Sie auf das Icon . Wählen Sie den Assistenten *Absorbance* und anschließend *Absorbance only* → *Next*. Variieren Sie die Integrationszeit so dass das Spektrum nicht in Sättigung ist (Spektrum darf oben nicht abgeschnitten sein). Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein und klicken Sie auf *Next*. Nehmen Sie eine Referenzmessung des Spektrums auf

indem Sie auf das Glühbirnen Symbol links oben klicken. Drücken Sie die Taste *Next*. Schalten Sie die Lichtquelle aus und machen Sie eine Dunkelmessung. Klicken Sie dazu auf die Glühbirne links oben im Dialogfeld und anschließend auf *Finish*. Die Messung wird nun in einem neuen Fenster mit dem Namen *AbsorbanceView* angezeigt. In diesem Modus wird das aktuelle Spektrum durch das Referenzspektrum dividiert und der Dunkelstrom abgezogen. Sie sehen nun die Absorption als Funktion der Wellenlänge. Auf der Ordinate ist die optische Dichte aufgetragen:

$$OD = -\log_{10} \left( \frac{I}{I_R} \right), \quad (7)$$

wobei  $I$  das aktuell gemessene Spektrum und  $I_R$  das zuvor bestimmte Referenzspektrum darstellen. Platzieren Sie die 12 cm lange Küvette in den Strahlengang und nehmen Sie das Absorptionsspektrum auf. Zoomen Sie in den Bereich zwischen 430 nm bis 660 nm und bestimmen Sie mit der Cursorfunktion die Lagen der Permanganatbanden in nm. Um den Cursor zu aktivieren klicken Sie mit der Maus in das Diagramm. Die Lage des Cursors können Sie dann im Eingabefeld unter dem Diagramm variieren. Drucken Sie das Diagramm aus und beschriften Sie die Absorptionsbanden mit den zuvor gemessenen Wellenlängen.

### Aufgabe 3: Absorption einer $\text{KMnO}_4$ - Lösung als Funktion der Schichtdicke: Lambertsches Absorptionsgesetz

Platzieren Sie die kürzeste Küvette ganz rechts auf den Küvettenhalter. Klicken Sie im Fenster *View* in das Diagramm und stellen Sie den Cursor auf 525 nm ein. Die Intensität an der Cursorposition wird rechts neben dem Eingabefeld der Wellenlänge angezeigt. Stellen Sie die Integrationszeit so ein, dass das Spektrum an der Cursorposition gerade noch nicht in Sättigung ist, d.h. die Intensität sollte etwa bei 63500 liegen. Um die Intensität leicht zu erhöhen oder abzusenken, können Sie zusätzlich die drei Justageschrauben am Lampengehäuse verwenden. Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein. Schalten Sie die Lichtquelle aus und machen Sie eine Dunkelmessung. Klicken Sie dazu auf das Symbol . Anschließend die Lichtquelle wieder einschalten und die Aufnahme im Fenster *View Minus Bkgnd* starten. Messen Sie für alle Küvetten 5-mal die Intensität die unterhalb des Diagramms angezeigt wird. Verwenden Sie dazu den Aufnahmemodus . In diesem Modus stoppt die Aufnahme nach einer Messung und die Intensität wird dauerhaft angezeigt. Drücken Sie erneut die Taste um die nächste Messung zu starten. Achten Sie darauf, dass die Küvetten immer rechts am Anschlag des Küvettenhalters platziert werden. Berechnen Sie

die Mittelwerte und deren Fehler und tragen Sie diese sofort auf halblogarithmischem Papier gegen die Küvettenlänge ein.

Hinweis: Die Küvetten haben Einfluss auf den Strahlengang. Die Küvette bewirkt, dass sich der Durchmesser der Lochblende, die auf den Lichtleiter abgebildet wird verkleinert. Damit erhöht sich die Intensität. Insbesondere bei der längsten Küvette führt dies zu einem signifikanten Fehler. Messen Sie daher bei der längsten Küvette den Durchmesser der abgebildeten Lochblende an der Position des Fasereinkopplers einmal mit Küvette ( $D_{mK}$ ) und einmal ohne Küvette ( $D_{oK}$ ). Korrigieren Sie dann den Messwert  $I$  bei der längsten Küvette gemäß:

$$I_{korr.} = I \frac{D_{mK}^2}{D_{oK}^2}. \quad (8)$$

Zum Ausmessen können Sie das Stahllineal oder die Schieblehre verwenden.

#### Aufgabe 4: Absorption einer $\text{KMnO}_4$ - Lösung als Funktion der Konzentration: Beersches Gesetz

Bei konstanter Schichtdicke  $l$  wird die Konzentration  $c$  schrittweise erhöht. Als erstes wird eine sogenannte Nullmessung mit reinem VE-Wasser<sup>1</sup> gemacht. Geht man von einem abgemessenen Volumen  $V_0$  reinen Wassers aus und gibt nach und nach die Volumina  $V_1, V_2, \dots$  einer  $\text{KMnO}_4$ -Lösung bekannter Konzentration  $\tilde{c}$  zu (in der Bürette beträgt die Konzentration  $\tilde{c}=10^{-3}\text{ mol/l}$ ), so erhält man die Konzentrationen

$$c_0 = \tilde{c} \frac{0}{V_0} = 0, \quad c_1 = \tilde{c} \frac{V_1}{V_0 + V_1}, \quad c_2 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2}{V_0 + V_1 + V_2},$$

$$c_3 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3}, \quad c_4 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4}.$$

Aus den oben angegebenen Gleichungen ergibt sich für  $V_0=21\text{ ml}$ ,  $V_1=1,4\text{ ml}$ ,  $V_2=1,6\text{ ml}$ ,  $V_3=4,0\text{ ml}$  und  $V_4=14,0\text{ ml}$  ( $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V_0$ ) die gewünschte 1:2-Abstufung, nämlich

$$\left( \frac{10^{-3}}{16} : \frac{10^{-3}}{8} : \frac{10^{-3}}{4} : \frac{10^{-3}}{2} \right) \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

<sup>1</sup>VE-Wasser: Voll Entsalzenes Wasser.

Füllen Sie die rechteckige Küvette mit 21 ml VE- Wasser und stecken Sie diese in den rechten Küvettenhalter. Variieren Sie die Integrationszeit so, dass das Spektrum im Fenster *View* bei 525 nm gerade noch nicht in Sättigung ist. Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein. Führen Sie wieder eine Dunkelmessung durch. Die Messung führen Sie dann in dem neu angelegten Fenster *View Minus Bkgnd* durch. Messen Sie für die Konzentration  $V_0$  bis  $V_4$  jeweils 5- mal die Intensität. Berechnen Sie wieder die Mittelwerte und deren Fehler und tragen Sie diese in das zuvor angefertigte Diagramm mit ein. Wählen Sie hierfür eine zusätzliche Abszisse.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 3 und 4:** Die gemessenen Intensitäten werden sofort in ein gemeinsames halblogarithmisches Diagramm mit zwei (linearen) Abszissenskalen für  $l$  und für  $c$  eingezeichnet. Zu Hause berechnen Sie aus der Steigung der „Lambert-Geraden“ (mit  $c = 5 \times 10^{-5}\text{ mol/l}$ ) den dekadischen Absorptionskoeffizienten  $k'$  und hieraus dann die Molarextinktion  $\epsilon$  gemäß  $\epsilon = k'/c$ . (Berücksichtigen Sie dazu, dass eine Intensitätsabnahme um den Faktor 10 gerade eine Änderung des dekadischen Logarithmus um 1.0 bedeutet: die hierzu erforderliche Absorptionslänge  $l'$  entnehmen Sie der Zeichnung.  $k'$  ist dann gegeben durch  $k' = 1/l$ ). Schätzen Sie die Fehler ab. Analog verfahren Sie bei der „Beer-Geraden“. Geben Sie die Molarextinktion sowohl in liter/(mol cm) als auch in  $\text{cm}^2/\text{mol}$  an. Wie gut stimmen die Werte aus der Lambert- und aus der Beer-Geraden überein?

## Versuch 35 Fotoeffekt

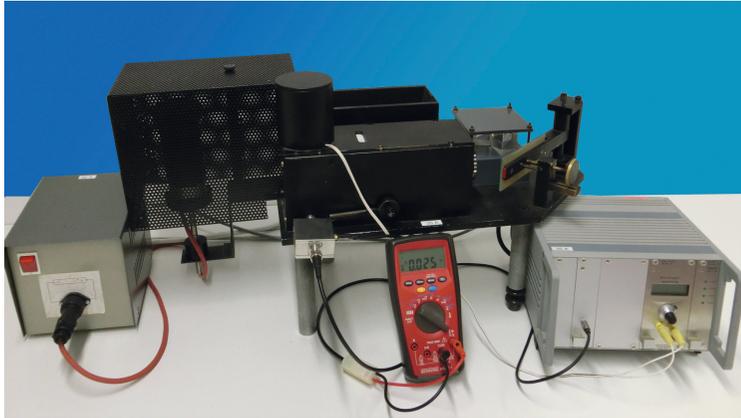


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Fotoeffekt.

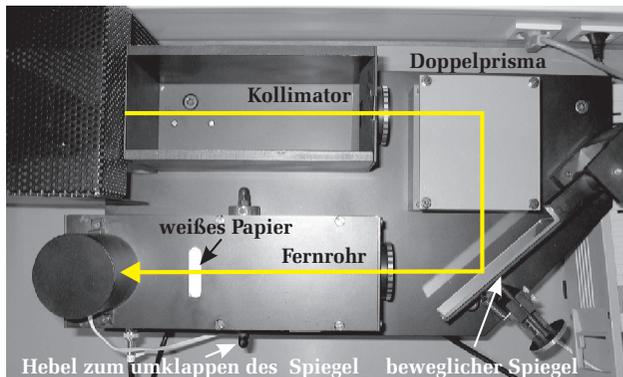


Abbildung 2: Strahlengang im Spektrometer.

### I Messaufbau

- Spektrometernaufbau mit zwei Prismen und eingebauter Vakuumfotозelle
- Hg-Spektral-Lampe mit Netzteil
- Piko-Amperemeter mit externen Netzteil
- Multimeter

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Fotoeffekt, Aufbau eines Prismenspektrometers.

*Verständnisfragen:*

1. Licht kann Elektronen aus Metallen auslösen. Geht das für jede Frequenz und für alle Metalle? Der Effekt wurde zuerst mit UV Licht beobachtet. Ist das Zufall?
2. Wovon hängt die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen ab?
  - vom Metall?
  - von der Intensität des Lichts und damit vom E-Feld?
  - von der Wellenlänge des Lichts?
3. Erklären Sie die Einsteinsche Gleichung  $h\nu = A + 1/2mv_e^2$ . Warum haben beim Versuch nicht alle Elektronen dieselbe kinetische Energie?
4. Wo wird der fotoelektrische Effekt angewandt?

5. Warum ist der „Dunkelstrom“ bei hohen negativen Sperrspannungen negativ? Was würde passieren, wenn Sie den Anodenring direkt beleuchten würden?

## IV Aufgabe

- Für fünf starke Linien des Hg-Spektrums zwischen gelb und nahem Ultraviolett ist die Grenzenergie der beim Fotoeffekt emittierten Elektronen mit der Gegenfeldmethode zu messen. Daraus ist das Planck'sche Wirkungsquantum  $h$  zu bestimmen.

## V Grundlagen

Dieser Versuch demonstriert die Existenz von Lichtquanten. Die Emission von Elektronen bei der Bestrahlung von Metalloberflächen mit Licht zeigt folgendes Verhalten:

- Die Elektronemission erfolgt erst für Licht mit einer Mindestfrequenz, die vom Metall abhängt (für die meisten Metalle wird UV-Licht benötigt).
- Die Energie der emittierten Elektronen hängt nur von der Frequenz des Lichts ab und dem Metall, nicht aber von der Lichtintensität, wie klassisch erwartet, weil sie proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke der Lichtwelle ist.

Im Versuch wird die Emission von Elektronen aus einer Metalloberfläche nachgewiesen und die maximale Energie der Elektronen als Funktion der Lichtfrequenz gemessen.

### V.1 Energie von Leitungselektronen im Metall

Zum Verständnis des Fotoeffekts, müssen wir uns zunächst näher mit den elektronischen Eigenschaften der Metalle beschäftigen. Bei der Bildung eines Metalls geben die einzelnen Metallatome eine bestimmte Anzahl ihrer Valenzelektronen ab und bilden ein Metallgitter, bestehend aus positiv geladenen Atomrümpfen und delokalisierten Elektronen. Diese Elektronen können sich im ganzen Metall nahezu frei bewegen und werden als Leitungselektronen bezeichnet. Allerdings

können die Leitungselektronen das Metallgitter nicht ohne weiteres verlassen. Sie sind im Metallgitter gebunden.

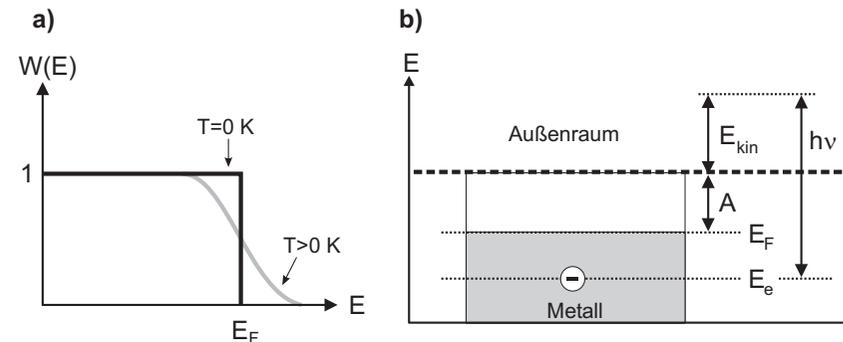


Abbildung 3: a) Energieverteilung der Elektronen eines Metalls. b) Potenzialtopfmodell.

Die Energie der Leitungselektronen eines Metalls unterliegt einer ganz bestimmten Verteilung (Fermiverteilung), die von der Temperatur des Metalls abhängt. Bei  $T=0\text{K}$  sind alle Energiezustände von Null bis zu einer Maximalenergie, die als Fermienergie  $E_F$  bezeichnet wird, besetzt. Solch eine Verteilung ist in Abbildung 3a) dargestellt.  $W(E)$  bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, das ein Elektron die Energie  $E$  besitzt. Bis zur Fermienergie ist die Besetzungswahrscheinlichkeit für alle Energien Eins, darüber Null. Die Verteilung besitzt daher bei der Fermienergie eine scharfe Kante (Fermikante). Bei Temperaturen über  $0\text{K}$  ist die Fermikante „aufgeweicht“. Es gibt dann auch Elektronen mit Energien oberhalb der Fermikante. Dementsprechend sind einige Energieniveaus mit  $E < E_F$  unbesetzt.

Die energetischen Verhältnisse sind anhand eines Potenzialtopfs in Abbildung 3b) dargestellt. Die Leitungselektronen sind im Metall gebunden und bevölkern dort kontinuierlich alle Energiezustände von Null bis zur Fermienergie. Um ein Elektron aus dem Metall herauszulösen, muss eine zusätzliche Energie aufgebracht werden. Die Energie, die benötigt wird um Elektronen von der Fermienergie aus, aus dem Potenzialtopf in den Außenraum zu bringen, wird als Austrittsarbeit  $A$  bezeichnet.

Trifft nun ein Photon mit der Energie  $h\nu$  auf ein Leitungselektron der Energie  $E_e$ , so überträgt es seine Energie auf das Elektron, so dass dieses bei einer

hinreichend großen Photonenenergie die Metalloberfläche verlassen kann und zudem noch eine kinetische Energie  $E_{kin}$  erhält. Aus dem Energiesatz folgt dann:

$$h\nu = A + (E_F - E_e) + E_{kin}. \tag{1}$$

Die kinetische Energie der emittierten Elektronen ist am größten für Elektronen an der Fermikante, d.h.  $E_e = E_F$ . Diese maximale Energie

$$E_{kin}(max) = h\nu - A \tag{2}$$

kann durch Messung der Strom-Spannungskurve einer Fotozelle bestimmt werden. Das ist das Ziel des Experiments. Abbildung 4 skizziert den Aufbau einer

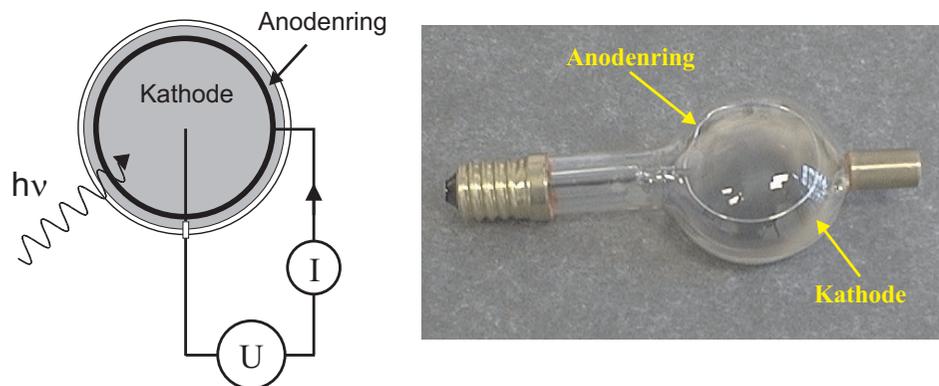


Abbildung 4: Aufbau einer Fotozelle.

Fotozelle. Die Innenseite eines evakuierten Glaskolbens ist auf einer Seite mit einem Metall (Kalium), welches eine geringe Austrittsarbeit besitzt, bedampft. Diese Metallfläche stellt die Fotokathode dar. Darüber, in einigen Millimetern Abstand, befindet sich die Anode, die als dünner Drahring ausgelegt ist. Zwischen Anode und Kathode lässt sich eine Spannung  $U$  anlegen. Befindet sich die Anode auf positivem Potenzial, so erreichen alle aus der Kathode ausgelösten Photoelektronen die Anode. Bei negativer Spannung nimmt der Fotostrom ab, da nur noch Elektronen mit höherer kinetischer Energie und damit grösserem  $E_e$  die Anode erreichen. Bei der Sperrspannung  $U_s$  wird der Strom schließlich Null, so dass auch die Elektronen an der Fermikante, mit  $E_e = E_F$ , die Anode nicht mehr erreichen.

Der Fotostrom ist daher konstant für positive Spannung, während er für negative Spannungen abnimmt. Bei  $T = 0K$  verschwindet der Fotostrom bei  $U = U_s$ . Tatsächlich nähert sich der Strom aber asymptotisch dem Wert Null, da es für  $T > 0K$  auch Leitungselektronen oberhalb der Fermikante gibt, deren Zahl allerdings mit dem Energieabstand von der Fermikante exponentiell abnimmt (Abbildung 5). Im Versuch steht einer ebenen Kathode eine Ringelektrode gegenüber.

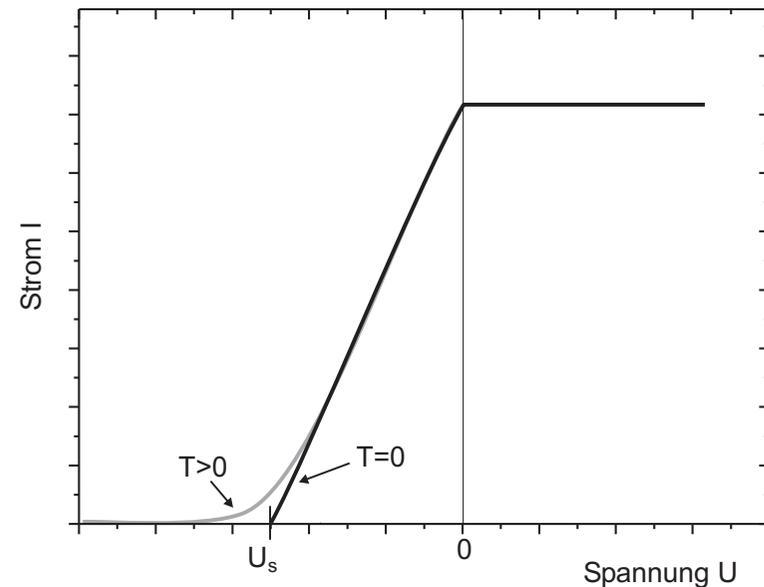


Abbildung 5: Strom-Spannungskennlinie einer idealen Fotozelle.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Photoelektronen auf die Anode treffen, selbst bei kleinen positiven Spannungen  $U$  klein. Es braucht eine hohe positive Saugspannung um alle Photoelektronen dort zu sammeln, d.h. den Fotostrom in Sättigung zu bringen (Abbildung 6). Zur Bestimmung von  $U_s$  müssen Sie wissen, welchen funktionalen Verlauf die Strom-Spannungskennlinie in der Nähe von  $U_s$  für  $T > 0$  hätte. Dies hängt von der Geometrie von Anode und Kathode ab. Es lässt sich zeigen, dass für unsere Geometrie diese Funktion ungefähr  $I \propto U^2$  ist. Daher wird bei der Auswertung  $\sqrt{I}$  gegen  $U$  aufgetragen und eine Gerade zum Schnittpunkt  $I = 0$  extrapoliert (Abbildung 7). Die Sperrspannung  $U_s$  ist dann

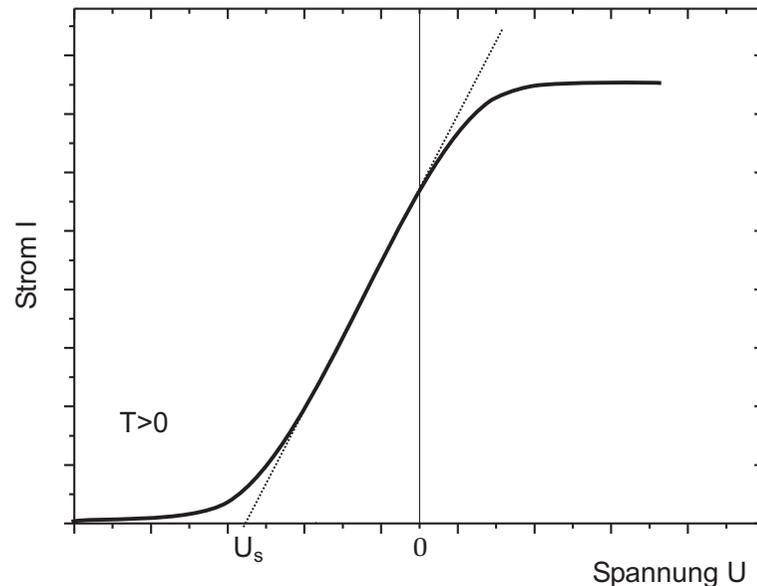


Abbildung 6: Strom-Spannungskennlinie einer realen Fozelle.

gegeben durch

$$e U_s = E_{kin}(max) = h\nu - A \propto \sqrt{I}. \quad (3)$$

## V.2 Der Versuchsaufbau im Detail

Auf einer Grundplatte ist ein Prismen-Spektralapparat aufgebaut. Um die Dispersion zu erhöhen, sind zwei gleichartige Flintglas Prismen hintereinander angeordnet. Anders als beim Versuch 33 wird das Spektrum durch einen beweglichen Spiegel über den Eingang des „Fernrohrs“ bewegt. In dem „Fernrohr“-Kasten ist der Austrittspalt eingebaut, hinter dem sich eine Fozelle befindet, so dass die verschiedenen Spektrallinien einzeln auf die Fotokathode gelenkt werden können. Vor dem Austrittspalt befindet sich in dem Kasten ein schwenkbarer Spiegel, mit dem das Licht zur Beobachtung auf einen eingebauten Schirm (weißes Papier) gelenkt werden kann. Da normales Papier im UV fluoresziert, kann auf dem Schirm auch die UV-Linie bei 365,0 nm beobachtet werden.

Fällt Licht hinreichend großer Energie (Frequenz) auf die Fotokathode, so werden daraus Elektronen mit einer kinetischen Energie von  $E = h\nu - A$  ausgesandt. Ist der Ring über ein Amperemeter mit der Kathode verbunden, so fließt ein Strom. Im Versuch wird die Kathode (über das Pico-Amperemeter) geerdet und an den Ring eine Vorspannung gegen Erde gegeben. Ist diese Vorspannung hinreichend negativ, können keine Elektronen mehr auf dem Ring ankommen. Aus der linearen Abhängigkeit der hierzu benötigten Spannung mit der Frequenz kann dann die Planck'sche Konstante  $h$  bestimmt werden.

Da das Auflösungsvermögen des Spektrometers nicht so gut ist, sind in der Tabelle nur die starken Linien des Hg-Spektrums vermerkt und benachbarte Linien sind zusammen gefasst worden. (\*).

| Nr. | Wellenlänge (nm) | Frequenz (THz) | Farbe    | Intensität |
|-----|------------------|----------------|----------|------------|
| 1   | 623,4            | 480,9          | rot      | mittel     |
| 2   | →578*            | 518,7          | gelb     | sehr stark |
| 3   | →546,1           | 549,0          | grün     | stark      |
| 4   | 491,6            | 609,8          | blaugrün | mittel     |
| 5   | →435,8           | 687,9          | blau     | stark      |
| 6   | →405*            | 740,2          | violett  | stark      |
| 7   | →365,0           | 821,3          | UV       | stark      |

Die auftretenden Fotoströme sind sehr klein (einige 10 pA) und müssen daher verstärkt werden. Dies geschieht mit einem Strom- Spannungswandler. Der von der Fozelle gelieferte Strom fließt dabei durch einen Widerstand (1 GΩ). Nach dem Ohmschen Gesetz fällt dann am Widerstand eine Spannung ab die proportional zum Fotostrom ist. Diese Spannung wird mit einem hochohmigen Verstärker nochmals um den Faktor 11 verstärkt. Sie messen also den Strom indirekt über eine Spannungsmessung, wobei eine Spannung von 1 V einen Strom von 91 pA entspricht. Im Folgenden wird der Fotostrom durch  $U_I$  angegeben. Dies impliziert, dass der Fotostrom durch eine dazu proportionale Spannung gemessen wird.

## VI Durchführung des Versuchs

**Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau**

**Aufgabe 2: Aufnahme der Strom-Spannungskennlinie für verschiedene Emmissionslinien des Hg-Spektrums**

Schalten Sie die Spektrallampe an und warten Sie einige Minuten bis die Intensität konstant bleibt. Schwenken Sie den Spiegel im Fotozellenkasten mit dem Hebel so nach oben, dass auf dem kleinen weißen Schirm oben auf dem Kasten das Spektrum erscheint. Es sind fünf kräftige Linien zu beobachten, eine gelbe und grüne Linie, danach drei weitere Linien, die allerdings auf dem Schirm mit Fehlfarben angezeigt werden. So erscheint die blaue Linie eher violett, die violette Linie und die UV Linie erscheinen in einem blassen blau.

Durch Drehen an der großen Rändelschraube können Sie den Spektrometer-Spiegel verstellen und die Linien über die Marke schieben, die die Lage des Spaltes angibt.

Es genügt, die Strom-Spannungskennlinien für die mit einem Pfeil gekennzeichneten Linien bei 578 nm (gelb), 546 nm (grün), 436 nm (blau), 405 nm (violett) und 365 nm (UV) zu messen.

**Hinweis zur Durchführung:** Den Fotostrom messen Sie mit dem Multimeter im Bereich  $\bar{V}$ . Schliessen Sie das Multimeter an die BNC- Buchse des Verstärkers an. Das rote Kabel verbinden Sie mit dem V- Eingang des Multimeters und das schwarze Kabel mit dem COM- Eingang.

Klappen Sie den Fotozellenspiegel (siehe Abbildung 2) in den Strahlengang, so dass Sie die Spektrallinien auf dem weißen Schirm sehen und justieren Sie den rechten beweglichen Spiegel (siehe Abbildung 2) mit der Rändelschraube so, dass die UV-Linie innerhalb der mittleren Markierung des Schirms liegt. Die Vorspannung stellen Sie auf 0 V ein. Klappen Sie nun den Fotozellenspiegel aus dem Strahlengang und beobachten Sie den Messwert des Multimeters. Versuchen Sie diesen Wert durch Drehung der Rändelschraube in kleinen Schritten zu maximieren. Das garantiert, dass Sie die Linie zentral auf die Fotokathode abbilden.

Nehmen Sie nun die Kennlinie ab einer Vorspannung von  $U=0$  V in Schritten von 0,1 V hin zu negativen Vorspannungen auf. Beenden Sie die Messreihe wenn  $U_I$  einen Wert im Bereich von 20-50 mV erreicht. Messen Sie anschliessend noch den Untergrundstrom  $U_{I0}$  bei einer hohen Sperrspannung (-4 V). Hinweis: Der Untergrundstrom entspricht nicht dem Dunkelstrom eines optischen Detektors bei abgedeckter Lichtquelle. Der Strom wird in der Regel bei hohen negativen Vorspannungen negativ. Aufgrund des Dampfdrucks des Kaliums der Fotokathode können sich auf dem Anodenring Kaliumniederschläge abscheiden. Wird die Anode beleuchtet können auch aus der Anode Elektronen herausgelöst werden. Beachten Sie daher das Vorzeichen.

Wiederholen Sie diese Messung für die violette, blaue, grüne und gelbe Linie.

Für diese Linien beginnen Sie bei einer Vorspannung von +0,3 V.

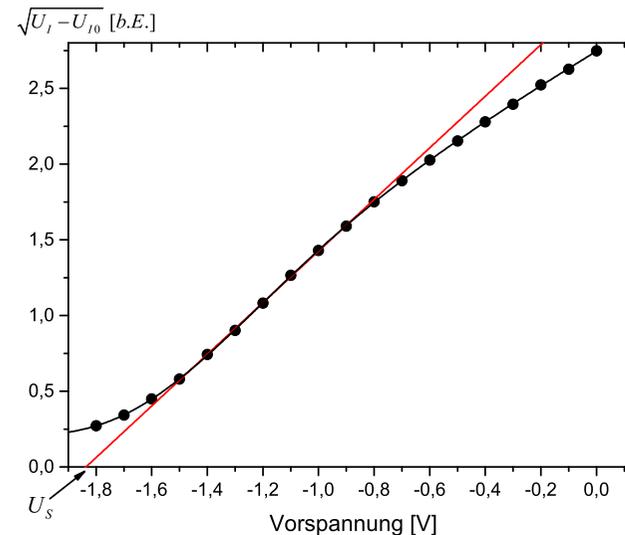


Abbildung 7: Wurzel aus dem gemessenen Fotostrom abzüglich des Untergrundstroms als Funktion der Spannung.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Die Ströme werden auf den Untergrundstrom  $U_{I0}$  (bei einer hohen negativen Gegenspannung) korrigiert und aus den so erhaltenen Werten die Wurzel gezogen. Dazu ist es zweckmäßig, für jede Farbe eine Tabelle der nachfolgenden Art anzulegen. Die ersten beiden Zeilen sind die Messwerte, die unteren beiden dann Ihre Auswertung. Die Zahlenwerte sind willkürlich gewählt.

|                       |      |      |      |      |      |     |       |       |     |
|-----------------------|------|------|------|------|------|-----|-------|-------|-----|
| $U$ [V]               | 0,3  | 0,2  | 0,1  | 0    | -0,1 | ... | -0,5  | -0,6  | ... |
| $U_I$ [V]             | 8,61 | 8,14 | 7,62 | 6,81 | 6,23 | ... | 5,064 | 4,469 | ... |
| $U_I - U_{I0}$ [V]    | 8,67 | 8,20 | 7,68 | 6,87 | 6,29 | ... | 5,124 | 4,529 | ... |
| $\sqrt{U_I - U_{I0}}$ | 2,94 | 2,86 | 2,77 | 2,62 | 2,51 | ... | 2,26  | 2,06  | ... |

Nur die letzte Zeile wird für alle Linien graphisch aufgetragen. Auf die Ordinate tragen sie die Wurzel des korrigierten Stroms auf und auf der Abszisse die eingestellten Vorspannungen. In Abbildung 7 ist als Beispiel die Kennlinie der UV- Linie dargestellt.

An den linearen Teil wird ein Lineal angelegt und aus dem Schnitt mit der Spannungsachse die Spannung extrapoliert, bei der die Elektronen gerade den Ring nicht mehr erreichen ( $\sqrt{U_I - U_{I0}} = 0$ ). Achten Sie auf einen vernünftigen Maßstab, so dass Sie die Steigung gut bestimmen können. Es ist wichtig, dass Sie wirklich nur den linearen Teil berücksichtigen. Die Messwerte bei sehr kleinen und großen Vorspannungen weichen in der Regel vom linearen mittleren Teil ab. Der Fehler von  $U_s$  wird dadurch bestimmt, wie stark Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden innerhalb der Messfehler im linearen Bereich variieren können! Fertigen Sie ein weiteres Diagramm an, in das Sie die ermittelten Sperrspannungen der jeweiligen Linien gegen ihre Frequenzen auftragen. Aus der Steigung können Sie durch Multiplikation mit der Elementarladung das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  bestimmen.

## Versuch 41 Temperaturmessung



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Pyrometer
- Pt100-Thermometer (Klasse B)
- Konstantstromquelle 1 mA
- Dewargefäß
- Gasthermometer

- Heizbad mit Rührvorrichtung
- Thermoelement für hohe Temperaturen (PtRh, Typ B oder Typ S) mit Eich-tabelle
- Multimeter
- Butangas-Bunsenbrenner
- Schutzbrille und Schutzhandschuhe

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Temperatur, absoluter Nullpunkt, Gasgesetze, Zustandsänderungen des idealen Gases, reale Gase, van der Waals- Gleichung, Thermoelement, Plancksches Strahlungsgesetz.

*Verständnisfragen:*

1. Was ist Wärme und was ist Temperatur?
2. Was für Thermometer gibt es? Auf welchen physikalischen Prinzipien beruhen sie? Welche Vor- oder Nachteile bei der Anwendung ergeben sich daraus?
3. Wie funktioniert ein Gasthermometer? Warum ist dieses Thermometer für eine absolute Temperaturmessung gut geeignet? Kann man ein beliebiges Gas nehmen? Bis zu welchen Temperaturen halten Sie ein Gasthermometer für geeignet? Welches Gas würden Sie also nehmen?

4. Als Temperaturfixpunkte werden die Temperatur des kochenden Wassers und die Schmelztemperatur des Eises (Eis-Wassermischung) genommen, die relativ leicht realisiert werden können. Von welchen äußeren Parametern hängen diese Fixpunkte ab?
5. Welche prinzipielle Möglichkeit zur Festlegung der Temperatur, unabhängig von einer Arbeitssubstanz, gibt es?
6. Wie funktioniert ein Thermoelement?
7. Wie lässt sich die Oberflächentemperatur von Sternen bestimmen? Wie unterscheiden sich die Spektren von Sirius ( $T \approx 10000$  K) und der Sonne ( $T \approx 6500$  K)?

## IV Aufgaben

- Temperaturmessung mit Hilfe eines Gasthermometers und eines Platin- Widerstandsthermometers im Bereich zwischen dem Siedepunkt des Wassers und dem Siedepunkt von flüssigem Stickstoff.
- Messungen mit einem Infrarot- Thermometer im Bereich von  $0^\circ\text{C}$  bis  $100^\circ\text{C}$ .
- Als typische Anwendung eines Thermoelementes wird mit dem PtRh-Element die Temperaturverteilung einer Bunsenbrennerflamme gemessen.

## V Grundlagen

Der thermische Zustand eines Stoffes wird durch die Temperatur charakterisiert. Zur Messung dieser Größe benutzt man Instrumente (Thermometer), die die Temperaturabhängigkeit verschiedener physikalischer Größen ausnutzen. Dazu gehören zum Beispiel Ausdehnungsthermometer (Flüssigkeitsthermometer, Gasthermometer), deren Prinzip auf der Temperaturabhängigkeit des Volumens eines Stoffes beruht. Eine weitere große Klasse von Thermometern sind Widerstandsthermometer wie Platin-Thermometer oder Halbleiterthermometer (NTC, PTC). Bei diesen hängt der elektrische Widerstand von der Temperatur ab. Thermoelemente bestehen aus zwei unterschiedlichen, miteinander kontaktierten Metalldrähten. Zwischen den Anschlüssen liegt eine elektrische Spannung

an, die von der Temperaturdifferenz der Kontaktstelle und den Anschlüssen abhängt. In diesem Versuch werden Sie auch Messungen mit einem Pyrometer durchführen. Solch ein Thermometer misst die von einem Körper ausgehende „Wärmestrahlung“, die im Idealfall nur von der Temperatur abhängt. Weltweit gibt es verschiedene Temperaturskalen wie z.B. Celsius oder Fahrenheit, die auf zwei unterschiedlichen Fixpunkten aufbauen. Bei der Celsiuskala sind dies der Schmelz- und der Siedepunkt von Wasser. Der untere Fixpunkt der Fahrenheitskala entspricht der Temperatur einer speziellen Kältemischung, der obere Fixpunkt der „Körpertemperatur eines gesunden Menschen“. Solche Definitionen sind nicht besonders gut reproduzierbar. Aus physikalischer Sicht gibt es nur eine Temperaturskala, die sich aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableiten lässt: Die thermodynamische Temperaturskala oder die Kelvinskala.

Die derzeit gültige internationale Temperaturskala wurde 1990 (ITS-90) festgelegt. Sie definiert spezielle Temperaturfixpunkte im Bereich von 0,65 K bis 2200 K. Zwischen diesen Temperaturwerten wird mittels definierter Thermometer interpoliert, die zuvor an den Fixpunkten kalibriert wurden. Zu diesen gehören insbesondere die Platin- Widerstandsthermometer (Messbereich ca. 10 K bis ca. 1200 K), das He-Gasthermometer und das He-Dampfdruckthermometer für Temperaturen kleiner als 30 K, sowie im Hochtemperaturbereich die Strahlungsthermometer.

### V.1 Das Gasthermometer

Das Funktionsprinzip eines Gasthermometers lässt sich mit Hilfe der Idealen Gasgleichung beschreiben:

$$pV = NkT, \quad (1)$$

wobei  $p$  den Druck,  $V$  das Volumen,  $T$  die absolute Temperatur,  $N$  die Teilchenzahl und  $k$  die Boltzmann- Konstante darstellen.

Befindet sich ein Gas in einem abgeschlossenen Behälter, so kann bei konstant gehaltenem Volumen die Temperatur des Gases durch eine Druckmessung bestimmt werden (Gesetz von Amontons):

$$T \propto p \quad \text{für } V = \text{konstant}. \quad (2)$$

Den Aufbau des im Praktikum eingesetzten Gasthermometers ist in Abbildung 2 dargestellt. Es besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon, der über eine Kapillare mit einem elektrischen Manometer verbunden ist. Die Genauigkeit,

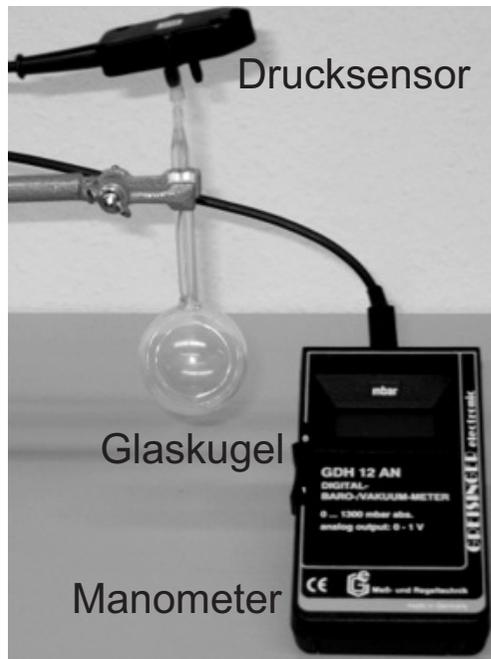


Abbildung 2: Aufbau eines Gasthermometers

mit der die Temperatur gemessen werden kann, hängt von der Konstanz des Volumens und dem verwendeten Gas ab. Dabei müssen zwei systematische Fehler berücksichtigt werden. Zum einen dehnt sich der Glasballon bei Erwärmung aus, wodurch sich das Luftvolumen ändert. Dieser Fehler kann aber aufgrund des viel größeren Ausdehnungskoeffizienten von Luft gegenüber dem von Glas vernachlässigt werden. Zum anderen bleibt die in der Kapillare zwischen Glaskugel und Manometer eingeschlossene Luft annähernd auf Zimmertemperatur. Temperaturänderungen im Glasballon bewirken daher, dass dieses „schädliche Volumen“ komprimiert bzw. expandiert wird, wodurch sich ebenfalls das Luftvolumen ändert. Desweiteren ist Luft nur bedingt als ideales Gas anzusehen. Weit oberhalb des Verflüssigungspunktes und bei geringem Druck sind die Voraussetzungen eines idealen Gases sicherlich gut erfüllt. Allerdings werden Sie auch Messungen bei Temperaturen des flüssigen Stickstoffs durchführen. Da

der Druck im Glasballon bei dieser Temperatur deutlich geringer ist als Atmosphärendruck, tritt keine Verflüssigung auf und die Luft im Glasbehälter kann immer noch als ideal angesehen werden.

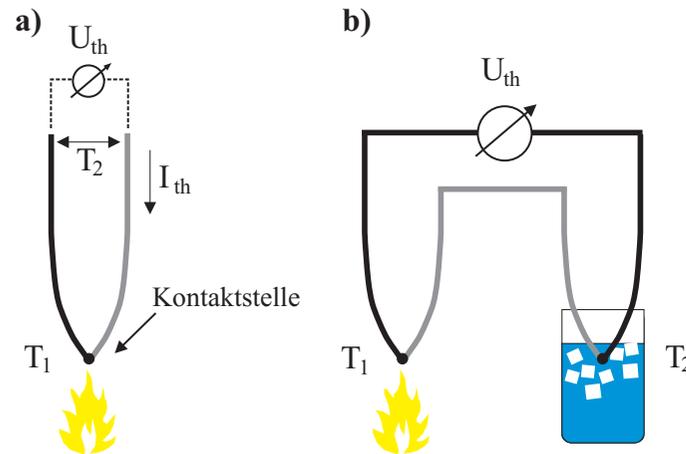


Abbildung 3: Funktionsprinzip eines Thermoelements

## V.2 Das Thermoelement

Die Wirkungsweise eines Thermoelements beruht auf dem Seebeck-Effekt: Bringt man zwei unterschiedliche Metalle miteinander in Kontakt, so baut sich an der Kontaktstelle eine elektrische Spannung auf, deren Betrag von der Art des Metalls und der Temperatur abhängt (Abbildung 3 links). Aus dem Metall mit der geringeren Austrittsarbeit fließen Elektronen in das Metall mit der größeren Austrittsarbeit. Es entsteht eine Thermospannung  $U_{th}$ . Bei geschlossenem Stromkreis fließt ein Thermostrom  $I_{th}$ ; die dafür „benötigte Energie“ wird der Wärmequelle entnommen.

Beträgt die Temperatur an der Kontaktstelle  $T_1$  und an den beiden Enden der Metalle  $T_2$ , so folgt für die Thermospannung:

$$U_{th} = K(T_1 - T_2), \tag{3}$$

wobei  $K$  eine Konstante darstellt, die von beiden Metallen abhängt.

Thermoelemente werden in Industrie und Technik sehr häufig eingesetzt. Die Vorteile dieser Sensoren sind kleine Dimensionen, gute mechanische und chemische Stabilität, die Anwendbarkeit über einen sehr großen Temperaturbereich sowie die geringen Herstellungskosten. Allerdings besitzen Thermoelemente auch Nachteile. Es lassen sich nur relative Temperaturen messen. Soll die Temperatur  $T_1$  absolut bestimmt werden, so muss die Vergleichstemperatur  $T_2$  bekannt sein. Für einfache Messungen geringer Genauigkeit begnügt man sich mit der ungefähr konstanten Raumtemperatur  $T_2$  als Vergleichstemperatur (Bei Messungen von sehr hohen Temperaturen ist auch diese Methode sehr genau). Für präzise Messungen der absoluten Temperatur wird aber eine konstante Vergleichstemperatur benötigt. Dazu verwendet man ein Thermoelement mit zwei Kontaktstellen (Abbildung 3 rechts), wobei ein Kontakt auf eine definierte Vergleichstemperatur  $T_2$  eingestellt wird.

Die Spannung die an einem Thermoelement anliegt ist sehr gering. Bei dem hier verwendeten Platin-Rhodium Thermoelement beträgt die Spannung bei  $50^\circ\text{C}$   $2\ \mu\text{V}$ , bei  $1000^\circ\text{C}$   $4,9\ \text{mV}$ . Eine Vergleichliste zwischen Temperatur und Thermo-spannung liegt im Laborraum aus.

### V.3 Das Platinwiderstandsthermometer

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren<sup>1</sup>:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2), \quad (4)$$

mit den Koeffizienten

$$A = 3,9083 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$$

$$B = -5,775 \times 10^{-7} [^\circ\text{C}^{-2}].$$

$R_0$  ist der Nennwiderstand bei  $0^\circ\text{C}$ . Für ein Pt100-Thermometer gilt  $R_0 = 100\ \Omega$ . Damit kann aus dem gemessenen Widerstand  $R$  die Temperatur berechnet werden. Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0A + \sqrt{R_0^2A^2 - 4R_0B(R_0 - R)}}{2R_0B}. \quad (5)$$

<sup>1</sup>Die DIN IEC 751 legt für den Platin-Widerstand eigentlich zwei Temperaturbereiche fest ( $-200^\circ\text{C}$  bis  $0^\circ\text{C}$  und  $0^\circ\text{C}$  bis  $850^\circ\text{C}$ ), die durch unterschiedliche Polynome definiert sind. Bei diesem Versuch reicht es aber aus, stets die angegebene quadratischen Näherung zu verwenden.

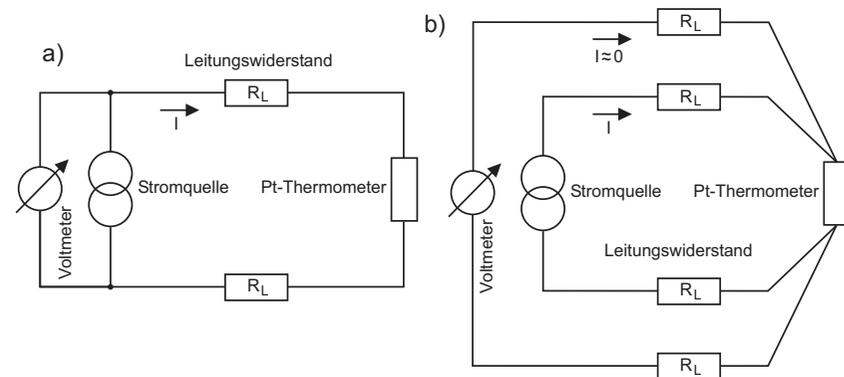


Abbildung 4: a) Zweileiterschaltung und b) Vierleiterschaltung zur Messung des Widerstands eines Pt-Thermometers.

Platinthermometer sind in vier Genauigkeitsklassen erhältlich. Die im Praktikum eingesetzten Thermometer sind in der Genauigkeitsklasse B eingeordnet. In dieser Klasse beträgt der Temperaturfehler:

$$\Delta T = 0,30^\circ\text{C} + 0,005 |T|. \quad (6)$$

Der Widerstand eines Pt-Thermometers kann im einfachsten Fall nach dem Ohmschen Gesetz durch zwei verschiedene Methoden bestimmt werden. Entweder wird an den Pt-Widerstand eine konstante Spannung angelegt und der Strom gemessen oder es wird ein konstanter Strom eingepreßt und der Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand gemessen. Bei beiden Messmethoden tritt stets eine Eigenerwärmung des Pt-Thermometers auf, die die eigentliche Temperaturmessung verfälscht. Es ist daher sinnvoll, die Widerstandsmessung mit einem möglichst kleinen, konstanten Messstrom durchzuführen und den Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand mit einem Voltmeter zu messen. Im Praktikum verwenden Sie hierfür eine Konstantstromquelle die einen Strom von  $1\ \text{mA}$  liefert. Bei der Spannungsmessung muss berücksichtigt werden, dass der Pt-Widerstand in der Regel an mehr oder weniger langen Zuleitungen angeschlossen ist, die wiederum selbst einen elektrischen Widerstand besitzen. Bei der Zweileiterschaltung in Abbildung 6 a) geht in die Widerstandsmessung der Widerstand der Messleitungen mit ein. Dieser Messfehler kann durch eine sogenannte Vierleiterschaltung vermieden werden. Dabei dienen zwei Leiter der Stromzu-

fuhr und zwei weitere zur Messung des Spannungsabfalls. Da die Spannungsmessung mit hochohmigen Voltmetern (Innenwiderstand einige  $M\Omega$ ) erfolgt, fließt nur ein sehr kleiner Strom durch die Leitungen und der Spannungsabfall an den Zuleitungen ist vernachlässigbar klein.

## V.4 Das Pyrometer

Jeder Körper dessen Temperatur größer als 0 K ist sendet Wärmestrahlung aus, deren Intensität nur von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen  $\epsilon = 1$ . Die Intensitätsverteilung der Strahlung die von einem schwarzen Strahler ausgeht, wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (7)$$

wobei  $M_\lambda$  die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement  $dA$  im Wellenlängenbereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt. Die gesamte von einem Körper abgestrahlte Leistung wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben. Integration von Gleichung (7) über die gesamte strahlende Fläche  $A$  und über alle Wellenlängen ergibt

$$P = \epsilon(T)\sigma AT^4, \quad (8)$$

wobei  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $T$  die absolute Temperatur beschreiben. Der Faktor  $\epsilon(T) \leq 1$  berücksichtigt, dass reale Körper ein kleineres Emissionsvermögen aufweisen als der idealisiert schwarze Körper. Die abgestrahlte Leistung eines Körpers hängt demnach nur von der Fläche und der Temperatur ab. Auf dieser Eigenschaft beruhen berührungslose Pyrometer und Wärmebildkameras.

Bei Zimmertemperatur ( $\approx 300$  K) liegt das Strahlungsmaximum im langwelligen Infrarotbereich bei einer Wellenlänge von etwa  $10 \mu\text{m}$  (Abbildung 5). In diesem Bereich arbeiten kommerzielle IR-Pyrometer. Die im Praktikum eingesetzten Pyrometer integrieren die von einem Körper ausgehende Strahlung im Bereich von  $8 \mu\text{m}$  bis  $14 \mu\text{m}$ .

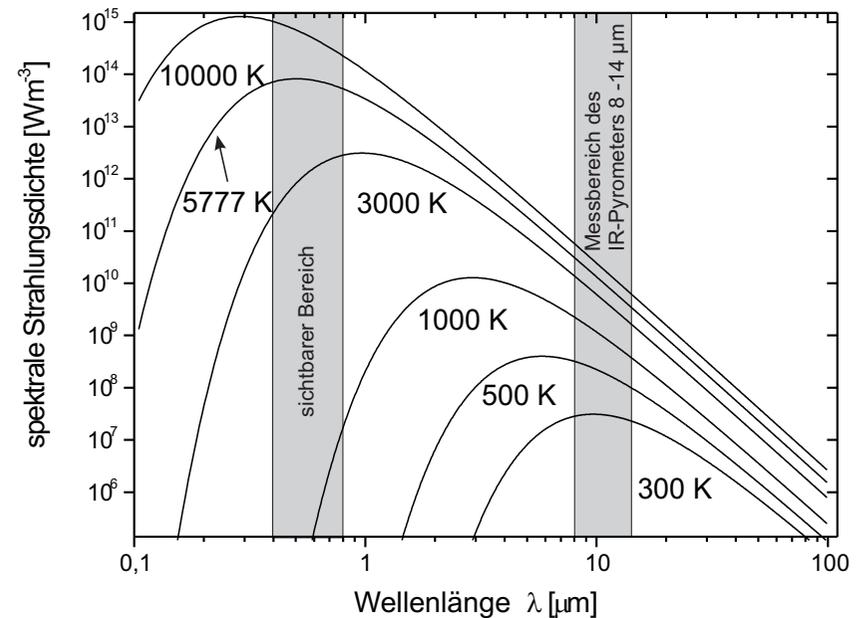


Abbildung 5: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

## VI Durchführung des Versuchs

### Achtung:

**Kontakt mit flüssigem Stickstoff bzw. mit Trockeneis verursacht schwere Erfrierungen und Augenschäden. Beim Hantieren mit Trockeneis und flüssigem Stickstoff unbedingt Handschuhe anziehen und Schutzbrille aufsetzen. Da während des Versuchs erhebliche Mengen Stickstoff und Kohlendioxid verdampfen, sollte der Raum gut belüftet werden.**

**Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau****Aufgabe 2: Temperaturmessungen bei erweiterten Umgebungsbedingungen****a) Eichung der Thermometer bei 0°C**

Inbetriebnahme des Pt100-Thermometer: Bauen Sie eine Vierleiterschaltung auf. Stecken Sie dazu den Stecker des Pt100-Thermometers in die Adapterbox. Die vier Anschlussleitungen können Sie dann an den 4 mm-Buchsen abgreifen. Verbinden Sie als nächstes je eine weiße und eine rote Buchse mit den entsprechenden Buchsen der Stromquelle. Wenn Sie das Voltmeter an die beiden noch freien Buchsen der Stromquelle anschließen (rote Buchse an den Anschluss Com des Voltmeters), haben Sie eine Zweileiterschaltung (siehe Abbildung 6) und Sie messen den Spannungsabfall über den Kabeln mit. Um eine Vierleiterschaltung zu bekommen, müssen Sie das Voltmeter direkt an die Adapterbox anschließen. Sie sollten bei der folgenden Messung wenigstens einmal beide Schaltungen ausprobieren. Bei 0°C beträgt der Pt100-Widerstand 100  $\Omega$ . Bei einem Messstrom von 1 mA erhalten Sie bei der Vierleiterschaltung einen Spannungsabfall von 100 mV. In der Zweileiterschaltung werden Sie einen größeren Wert messen, da Sie die Zuleitungswiderstände mitmessen. Allerdings sind die Kabel relativ kurz und der Effekt daher sehr klein. Wenn Sie möchten, können Sie beide Schaltungen mit sehr langen Kabeln aufbauen. Ein entsprechendes vieradriges Kabel liegt im Labor aus.

Benutzen Sie für die Messung bei 0°C eine Wasser-Eis Mischung. Füllen Sie den Glasbehälter zur Hälfte mit klein zerstoßenem Eis und platzieren Sie den Glasballon mittig im Topf. Gießen Sie mit Wasser auf und rühren Sie mit einem Glasstab gut um. Die Glaskugel muss völlig mit Wasser bedeckt sein! Beobachten Sie gleichzeitig die Spannung am Pt100 sowie die am Pyrometer angezeigte Temperatur. Die Temperatur des schmelzenden Eises in Wasser als Fixpunkt und Nullpunkt der später zu erstellenden Temperaturskala muss möglichst gut erreicht werden. Sie müssen dazu das Minimum des Spannungswertes des Pt100-Thermometers abwarten. Wenn sich die Spannung stabilisiert hat, protokollieren Sie die Spannung, den Druck des Gasvolumens und die Pyrometertemperatur. Die Pyrometertemperatur wird auf der Wasseroberfläche gemessen. Sie wird sich systematisch von der „wahren“ Temperatur unterscheiden, weil das Absorptionsvermögen von Wasser nicht Eins ist.

**b) Temperaturmessung bis T= 100°C**

Stellen sie jetzt die Heizplatte bei maximaler Leistung (350 *gradC*) an und star-

ten zusätzlich den Rührmechanismus, sodass sich kein sichtbarer Wirbel ausbildet. Erhitzen Sie das Wasser auf etwa 10°C. Registrieren sie Druck, Pyrometeranzeige und Pt100-Spannung. Wiederholen Sie diese Messungen in Schritten von ungefähr 10 Grad. Welcher Wert sich letztlich einstellt, ob 10°C oder eben 11,5°C, ist völlig unerheblich. Warten sie bis sich die Wassertemperatur unter dauerndem Umrühren um ca. 10 *gradC* erhöht hat und lesen Sie dann für jeden Schritt die Spannung am Pt100, den Druck und die Pyrometeranzeige ab. Nehmen Sie als letzten Messpunkt die Temperatur des siedenden Wassers auf. Lesen Sie den Luftdruck am Barometer im Gang ab und notieren Sie diesen Wert. Achtung: Das Pyrometer nicht direkt über das Wasser halten sondern von der Seite schräg auf die Wasseroberfläche richten. Sonst kann eindringender Wasserdampf die Messwerte verfälschen.

**c) Temperatur von Trockeneis und flüssigem Stickstoff am Siedepunkt**

Lassen Sie den Glasballon zunächst einige Zeit abkühlen. Füllen Sie dann das Dewargefäß mit Trockeneis und Alkohol. Durch den Alkohol wird der Wärmekontakt zum Glasballon verbessert. Verwenden Sie dazu die schon fertige Trockeneis- Alkoholmischung in den beiden Dewargefäßen auf dem Waschbecken. Geben Sie wenn nötig noch etwas Trockeneis hinzu. Warten Sie zunächst bis sich die Temperatur stabilisiert hat. Dabei gut umrühren! Sobald sich die Messwerte stabilisiert haben, notieren Sie die Spannung und den Druck. Das Pyrometer ist bei diesen tiefen Temperaturen nicht mehr einsetzbar.

**Schütten Sie nach Beendigung der Messung das Trockeneis-Alkohol Gemisch wieder zurück in die Dewargefäße auf dem Waschbecken.**

Füllen sie jetzt das Dewargefäß schrittweise mit flüssigem Stickstoff und schieben Sie die Glaskugel **langsam** ein bis sie ganz vom Stickstoff bedeckt ist. Warten Sie bis die starke Verdampfung aufgehört hat und sich die Temperaturwerte stabilisieren. Registrieren sie PT100-Spannung und den Druck im Gasthermometer.

**Nach Beendigung der Messung gießen Sie bitte den restlichen flüssigen Stickstoff zurück in das große Dewargefäß.****Aufgabe 3: Messung von sehr hohen Temperaturen mit dem PtRh-Thermoelement**

Messen Sie die Temperaturverteilung in der Flamme mit dem PtRh-Thermoelement bei starker Luftzufuhr und bei schwacher Luftzufuhr des Gasbrenners. Das PtRh-Thermoelement besteht aus zwei Platindrähten, die aber

unterschiedlich stark mit Rhodium legiert sind. Achtung: Beim Versuch sind verschiedene Thermolemente vorhanden (Typ S und Typ B). Achten Sie darauf die richtige Eich-tabelle zu verwenden. Zeichnen Sie die ungefähre Gestalt der Flamme und tragen Sie für verschiedene Stellen die Thermospannung ein (fünf Messungen bei starker und schwacher Luftzufuhr). Drehen Sie nach Versuchsende das Gas ab und schütten Sie das Wasser und das Eis aus.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Tragen Sie die bei den Fixpunkten gemessenen Druckwerte gegen die Temperatur in ein Diagramm ein. Wählen Sie auf der x-Achse einen Temperaturbereich von  $-280^{\circ}\text{C}$  bis  $110^{\circ}\text{C}$ . In einem ersten Diagramm eichen Sie die Temperaturskala, indem Sie die Temperatur des Wasser-Eisgemisches als  $0^{\circ}\text{C}$  ansetzen. Tragen Sie dort den gemessenen Druck ein. Einen zweiten Eichpunkt erhalten Sie, indem Sie die den Druck  $p_{gem}$ , den Sie bei der Temperatur des kochenden Wassers gemessen haben. Dieser Messwert muss auf Normalbedingung umrechnen:

$$p_{NB} = p_{gem} \frac{1013,25 \text{ hPa}}{p_{LD}}, \quad (9)$$

Dabei beschreibt  $p_{LD}$  den gemessenen Luftdruck und  $p_{NB}$  den gemessenen Druckwert umgerechnet auf Normalbedingung. Ordnen Sie diesem Druckwert die Temperatur  $100^{\circ}\text{C}$  zu und tragen Sie den Wert in das Diagramm ein. Jetzt können sie die Eichgerade des Gasthermometers durch beide Messpunkte zeichnen. Bei welcher Temperatur wird der Druck Null? Tragen Sie jetzt den Druckmesswert bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs ein. Welchen Temperaturwert lesen sie ab? Wie vergleicht sich dieser mit dem Literaturwert  $T_{N_2} = 77 \text{ K}$  ( $-195,8^{\circ}\text{C}$ ).

Sie können diesen Literaturwert auch als weiteren Eichpunkt in einem zweiten Diagramm benutzen um den absoluten Nullpunkt besser zu bestimmen. Bei welcher Temperatur bekommen Sie jetzt den Druck  $p = 0 \text{ hPa}$ ? Tragen Sie schließlich auch den Druck ein, den Sie bei der Messung mit Trockeneis aufgenommen haben. Welche Temperatur erhalten Sie dafür? Ergänzen Sie das Diagramm durch eine Kelvin-Skala.

Bestimmen Sie mit Hilfe der zuvor angefertigten Eichkurve die aus den gemessenen Druckwerten resultierenden Temperaturwerte des Gasthermometers im Bereich von  $0^{\circ}\text{C}$  bis  $100^{\circ}\text{C}$ .

Tragen Sie den Widerstand des Pt100- Elements gegen die Temperatur in ein weiteres Diagramm ein. Welchen Zusammenhang finden Sie? Legen Sie durch die Messwerte im Bereich von  $0^{\circ}\text{C}$  bis  $100^{\circ}\text{C}$  eine Ausgleichsgerade. Vergleichen Sie die Steigung mit dem linearen Glied des Polynoms in Gleichung (4) und interpretieren Sie knapp das Ergebnis des Vergleichs.

Tragen Sie die Temperaturmessungen mit dem Pyrometer gegen die Temperatur des Gasthermometers in einem vierten Diagramm auf. Was beobachten Sie? Wie erklären Sie Ihre Beobachtung?

**Zu Aufgabe 3:** Skizzieren Sie die Flammengestalt und tragen Sie die Temperaturen für schwache und für starke Luftzufuhr ein. Die zu den Thermospannungen gehörigen Temperaturen sind der ausgelegten Eich-tabelle zu entnehmen.

## Versuch 42 Wärmekapazität



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Kalorimeter mit Magnetrührer
- Heizplatte mit Glasbecher
- Stativ mit Drahhaken
- 3 große Versuchskörper (Graphit, Aluminium, Blei)
- 3 kleine Versuchskörper für den Versuch bei Stickstofftemperatur

- Dewargefäß für flüssigen Stickstoff
- elektronisches Thermometer
- elektronische Waage
- Stoppuhr
- Schutzbrille und Schutzhandschuhe

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Spezifische Wärmekapazität, Mischungskalorimeter, Dulong-Petit'sches Gesetz, Grundbegriffe der kinetischen Wärmetheorie (Temperatur, Äquipartitionsprinzip, Freiheitsgrade). Für Physiker: Debey- Modell der spezifischen Wärme (qualitativ).

*Verständnisfragen:*

1. Wie können Sie Temperatur definieren?
2. Wo können Sie im Alltag beobachten, dass Wärme eine Energieform ist? Was bedeutet Wärme auf atomarer bzw. molekularer Ebene?
3. Was für Freiheitsgrade gibt es in Gasen bzw. in Festkörpern? Was besagt das Äquipartitionsprinzip? Was versteht man unter dem „Einfrieren“ von Freiheitsgraden?

4. Schildern Sie das Messprinzip eines Mischungskalorimeters und leiten Sie die entscheidenden Gleichungen her, denen man die spezifische Wärme entnehmen kann.
5. Wie hängt die Wärmekapazität mit der Anzahl der Freiheitsgrade zusammen? Was versteht man genau unter „Freiheitsgrad“? Was besagt das Dulong-Petit-Gesetz? Leiten Sie es her. Gilt es für alle Festkörper? Wie sieht der Temperaturverlauf der Wärmekapazität qualitativ aus?

## IV Aufgabe

- Messung der spezifischen Wärmekapazität verschiedener Festkörper mit der Mischungsmethode im Temperaturbereich zwischen 20°C und 100°C.
- Messung der spezifischen Wärmekapazitäten im Bereich von 20°C und -195°C.

## V Grundlagen

Wird einem Körper die Wärmemenge  $Q$  zugeführt, so erhöht sich, sofern kein Phasenübergang stattfindet, seine Temperatur um  $\Delta T$ . Die Größe

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \tag{1}$$

heißt Wärmekapazität des entsprechenden Körpers. Sie gibt an, welche Wärmemenge einem Körper zugeführt werden muss um seine Temperatur um 1°C zu erhöhen. Die Wärmekapazität hängt von der Masse bzw. der Stoffmenge des Körpers ab. Daher unterscheidet man noch die spezifische Wärmekapazität oder einfach spezifische Wärme

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \tag{2}$$

und die molare Wärmekapazität (Molwärme)

$$c_{mol} = \frac{M}{m} \frac{Q}{\Delta T}, \tag{3}$$

wobei  $m$  die Masse des Körpers und  $M$  die molare Masse beschreiben.

### V.1 Theorie der spezifischen Molwärme

Die innere Energie  $U$  eines Festkörpers ist die Summe der Schwingungsenergien aller Atomrümpfe, die um ihre Gleichgewichtslage im Festkörper schwingen. Diese Schwingungen sind in guter Näherung harmonisch, so dass im zeitlichen Mittel gleich viel Energie in der kinetischen und in der potentiellen Energie steckt. Jeder Atomrumpf hat drei Schwingungsfreiheitsgrade, ein Mol hat also insgesamt  $3N_A$  Schwingungsfreiheitsgrade.

In der klassischen Physik hat nach dem Äquipartitionsprinzip jeder dieser Freiheitsgrade die mittlere Energie  $\langle E \rangle = kT$  (je  $1/2kT$  für die kinetische und die potentielle Energie). Damit wäre die innere Energie eines Mols  $U_{Mol} = 3kTN_A = 3RT$  und damit die spezifische Molwärme  $C_V = 3R$ , die Vorhersage der Dulong-Petit'schen Regel. Offensichtlich ist diese Vorhersage schon bei Zimmertemperatur für leichte Elemente wie Be, C, Si, Al falsch. Dies war um 1900 gut bekannt und eine der „zwei dunklen Wolken“ über der klassischen Physik, wie es Lord Kelvin in einem berühmten Vortrag 1900 ausdrückte. (Die andere Wolke war das Ätherproblem bei der Lichtausbreitung). Die Lösung liefert die Quantenmechanik: Oszillatoren haben diskrete, gequantelte Energiezustände der Energie  $E_\nu = h\nu$  und die Wahrscheinlichkeit  $w$ , dass ein Zustand bei der Temperatur  $T$  angeregt ist, ist gegeben durch die Bose-Einstein Statistik

$$w(T, E_\nu) = \frac{1}{\exp(E_\nu/kT) - 1}, \tag{4}$$

wie es Planck 1900 bei der Interpretation seiner Strahlungsformel für einen schwarzen Temperaturstrahler postuliert hatte.

Der Erste, der dies erkannte war 1906 Albert Einstein, der sich lange mit der Interpretation und den Konsequenzen der Planck'schen Strahlungsformel befasst hatte. In seinem Modell der spezifischen Wärme betrachtete er  $N_A$  unabhängige 3-dimensionale Oszillatoren pro Mol, die alle dieselbe Eigenfrequenz hatten. Damit konnte er die damaligen experimentellen Daten befriedigend beschreiben und zum ersten Mal erklären, warum die spezifische Wärme mit der Temperatur abnimmt. In den folgenden Jahren wurden dann die spezifischen Molwärmern von Festkörpern bei immer tieferen Temperaturen genauer gemessen. Dabei zeigten sich systematische Abweichungen vom Einsteinschen Modell, die 1911 von Peter Debye behoben wurden.

Die Atomrümpfe in einem Festkörper schwingen nicht unabhängig voneinander, sie sind ganz im Gegenteil stark gekoppelt. Die Schwingungsanregungen sind daher gekoppelte Schwingungsmoden, die heute Phononen heißen und ein Mol

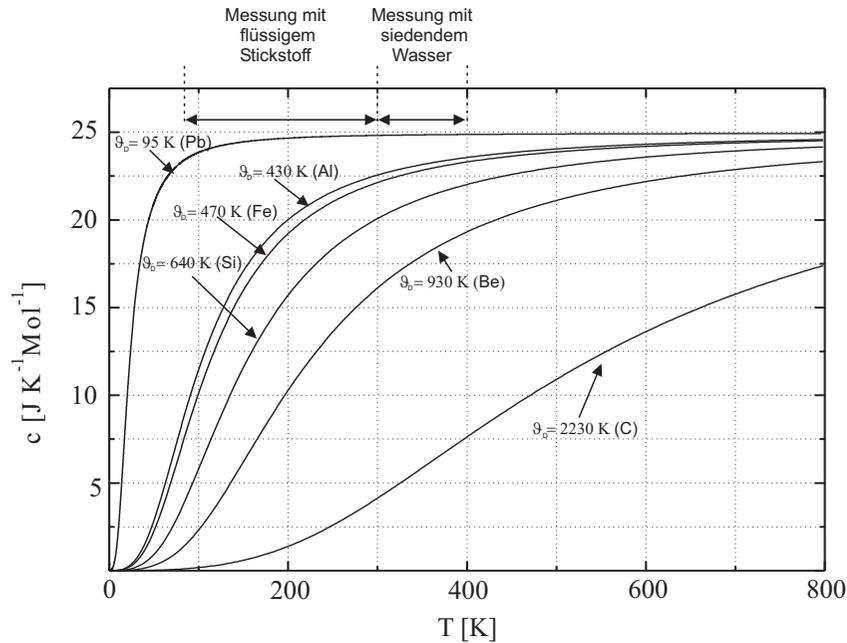


Abbildung 2: Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme nach dem Debye-Modell für verschiedene Elemente. Die Debytemperatur für Kohlenstoff ist hier für die Modifikation des Diamanten angegeben.

eines atomaren Festkörpers hat i.A.  $3N_A$  unterschiedliche Schwingungsfrequenzen  $\nu_i$ , die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $w(E_\nu, T)$  angeregt sind. Die innere Energie ist daher gegeben durch

$$U_{Mol} = \sum_{i=1}^{N_A} g(\nu_i) h\nu_i / (\exp[h\nu_i/kT] - 1) \quad (5)$$

Das Schwingungsspektrum ist im Allgemeinen nicht bekannt und schwer zu berechnen. Debye hat daher das Schwingungsspektrum in seinem Modell als quasi kontinuierlich angenommen und durch die Spektraldichte  $g(\nu) \approx \nu^2$  angenähert, wobei er diese aber bei der Grenzfrequenz abschneidet, die  $3N_A$  Schwingungszuständen entspricht. In seiner Theorie gibt es daher nur einen materialabhängigen Parameter, die Debye-Temperatur  $\Theta_D$  und der Verlauf der spezi-

fischen Molwärmern mit der Temperatur hängt nur von  $T/\Theta_D$  ab. Dieses einfache Modell beschreibt die experimentellen Daten recht gut und daher wird die Debye-Temperatur i.A. für die Charakterisierung der Wärmekapazität von Festkörpern genutzt. Stoffe wie Be, C, Al und Si haben hohe Debye-Temperaturen - sie haben ein „hartes“ Schwingungsspektrum, d.h. hohe Eigenfrequenzen, die erst bei sehr hohen Temperaturen angeregt werden können (siehe Abbildung 2). Im Versuch sollen am Ende die Debytemperaturen der Proben aus der gemessenen Temperaturabhängigkeit von  $C_V$  abgeschätzt werden.

## V.2 Prinzip der Messung

Das Verfahren der Mischungsmethode im Wasserkalorimeter beruht darauf, dass sich verschieden warme Körper bei Berührung durch Austausch von Wärmemengen in ihrer Temperatur ausgleichen. Ein Probekörper mit der Temperatur  $T_1$  wird in einem Kalorimetergefäß in ein Wasserbad der Temperatur  $T_2$  gebracht. Es stellt sich eine Mischungstemperatur  $\bar{T}$  ein. Nach dem Energiesatz gilt dann für den Fall  $T_1 > T_2$ : Die vom Probekörper abgegebene Wärme

$$Q = m_x c_x (T_1 - \bar{T}) \quad (6)$$

ist gleich der vom Wasser und dem Kalorimeter aufgenommenen Wärmemenge

$$Q = (m_W c_W + W)(\bar{T} - T_2) \quad (7)$$

Die Größe  $W$  stellt die Wärmekapazität des Kalorimeters dar, die auch als Wasserwert bezeichnet wird. Der Hersteller gibt für die verwendeten Kalorimeter einen Wert von ca.  $70 \frac{J}{K}$  an, dieser Wert ist aber stark vom Kalorimeter und dem Zustand der Wärmeisolierung ab. Der Index  $w$  bezieht sich auf Wasser,  $x$  auf den Probekörper. Daraus ergibt sich die gesuchte spezifische Wärmekapazität  $c_x$  zu

$$c_x = \frac{(m_W c_W + W)(\bar{T} - T_2)}{m_x (T_1 - \bar{T})} \quad (8)$$

Die Wärmekapazität von Wasser beträgt im Temperaturbereich von  $15^\circ\text{C}$  bis ungefähr  $65^\circ\text{C}$   $c_w = (4,186 \pm 0,004) \text{ J}/(\text{gK})$ .

Beim zweiten Versuchsteil wird ein Probekörper mit der Temperatur  $T_1$  (Zimmertemperatur) in flüssigem Stickstoff ( $T_2 = -195,8^\circ\text{C}$ ) abgekühlt. Aus der bekannten Verdampfungswärme  $Q_V$  und der verdampften Menge des Stickstoffes

$m_V$  kann die abgegebene Wärme  $Q$  des Probekörpers und daraus nach

$$Q = Q_V m_v = m_x c_x (T_1 - T_2) \quad (9)$$

der Wert  $c_x$  berechnet werden.

### V.3 Hinweise zur Fehlerrechnung

Überlegen Sie sich genau, welche Fehler relevant sind und welche vernachlässigt werden können. Da Sie bei diesem Versuch mit Temperaturdifferenzen arbeiten, sollten Sie sich hier ebenfalls Gedanken dazu machen, inwieweit der angegebene Fehler des Thermometers ein statistischer oder ein systematischer Fehler ist und wie Sie das entsprechend in Ihrer Auswertung berücksichtigen sollten. Schauen Sie hierzu auch gerne nochmal in die Einführung und die zwei Abschnitte zur Fehlerrechnung.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Vorbereiten des Wasserkalorimeters

Bei allen Messungen muss möglichst schnell ein Temperaturngleichgewicht erreicht werden. Dazu muss das Wasser gut durchmischt werden. Um Ihnen die Arbeit zu vereinfachen steht ein Magnetrührer zur Verfügung. Probieren Sie diesen vor Versuchsbeginn aus, indem Sie das Kalorimetergefäß zu drei Vierteln mit VE-Wasser<sup>1</sup> füllen und es zentrisch auf den Magnetrührer stellen. Schalten Sie den Rührer ein und beobachten Sie wie das Wasser durchmischt wird. Wenn das Gefäß richtig steht, hören Sie ein charakteristisches Ratschen des Magneten über dem Kalorimeterboden. Optimieren Sie den Rührvorgang durch Verschieben des Kalorimeters auf dem Rührer. Achten Sie bei den Versuchen- bei denen ja der Deckel geschlossen ist- darauf, dass Sie das Rührgeräusch deutlich hören. Bei der Messung mit den großen Probekörpern müssen Sie darauf achten, dass das Thermometer diese nicht berührt. Platzieren Sie die Körper daher nicht zentrisch im Kalorimeter, sondern z.B. auf der linken Seite. Wenn Sie den Deckel aufsetzen, muss das Thermometer dann auf der rechten Seite im Kalorimeter eintauchen.

<sup>1</sup>Voll Entsalzenes Wasser

### Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Massen aller Probekörper

### Aufgabe 4: Bestimmung des Wasserwertes

Bestimmen Sie zunächst die Masse des unbefüllten Kalorimeters ohne Deckel (Temperaturfühler herausnehmen). Überzeugen Sie sich vor dem Wiegen, dass das Kalorimeter sowohl innen als auch außen völlig trocken ist. Andernfalls trocknen Sie es mit einem Tuch gut ab. Stellen Sie das Kalorimetergefäß auf den Magnetrührer. Messen Sie mit dem Digitalthermometer die Zimmertemperatur. Diese entspricht der Anfangstemperatur  $T_2$  des Kalorimeters. Mit der Heizplatte wird Wasser auf  $T \approx 50^\circ\text{C}$  erhitzt. Die Heizplatte wird abgeschaltet und gewartet bis die Temperatur sich unter ständigem Umrühren nicht mehr ändert. Notieren Sie diese Temperatur als Anfangstemperatur  $T_1$ . Starten Sie anschließend die Uhr und befüllen Sie das Kalorimeter zur **Hälfte** mit dem heißen Wasser. Legen Sie den Deckel schnell auf und schalten sie den Magnetrührer ein. Die Temperatur des Wassers im Kalorimeter wird fünf Minuten lang alle 30 Sekunden gemessen, bis sich ein linearer Abfall ergibt (siehe Abbildung 3). Messen Sie abschließend das Gewicht des befüllten Kalorimeters ohne Deckel.

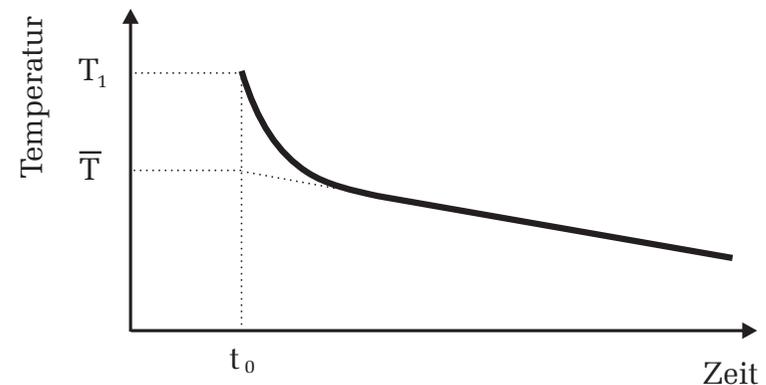


Abbildung 3: Zur Bestimmung des Wasserwertes

Hieraus können Sie die Masse des Wassers berechnen. Der Temperaturnausgleich im Kalorimetergefäß erfolgt so schnell, dass er mit dem Thermometer nicht verfolgt werden kann. Der Wärmeverlust an die Außenluft während des Temperaturnausgleichs ist vernachlässigbar. Die Mischungstemperatur  $\bar{T}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  des Einfüllens wird durch Extrapolation des gemessenen Temperaturverlaufs

bestimmt. Der Wasserwert kann aus der Bilanz der Wärmemengen bestimmt werden:

$$W = m_W c_W \frac{T_1 - \bar{T}}{\bar{T} - T_2} \quad \text{für } T_1 > T_2. \quad (10)$$

### Aufgabe 5: Messung der spezifischen Wärmekapazitäten der Probekörper mit kochendem Wasser

#### Hinweise zur Durchführung von Aufgabe 5

Um die benötigte Zeit zur Versuchsdurchführung zu verringern, sollten Sie für Aufgabe 5 das Wasser im Wasserkocher zum Sieden bringen und **anschließend nur soviel in das Becherglas füllen, wie nötig ist um die Probekörper komplett im Wasser unterzutauchen**. Füllen Sie mehr Wasser ein, braucht die Heizplatte deutlich länger bis das Wasser wieder siedet. Ein Richtwert sind ca. 400 ml. Achten Sie auch darauf, dass die Heizung der Heizplatte **maximal auf 300°C** eingestellt ist, da sonst das Heizelement durchbrennen könnte.

Zur Messung der spezifischen Wärmekapazität wird das Kalorimeter zu etwa drei Vierteln mit frischem VE-Wasser gefüllt und erneut gewogen um die Wassermenge zu bestimmen. Es werden die großen Probekörper benutzt. Füllen Sie den Glasbecher zur Hälfte mit Wasser und hängen Sie einen Probekörper mit Hilfe des Stativs in das siedende Wasser. Der Körper darf nicht den Boden des Glasbeckers berühren, da er sich sonst über 100°C aufheizen würde. **Der Probekörper sollte mindestens 5 Minuten lang im kochenden (sprudelnden) Wasser verbleiben.** Die Temperatur  $T_1$  des kochenden Wassers lässt sich aus dem Luftdruck  $p$  gemäß

$$T_1 = 100^\circ\text{C} + 0,0276^\circ\text{C}/\text{hPa} (p - 1013 \text{ hPa}) \quad (11)$$

bestimmen, wobei  $p$  den Luftdruck in hPa beschreibt. Messen Sie dazu den Luftdruck. Schon vor dem Einbringen des ersten Körpers ist die Temperatur des Wassers im Kalorimeter für einige Minuten jede Minute zu messen. Vergessen Sie nicht den Magnetrührer einzuschalten. Wenn der Probekörper mit Sicherheit die Temperatur des kochenden Wassers angenommen hat, wird er aus dem Wasserbad entfernt, kurz abgetropft und so schnell wie möglich zentrisch versetzt auf das Gitter im Kalorimeter gestellt. Kalorimeter sofort verschließen und darauf achten, dass das Thermometer nicht den Probekörper berührt. Notieren Sie alle 10 Sekunden die Temperatur. Messen Sie so lange die Temperatur bis ein Temperaturmaximum erreicht wird, d.h. die Temperatur im Kalorimeter wieder zu fallen beginnt. Die Mischungstemperatur  $\bar{T}$  entspricht dann dem

gemessenen Temperaturmaximum. Die Messungen mit den verschiedenen Probekörpern können hintereinander im selben Wasserbad durchgeführt werden. Bestimmen Sie jedoch vor jeder Messung erneut durch Wägung des Kalorimeters die Masse des Wassers.

### Aufgabe 6: Messung der spezifischen Wärmekapazitäten der Probekörper mit flüssigem Stickstoff

Verwenden Sie für diese Messung die kleinen Probekörper. Füllen Sie den Dewar zu 3/4 mit flüssigem Stickstoff, stellen Sie ihn auf die Waage und warten Sie den Temperaturengleich ab. Notieren Sie das Anfangsgewicht. Anschließend lässt man den Probekörper langsam an einem Faden in den Stickstoff eintauchen und wartet die Beendigung des Siedens ab. Daraufhin wird der Probekörper herausgenommen und das Endgewicht bestimmt. Die Differenz von Anfangs- und Endgewicht entspricht der verdampften Menge Stickstoff. Über die Verdampfungswärme wird daraus die abgegebene Wärmemenge bestimmt. Die für die Rechnung benötigten Größen sind im Anhang zusammengefasst. Schütten Sie den restlichen Flüssigstickstoff zurück in den großen Dewar.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 5:** Berechnen Sie die spezifischen Wärmekapazitäten sowie die Molwärmern der jeweiligen Probekörper im Temperaturbereich 20°C bis 100°C und vergleichen Sie diese mit den Literaturwerten sowie mit dem Gesetz von Dulong-Petit.

**Zu Aufgabe 6:** Es sind wieder die spezifischen Wärmekapazitäten und die Molwärmern zu berechnen. Beachten Sie dabei, dass diese eine Funktion der Temperatur sind. **Überlegen Sie, welche Größe Sie tatsächlich bestimmt haben.**

**Vergleich der Ergebnisse beider Messungen:** Rechnen sie für alle Proben das Verhältnis der spezifischen Molwärme bei tiefer Temperatur zu der bei hoher Temperatur mit Fehler aus. Für welche Festkörper stellen sie eine signifikante Abnahme der Molwärme mit T fest? Nutzen sie die aus der Debyetheorie bestimmte Kurve für dieses Verhältnis, um die Debyetemperatur der Stoffe zu bestimmen. Am Ende der Auswertung sollte eine Tabelle stehen, in der alle relevanten Messgrößen für Ihre Proben mit Fehlerangabe stehen.

### VIII Anhang

|                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Siedetemperatur von fl. Stickstoff   | $T_S = -195,8 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| Verdampfungswärme von fl. Stickstoff | $Q_V = 199 \text{ J/g}$               |
| Rel. Atommasse von Blei              | $M_{Pb} = 207,2 \text{ g/mol}$        |
| Rel. Atommasse von Aluminium         | $M_{Al} = 26,98 \text{ g/mol}$        |
| Rel. Atommasse von Graphit           | $M_C = 12,01 \text{ g/mol}$           |

**Literaturwerte:**

|                                   |                                 |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| Spez. Wärme von Blei (300 K)      | $c_{PB} = 0,129 \text{ J/(gK)}$ |
| Spez. Wärme von Aluminium (300 K) | $c_{Al} = 0,90 \text{ J/(gK)}$  |
| Spez. Wärme von Graphit (300 K)   | $c_C = 0,709 \text{ J/(gK)}$    |

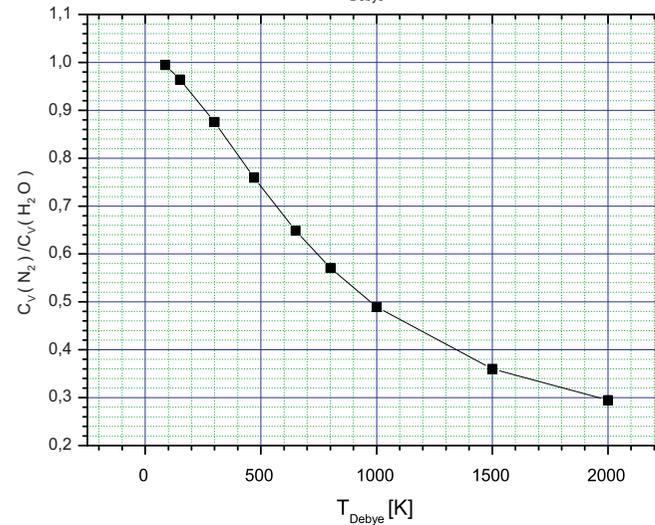
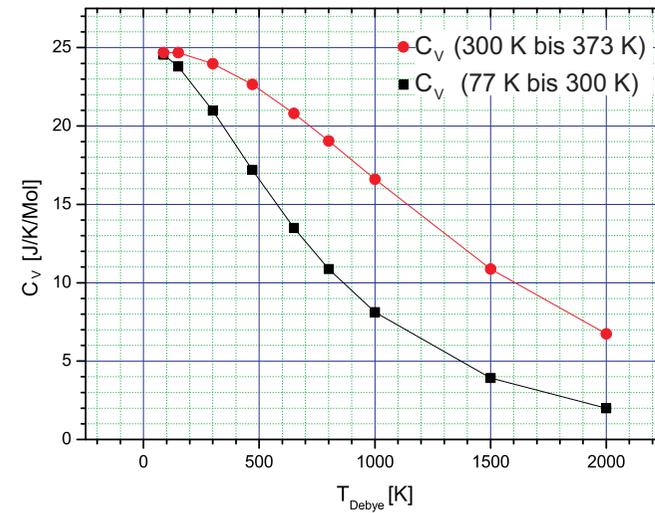


Abbildung 4: Oben: Spezifische Wärme beim Abkühlen von Zimmertemperatur auf die Temperatur des flüssigen Stickstoffs bzw. beim Abkühlen von der Temperatur des siedenden Wassers auf Zimmertemperatur als Funktion der Debye-Temperatur. Unten: Verhältnis der spezifischen Wärme beider Temperaturbereiche.