

Universität Heidelberg  
Physikalisches Praktikum II für  
Studierende der Molekularen Biotechnologie  
Ausgabe 18. Juni 2024



## Inhaltsverzeichnis

Versuch 25 Oszilloskop . . . . .	2
Versuch 31 Optische Abbildung . . . . .	11
Versuch 34 Spektralphotometrie . . . . .	21
Versuch 223 Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung . . . . .	26
Versuch 248 RC-Glied . . . . .	39

## Versuch 25 Oszilloskop



Abbildung 1: Versuchsaufbau Oszilloskop.

### I Messaufbau

- Oszilloskop TBS1072B
- Funktionsgenerator
- Signalgenerator
- Phasenschieber
- Netzteil

### II Motivation

Ziel dieses Versuchs ist nicht die Untersuchung eines physikalischen Gesetzes oder die Bestimmung einer Naturkonstanten, sondern das Kennenlernen und richtige Anwenden eines in Wissenschaft und Technik weit verbreiteten Instrumentes.

Am häufigsten wird das Oszilloskop zur Darstellung der zeitlichen Veränderung eines elektrischen Signals in Echtzeit benutzt. Nahezu alle physikalischen Größen, die sich mit geeigneten Sensoren in korrespondierende elektrische Signale umwandeln lassen, können mit einem Oszilloskop dargestellt werden. Das Anwendungsfeld reicht von einfachen Amplitudenmessungen einer Sinusspannung bis hin zur Darstellung von Herz- bzw. Gehirnströmen im medizinischen Bereich. Dabei überdeckt die Zeitaufösung einen Bereich von einigen ns bei schnellen Oszilloskopen, bis zu mehreren Minuten bei digitalen Speicheroszilloskopen.

### III Vorbereitung

Informieren Sie sich mit Hilfe zusätzlicher Literatur über das Funktionsprinzip eines Oszilloskops. Bereiten Sie sich außerdem auf folgende Themen vor: Kenngrößen von Wechselspannungen: Frequenz, Periode, Phase, Spitze-Spitze-Spannung  $U_{SS}$  bzw.  $U_{PP}$ , Effektivspannung. Senkrechte Überlagerung von Schwingungen: Lissajous-Figuren.

### IV Aufgaben

- Durch gezieltes Verstellen der Bedienelemente des Oszilloskops und Beobachtung der damit verbundenen Auswirkungen, soll die Bedienung des Oszilloskops geübt werden.
- Messung der Periodendauer und Amplitude von verschiedenen Signalformen. Für ein periodisch exponentiell abfallendes und aufsteigendes Signal ist die Halbwertszeit zu bestimmen.
- Messungen im Zweikanalbetrieb: Untersuchung der Phasenverschiebung zweier Sinussignale gleicher Frequenz, sowohl im yt- als auch im xy-Betrieb.

### V Grundlagen

#### V.1 Aufbau und Funktion eines Oszilloskops

Bis vor einigen Jahren waren noch analoge Kathodenstrahl-Oszilloskope im Einsatz. Dieses Gerät wurde heutzutage vorwiegend durch digitale Speicheroszilloskope ersetzt.

loskope ersetzt. Auch in diesem Versuch und im Praktikum arbeiten wir mit digitalen Speicheroszilloskopen. Bei einem analogen Oszilloskop steuert das anliegende Signal einen Elektronenstrahl der das Eingangssignal auf einem Leuchtschirm in Echtzeit wiedergibt. Bei einem digitalen Oszilloskop hingegen, wird das anliegende Signal nicht kontinuierlich aufgezeichnet, sondern es werden mit Hilfe eines Analog-Digital Wandlers in festen Zeitabständen der jeweils aktuelle Spannungswert gemessen und in einem Speicher abgelegt. Diese Werte werden anschließend auf einem Display dargestellt. Ein analoges Oszilloskop stellt das Eingangssignal demnach kontinuierlich dar, während ein digitales Oszilloskop nur eine Punktfolge aufnehmen kann.

Wegen dieser lückenlosen Messung zeigen analoge Geräte in Bezug auf die Amplitudenaufösung in vielen Fällen bessere Eigenschaften als digitale Geräte. Der Vorteil digitaler Oszilloskope liegt darin, dass Signale zwischengespeichert werden. Damit lassen sich auch einmalige Vorgänge aufzeichnen und zu einem späteren Zeitpunkt wiedergeben. Wollen Sie z.B. mit einem Mikrophon einen kurzen Knall aufzeichnen, wird Ihnen das im Analogmodus nicht gelingen. Das Signal ist viel zu kurz und das Auge zu träge um diesem kurzen Signal auf dem Schirm zu folgen. Im Digitalmodus wird hingegen das Signal gespeichert und kann daher auch noch dann wiedergegeben werden, wenn das Signal bereits abgeklungen ist. Ein weiterer Vorteil des Digitalmodus ist die Möglichkeit der digitalen Signalverarbeitung. Sie können mit den gemessenen Werten Berechnungen durchführen z.B. den Effektivwert bestimmen oder das Spektrum des Signals mit Hilfe einer Fouriertransformation berechnen.

## V.2 Das Oszilloskop im yt-Betrieb

Im yt-Betrieb zeigt ein Oszilloskop ein Spannungspegel als Funktion der Zeit an. Die Signalspannung wird auf der vertikalen y-Achse dargestellt, die horizontale t-Achse ist die Zeitachse. Das zu messende Signal wird an die Eingangsbuchse (BNC- Buchse: Bayonet Neill Concelman) angelegt. Das Signal wird danach analog aufbereitet, d.h. gedämpft oder verstärkt und gefiltert. Diese Analogelektronik des Oszilloskops hat eine gewisse Bandbreite, d.h. es können keine beliebig hohen Frequenzen ohne Fehler aufbereitet werden. Die Bandbreite ist definiert als die Frequenz, bei welcher ein sinusförmiges Eingangssignal auf 71 % (-3 dB) seiner ursprünglichen Größe abgeschwächt wird. Die hier verwendeten Geräte haben eine Bandbreite von 70 MHz. Ein 70 MHz Sinussignal mit einer Amplitude von 1 V hat nach dem durchlaufen des Analogteils somit nur noch eine Amplitude von etwa 0,7 V (Abbildung 2).

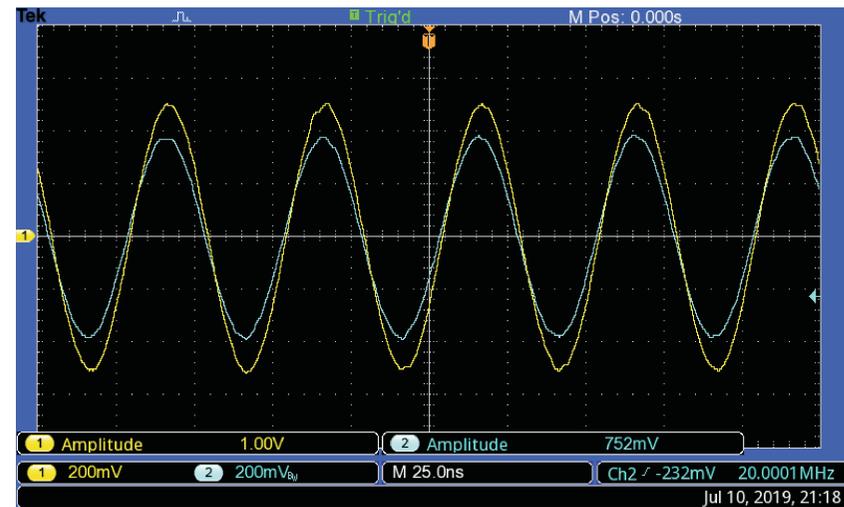


Abbildung 2: An beiden Kanälen liegt ein Sinussignal mit einer Frequenz von 20 MHz und einer Amplitude von 1 V. Bei Kanal 2 (blaue Kurve) wurde die Bandbreite auf 20 MHz reduziert wodurch die Amplitude auf ungefähr 70 % des ursprünglichen Werts abfällt.

Nach Durchlaufen der Analogaufbereitung wird das Signal mit einem schnellen Analog- Digital Wandler (AD- Wandler) digitalisiert. Dazu wird die momentane Signalspannung in festen, diskreten Zeitabständen mit dem DA- Wandler abgetastet und die digitalen Werte in einem Speicher abgelegt. Der AD- Wandler hat eine Auflösung von 8 bit. Somit können 256 verschiedene diskrete Spannungswerte gemessen werden. Die Rate mit der diese Messungen erfolgen wird als Samplerate oder Abtastrate bezeichnet. Das hier verwendete Oszilloskop hat eine Samplerate von 1 GS/s, d.h. pro Sekunde können maximal 1 Milliarde diskrete Einzelmessungen durchgeführt werden. Die tatsächliche Samplerate hängt von der Größe des Speichers (hier 2500 Messwerte) und der gewählten Zeitaufösung ab. Bei der höchsten Samplerate wird jede Nanosekunde eine Messung durchgeführt. Da der Speicher 2500 Messwerte aufnehmen kann beträgt die Aufzeichnungszeit  $2,5 \mu\text{s}$ . Soll das Zeitfenster z.B. auf  $250 \mu\text{s}$  erhöht werden, muss die Samplerate auf 10 MS/s reduziert werden. Das Prinzip der Abtastung ist in Abbildung 3 dargestellt. Damit das rekonstruierte Signal möglichst unverfälscht wiedergegeben wird, muss die Abtastrate deutlich höher sein wie die Frequenz des zu messenden Signals. Die gespeicherten Daten können von einem Prozessor weiter verarbeitet werden. So lassen sich verschiedene mathematische Operationen anwenden und es können automatische Messungen durchgeführt werden. Schließlich werden die gespeicherten und eventuell weiter verarbeiteten Werte auf einen Display dargestellt.

### V.3 Triggerung

Im Allgemeinen möchte man mit einem Oszilloskop periodische Signale darstellen. Legt man beispielsweise an den y-Eingang ein kontinuierliches Sinussignal, so soll auf der Anzeige stets ein zeitlich konstanter Ausschnitt dieses Signals angezeigt werden. Die Anzeige muss daher mit dem Signal synchronisiert werden. Ohne solch eine Synchronisation würde man auf dem Schirm nach jedem Durchlauf des Signals unterschiedliche Signalausschnitte sehen was zu einem flackernden, unregelmäßigen Bild führt (Abbildung 4 oben). Wir müssen dem Oszilloskop daher mitteilen, dass es immer den gleichen Signalausschnitt darstellen soll. Dieses Vorgehen wird als Triggern bezeichnet. Bei der sogenannten Flankentriggerung (Abbildung 4 unten) beginnt das Oszilloskop erst mit der Darstellung wenn an der Position  $A$  das Signal einen bestimmten Wert  $B$  schneidet. Dieser sogenannte Triggerlevel lässt sich frei einstellen und wird als waagrechte Linie angezeigt. Nach einem Durchlauf wird die Anzeige abgeschaltet und erst dann wieder eingeschaltet, wenn das Signal wieder diesen Triggerlevel schnei-

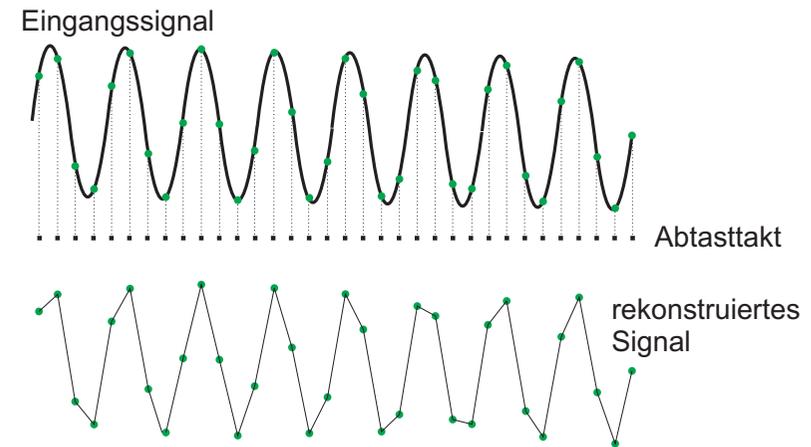


Abbildung 3: Oben: Das Eingangssignal (schwarze Kurve) wird mit einem festen Takt (Abtasttakt) abgetastet und die diskreten Messwerte in einem Speicher abgelegt. Die Messwerte sind als grüne Punkte dargestellt. Unten: Rekonstruktion des Signals durch lineare Interpolation. Zur „Glättung“ des Signals sind auch andere Interpolationsverfahren ( $\sin(x)/x$  Interpolation) möglich.

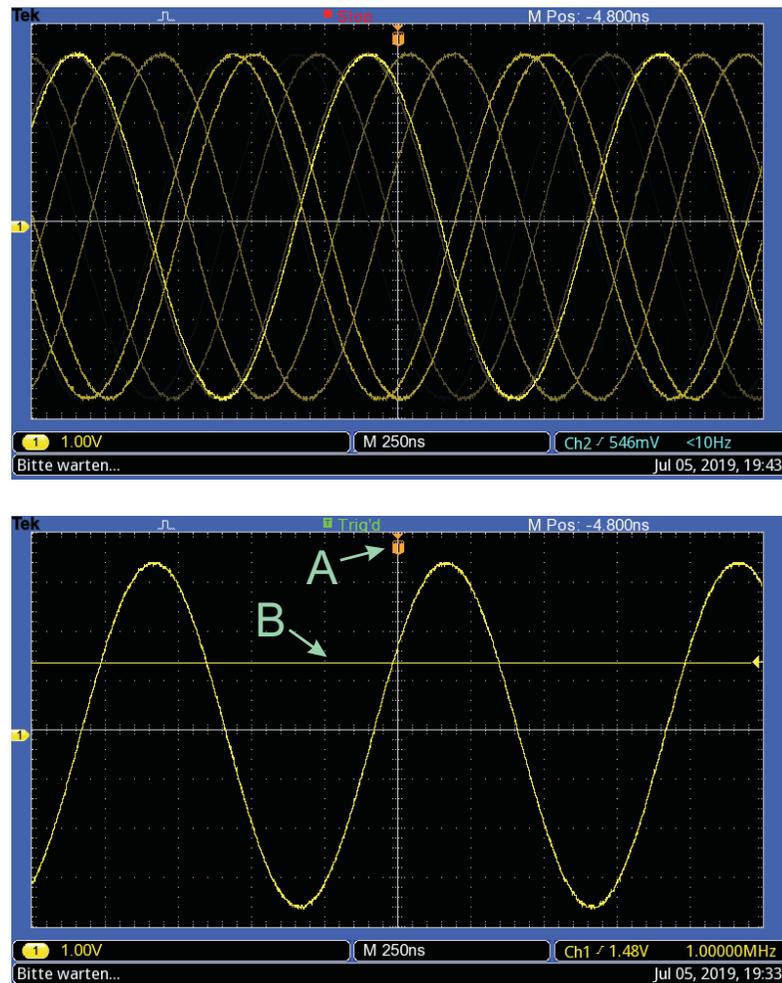


Abbildung 4: Oben: Ungetriggertes Signal. Das Oszilloskop nimmt bei jedem Durchlauf das Signal bei unterschiedlichen Positionen auf. Das angezeigte Bild ist daher nicht stabil und flackert. Unten: Getriggertes Signal.

det. Somit wird immer der gleiche Signalausschnitt dargestellt. Ferner kann man noch vorgeben, ob das Signal von unten kommend den Triggerlevel schneidet (Triggern auf die steigende Flanke) oder von oben kommend (Triggern auf die fallende Flanke). In Abbildung 4 unten erfolgt die Triggerung beispielsweise auf die steigenden Flanke. Auf die genaue Einstellung der Triggerparameter wird an späterer Stelle noch detailliert eingegangen.

### V.4 Bedienung des Oszilloskops

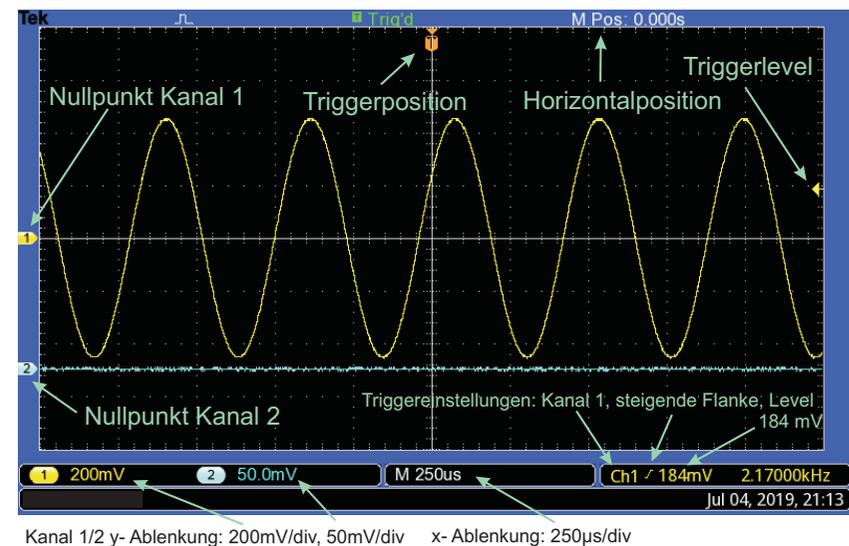


Abbildung 5: Bildschirm des Oszilloskops. Wichtige Einstellungen werden an den Rändern eingeblendet.

Das Display des Oszilloskops (Abbildung 5) besitzt ein Koordinatensystem mit dem Sie die Signale leicht vermessen können. Zusätzlich befindet sich auf dem Bildschirm noch ein Gitternetz bestehend aus acht mal zehn Kästchen. Die Breite und Höhe eines Kästchens wird im folgenden als DIV bezeichnet (DIV ist die englische Abkürzung für „division“ und bedeutet hier die Unterteilung des Koordinatensystems des Bildschirms). Die horizontale und vertikale Achse des Koordinatenkreuzes besitzen zusätzlich noch eine Feineinteilung von 0,2 DIV. Die Frontplatte des Oszilloskops ist in vier Bereiche gegliedert:



Abbildung 6: Bedienfeld des Oszilloskops TBS 1072B. Die wichtigsten Bedienelemente sind mit einem blauen Rahmen markiert. 1: Eingangsbuchsen 2: Vertikalablenkung, 3: Horizontalablenkung, 4: Trigger, 5: Multifunktionsknopf.

**Vertikalablenkung** Die Eingangssignale werden über BNC- Buchsen an das Oszilloskop angeschlossen (Bereich 1 in Abbildung 6). Alle Oszilloskope im Praktikum sind für den Zweikanalbetrieb ausgelegt, d.h. sie können gleichzeitig zwei verschiedene Eingangssignale auf dem Schirm darstellen.

Das Feld Vertikalablenkung (Bereich 2 in Abbildung 6) ist symmetrisch für beide Kanäle aufgebaut. Die Bedienelemente der linken Seite sind für den Kanal 1 ausgelegt, die der rechten Seite für den Kanal 2. Durch Drücken der Tasten **1** bzw. **2** können Sie die einzelnen Kanäle ein- und ausschalten. Zusätzlich erscheinen am rechten Monitorrand weitere Einstellmöglichkeiten für den gewählten Kanal. Wichtige Optionen sind **Kopplung** und **Tastkopf**. Da wir keinen Tastkopf verwenden muss für diese Einstellung **1X Spannung** gewählt werden. Drücken Sie auf die Taste neben **Kopplung**. Es erscheinen drei Einstelloptionen: **AC** **DC** sowie **Erde**. Die gewünschte Option können Sie mit dem Drehregler (Bereich

5 in Abbildung 6) auswählen und durch drücken auf diesen einstellen.

Falls Sie die Option **Erde** wählen, wird die Eingangsbuchse auf Masse (Erde) geschaltet, so dass 0 V anliegen. Das Signal wird ausgeschaltet und Sie sehen eine waagrechte Linie. Diese Einstellung dient zur Justierung der Nulllinie. Mit den Positionsreglern **Position** im Feld 2 können Sie bei dieser Kopplung die Nulllinie so verschieben, dass diese im Ursprung des Koordinatenkreuzes liegt. Dies ist dann wichtig, wenn Gleichspannungen gemessen werden sollen, da in diesem Fall eine exakte Ausrichtung des Nullpunkts erforderlich ist. Mit den Optionen **AC** **DC** legen Sie die Eingangskopplung fest. Möchten Sie beispielsweise, wie in Abbildung 7 dargestellt, eine Sinusspannung messen, die einen Gleichspannungsanteil besitzt, so ist dies nur bei der direkten Kopplung **DC** möglich. Bei der DC- Kopplung wird das Eingangssignal direkt, ohne weitere Beeinflussung, wie z.B. Filterung, dargestellt. Möchten Sie bei dieser Kopplung quantitative Messungen durchführen, müssen Sie aber zuvor den Nullpunkt mit Hilfe der Kopplung **Erde** einstellen. Die Lage des Nullpunkts wird durch einen gelben (Kanal 1) bzw. blauen (Kanal 2) Pfeil am linken Monitorrand angezeigt (Abbildung 5).

In den meisten Fällen ist man aber nur an den Änderungen eines Signals interessiert, d.h. am Wechselspannungsanteil. Um nur diesen Anteil darzustellen muss die Option **AC**<sup>1</sup> eingestellt werden. Bei dieser Kopplung wird zusätzlich ein Hochpassfilter zugeschaltet, der etwaige Gleichspannungsanteile ausfiltert. Bei der AC- Kopplung wird auf dem Oszilloskopschirm dann nur das Sinussignal ohne den Gleichspannungsanteil dargestellt (Abbildung 7 Mitte).

Mit dem Oszilloskop sollen Spannungspegel über mehrere Dekaden gemessen werden können. Da der Analog- Digital- Wandler seine volle Auflösung in einem festen Spannungsbereich besitzt, müssen die Eingangspegel an diesen Bereich angepasst werden. Sollen sehr kleine Spannungen dargestellt werden, so müssen diese verstärkt werden, damit der Spannungsverlauf möglichst den optimalen Bereich des AD- Wandlers ausfüllt. Bei der Darstellung von sehr hohen Spannungen müssen diese entsprechend abgeschwächt werden. Zu diesem Zweck ist zwischen der Eingangsbuchse und dem AD- Wandler eine interne Elektronik zwischengeschaltet, mit dessen Vorwahlschalter der y-Vertikalablenkung eingestellt werden kann. Diese Vorwahlschalter **Scale** befinden sich im Bereich 2 in Abbildung 6. Bei dem hier verwendeten Oszilloskop kann der Ablenkoeffizient im Bereich von 2 mV/DIV bis 5 V/DIV eingestellt werden. 50 mV/DIV bedeu-

<sup>1</sup>AC: alternating current (Wechselstrom), DC: direct current (Gleichstrom), AC/DC: ge-  
niale Rockband.

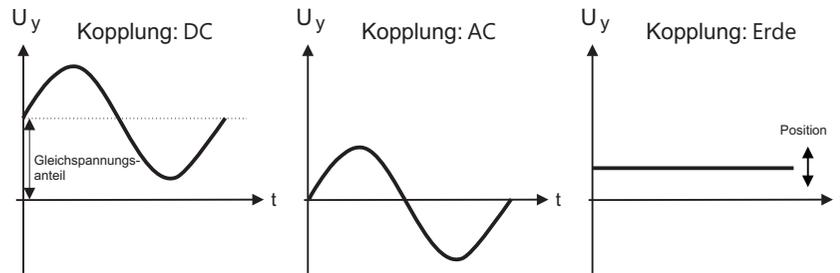


Abbildung 7: Auswirkungen der verschiedenen Eingangskopplungen. Bei der DC-Kopplung wird sowohl der Gleichspannungs- als auch der Wechselspannungsanteil auf dem Schirm angezeigt, während bei der AC-Kopplung nur der Wechselspannungsanteil des Eingangssignals dargestellt wird. In der Erde-Einstellung wird die  $y$ -Ablenkung geerdet. Mit dem Positionsregler kann zur Festlegung des Nullpunkts die Nulllinie vertikal verschoben werden.

tet beispielsweise, dass bei einer Spannungsänderung von 50 mV, das Signal ein Kästchen in vertikaler Richtung durchläuft. Die aktuelle Einstellung wird am Monitor am linken unteren Rand angezeigt (Abbildung 5).

**Horizontalablenkung** Mit dem Regler **Scale** im Horizontalfeld (Bereich 3 in Abbildung 6) können Sie die Zeitaufösung einstellen. Der Einstellbereich deckt einen Bereich von 5 ns bis 50 s ab. Der aktuell eingestellte Wert wird am Monitor am unteren Rand angezeigt (Abbildung 5). Die Einstellung 50  $\mu$ s bedeutet, dass das Signal 50  $\mu$ s benötigt um ein Kästchen des Bildschirms in horizontaler Richtung zu durchlaufen. Über dem Regler befindet sich ein weiterer Einstellregler **Position** mit dem Sie das Oszilloskopbild in horizontaler Richtung verschieben können.

**Triggerung** Mit dem Potentiometer **LEVEL** kann die Triggerschwelle stufenlos eingestellt werden. Die Triggerschwelle wird beim Drehen als horizontale Linie auf dem Bildschirm angezeigt. Mit der Taste **Menu** über dem Einstellregler der Triggerschwelle können Sie weitere Einstellungen der Triggerung auswählen. Mit der Taste **Quelle** wählen Sie die Triggerquelle aus. Sie können entweder auf Kanal 1, Kanal 2 oder auf ein externes Signal, welches an der zusätzlichen rechten Eingangsbuchse anliegt, triggern. Mit der Taste **Modus** wählen Sie den Triggermodus. Mögliche Optionen für den Modus sind **Auto** und **Normal**. Im

Modus **Normal** erfolgt die Triggerung so wie es zuvor in der Einführung beschrieben wurde. Das Oszilloskop beginnt erst dann mit der Signalaufzeichnung, wenn das Eingangssignal eine bestimmte Schwelle, die Sie mit dem Potentiometer **LEVEL** einstellen können, überschreitet. Liegt die Triggerschwelle außerhalb des Signals stoppt das Oszilloskop und es wird permanent das zuletzt getriggerte Signal angezeigt. Bei der automatischen Triggerung **Auto** wird das Oszilloskop zur Darstellung gezwungen, auch wenn der Triggerlevel außerhalb des Signals liegt. Es werden aktuelle Spannungswerte angezeigt. Da allerdings keine Triggerung vorliegt werden keine stabilen Signale auf dem Display angezeigt. Ob eine Triggerung erfolgt wird durch den Text *Trig d* am oberen Bildschirm angezeigt. Ferner können Sie noch mit der Taste **Anstieg** die Triggerflanke einstellen (**steigend**, **fallend**).

**Das Oszilloskop im xy-Betrieb** Es ist nicht unbedingt notwendig, dass die  $x$ -Achse immer die Zeitachse darstellt. Im  $xy$ -Modus, den Sie mit der Taste **Utility** **Anzeigen** **Format** aktivieren können, wird ein Spannungssignal  $U_y$  als Funktion eines anderen Signals  $U_x$  dargestellt. Auf dem Schirm erscheint dann das Signal  $U_y(U_x)$ . In  $y$ -Richtung folgt das Signal der Spannung  $U_y$  (Anschluss an die BNC-Buchse 2) und in  $x$ -Richtung dem Signal  $U_x$  (Buchse 1). Das Display zeigt somit die senkrechte Überlagerung der beiden Eingangsspannungen dar.

Der  $xy$ -Betrieb ist besonders zur Darstellung der Phasenverschiebung zweier Signale geeignet. Bei der senkrechten Überlagerung zweier Sinussignale der gleichen Frequenz entsteht im  $xy$ -Modus eine Ellipse<sup>2</sup>. In Abbildung 8 ist das Zustandekommen dieser sogenannten Lissajous-Figur skizziert. Sind die Amplituden gleich groß, so hängt die Form der Lissajous-Figur von der Phasenverschiebung ab. In der Abbildung sind unten links die Lissajous-Figuren für Phasenverschiebungen zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  skizziert. Bei verschiedenen großen Amplituden erhält man statt eines Kreises eine Ellipse. Sind die Frequenzen nicht gleich groß, so entstehen komplexere Formen, die ebenfalls von der Phase abhängen. Außerdem erhält man nur dann ein stehendes Bild, wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis stehen. In Abbildung 8 sind die Lissajousfiguren für die Frequenzverhältnisse 2:1, 3:1 und 3:2 eingezeichnet. Das Frequenzverhältnis kann aus den Lissajousfiguren unmittelbar abgelesen werden. Denkt man sich die Figur in ein enganliegendes Rechteck eingebettet, so gibt die Anzahl der

<sup>2</sup>Eine Gerade und ein Kreis sind Spezialfälle einer Ellipse bei denen entweder eine Hauptachse Null ist oder beide Hauptachsen gleich groß sind.

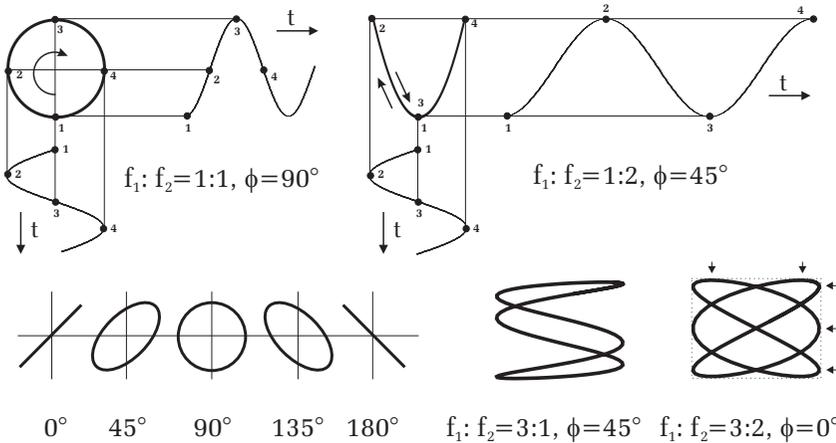


Abbildung 8: Durch die senkrechte Überlagerung zweier Sinussignale entstehen im  $xy$ -Betrieb Lissajous-Figuren. In der linken Bildhälfte sind die Frequenzen der Sinussignale gleich groß. Die Form der Lissajous-Figur hängt dann nur von der Phase und der Amplitude der beiden Signale ab. Bei unterschiedlichen Frequenzen (rechte Bildhälfte) entstehen komplexere Formen und nur dann ein stehendes Bild, wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Das Frequenzverhältnis kann dann aus der Anzahl der „Knoten“ in vertikaler und horizontaler Richtung abgelesen werden. Im Beispiel rechts unten sind die Knoten durch Pfeile angedeutet. Das Frequenzverhältnis beträgt hier demnach 3:2.

Berührungspunkte der Lissajous-Figur mit einer horizontalen bzw. einer vertikalen Seite des Rechtecks, das Frequenzverhältnis wieder. Die Berührungspunkte sind in Abbildung 8 unten rechts durch Pfeile angedeutet.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Bedienung des Oszilloskops

Schließen Sie den Funktionsgenerator an Kanal 1 des Oszilloskop an. Als Signalform wählen Sie am Funktionsgenerator die Stellung Sinus mit einer Frequenz von ca. 100 Hz. Drücken Sie die Kanaltaste **1** und überzeugen Sie sich, dass für die Option **Dämpfung** der Wert **1X Spannung** eingestellt ist. Falls hier ein

anderer Wert eingestellt ist, werden Spannungen entsprechend des gewählten Faktors größer angezeigt. Wenn Sie den Trigger richtig eingestellt haben sollten Sie ein stehendes Bild der Sinusspannung erkennen. Untersuchen Sie die Auswirkungen der Regler **Scale** im Vertikal- und Horizontalfeld (Abbildung 6) sowie die Positionsregler für die  $x$ - und  $y$ -Richtung. Stellen Sie danach die  $x$ -Position wieder symmetrisch ein indem Sie auf den Positionregler im Horizontalfeld drücken.

Drücken Sie im Triggerfeld die Taste **Menu** und wählen Sie für den Modus **Auto**. Beobachten Sie durch Drehen des **Level**-Reglers, wie sich das Signal an der Triggerposition verschiebt. Die Triggerposition wird am oberen Bildschirmrand durch ein T-Symbol angezeigt und der Triggerlevel durch eine horizontale Linie. Liegt der Triggerlevel außerhalb des Signals ist natürlich keine Triggerung möglich. Im **Auto**-Modus wird trotzdem, das ungetriggerte Signal angezeigt. Allerdings erhält man hier kein stabiles Bild des Signals. Beobachten Sie was passiert wenn Sie im Triggermenü den Modus **Normal** auswählen sowie die Auswirkung der Triggerflanke (Option **Anstieg**). Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse dieses Abschnitts in Ihr Protokollheft.

### Aufgabe 2: Amplituden- und Zeitmessung

Verbinden Sie den Ausgang des **Signalgenerators** mit Kanal 1 des Oszilloskops und die Versorgungsspannungsbuchse mit dem Netzteil. Stellen Sie die Nulllage ein: Kanal Taste **1** drücken und in der Option **Kopplung** Erde wählen. Verschieben Sie nun die Nulllinie in die vertikale Mitte des Bildschirms. Anschließend die Kopplung wieder auf DC umschalten.

Der Signalgenerator erzeugt mehrere Signale mit unterschiedlicher Frequenz und Amplitude. Mit dem Drehschalter können die einzelnen Signale ausgewählt werden. Achten Sie darauf, dass der zusätzliche Umschalter auf der oberen Position ( $\square$ ) steht. Nur in der Schalterstellung 5 ist der Umschalter nach unten zu kippen. Führen Sie die folgenden Messungen in der DC-Kopplung durch. In der Schalterstellung 3 müssen Sie zusätzlich noch die Kopplung auf AC schalten, da Sie sonst nicht auf das Signal triggern können. Messen Sie für jede Schalterstellung die folgenden Größen:

a) Periodendauer bzw. Frequenz. b) Spitze-Spitze Spannung  $U_{SS}$  sowie falls vorhanden den Gleichspannungsanteil. c) Skizze des anliegenden Signals. Sie können das Oszilloskopbild auch speichern. Stecken Sie dazu einen USB-Stick in die Buchse unter dem Monitor und drücken Sie dann auf die Taste **☒** oben links neben dem Multifunktionsknopf. Ein Computer mit Drucker ist im Raum

vorhanden. Bitte überprüfen Sie vor dem Speichern eines Bildes folgende Einstellungen: *Utility - Weiter S1 von 3 - Optionen - Drucker einrichten - Tintenspar auf Ein, Dateiformat auf Jpg*. Dadurch wird erreicht, dass beim Ausdrucken der Datei eine schwarze Linie auf weißem Hintergrund gedruckt wird. Ansonsten wird ein schwarzes Papier mit weißer Linie gedruckt, was unnötig Toner verbraucht.

d) In der letzten Schalterstellung wird ein Signal erzeugt, das periodisch exponentiell abfällt und danach wieder exponentiell ansteigt. Schalten Sie dazu den Umschalter auf die untere Position. Messen Sie entweder für die abfallende oder ansteigende Flanke die Zeit, die das Signal benötigt bis die halbe Spannung  $U_{SS}$  erreicht wird (Halbwertszeit).

Benutzen Sie bei diesen Messungen die unterschiedlichen Eingangskopplungen sowie die Cursor Funktionen. Um diese auszuwählen drücken Sie die Taste **Cursor**. Bei der Option **Typ** können Sie zwischen Amplituden- oder Zeitmessung auswählen und bei **Quelle** können Sie den Kanal einstellen an dem die Messung durchgeführt werden soll. Je nachdem was Sie gewählt haben erscheinen auf dem Monitor zwei horizontale oder vertikale Cursor, die Sie mit dem Multifunktionsknopf verschieben können. Möchten Sie den anderen Cursor verschieben, müssen Sie diesen mit den Tasten rechts neben dem Monitor auswählen. Die aktuellen Messwerte werden rechts am Monitor angezeigt.

Viele Größen können auch automatisch vom Oszilloskop bestimmt werden. Drücken Sie dazu die Taste **MEASURE** und wählen Sie den gewünschten Kanal. Es erscheint eine Liste mit verschiedenen Messgrößen die Sie mit dem Multifunktionsknopf auswählen können. Durch Drücken des Knopfs wird die gewählte Funktion eingestellt und am unteren Monitorrand angezeigt. Insgesamt können gleichzeitig 6 Messgrößen angezeigt werden

Um den Fehler möglichst klein zu halten, müssen die vertikalen Skalierungen, so eingestellt werden, dass das Signal auf dem Oszilloskop möglichst den gesamten Bildschirm ausfüllt. Dies liegt daran, dass der Analog/Digital- Wandler eine Auflösung von 8 Bit besitzt. Der gesamte y-Bereich kann daher nur in 256 Stufen erfasst werden. Diese Auflösung können Sie aber nur nutzen, wenn das Signal den vollen y-Bereich abdeckt. Ist das Signal nur halb so hoch, verlieren Sie auch die Hälfte der Auflösung.

Machen Sie sich dies anhand einer Testmessung klar. Führen Sie eine automatische Messung der Spitze-Spitze Spannung durch. Wählen Sie dazu zunächst die y-Ablenkung so, dass das Signal möglichst den vollen y-Bereich nutzt. Variieren Sie anschließend die y-Ablenkung so, dass das Signal immer kleiner dargestellt

wird und beobachten Sie dabei die Anzeige der **MEASURE** Funktion.

### Aufgabe 3: Zweikanalbetrieb

Stellen Sie am **Funktionsgenerator** ein Sinussignal mit einer Frequenz von ca. 10 kHz und einer Amplitude von ungefähr 1 V<sub>SS</sub> ein. Die Amplitude sollten Sie mit dem Oszilloskop nachmessen. Schließen Sie nun an den Eingang des Phasenschiebers den Funktionsgenerator an. Die Versorgungsspannungsbuchse ist mit dem Netzteil zu verbinden. Der Phasenschieber liefert an den beiden Ausgangsbuchsen zwei sinusförmige Wechselfspannungen mit der gleichen Frequenz wie die Eingangsspannung des Funktionsgenerators, aber mit einer einstellbaren Phasenverschiebung zwischen 0° und 180°. Zusätzlich kann für jedes Sinussignal auch noch die Amplitude variiert werden. Schließen Sie die Ausgänge des Phasenschiebers an die beiden y-Eingänge des Oszilloskops an und stellen Sie den Darstellungsmodus so ein, dass beide Signale gleichzeitig zu sehen sind. Beobachten Sie zunächst qualitativ was passiert, wenn Sie die Phasenlage sowie die Amplituden der beiden Signale verstellen.

Stellen Sie den xy-Modus ein: Tasten **Utility** **Anzeigen** **Format**. Drehen Sie am Horizontalregler **Scale** bis das Signal flüssig dargestellt wird. Variieren Sie die Ausgangsspannung am Funktionsgenerator so, dass die Ellipse möglich den gesamten Bildschirm ausfüllt. Falls das Signal Verzerrungen aufweist, haben Sie die Amplitude zu hoch eingestellt. Drehen Sie dann die Amplitude zurück und erhöhen Sie die y- Empfindlichkeit. Untersuchen Sie nun wieder qualitativ die Auswirkungen der Einstellregler auf das Oszilloskopbild. Skizzieren Sie Ihre Beobachtungen in das Protokollheft.

Messen Sie für zwei verschiedene Einstellungen des Potentiometers für die Phaseneinstellung, die Phasenverschiebung der beiden Signale sowohl im xy- als auch im yt-Betrieb. Die Bestimmung des Phasenwinkels ist in Abbildung 9 erläutert. Im xy- Modus können Sie nicht die Cursor verwenden. Sie müssen die entsprechenden Größen direkt am Raster ablesen.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 3:** Fertigen Sie eine Tabelle an, die folgende Spalten besitzt: Skizze der Signalform der Eingangsspannung, Periode, Frequenz,  $U_{SS}$ , Maximalspannung, Minimalspannung, Gleichspannungsanteil sowie für die exponentiell abfallende Spannung noch die Halbwertszeit. Tragen Sie für jede Signalform ihre Messwerte und die dazugehörigen Messfehler in die Tabelle ein und berechnen

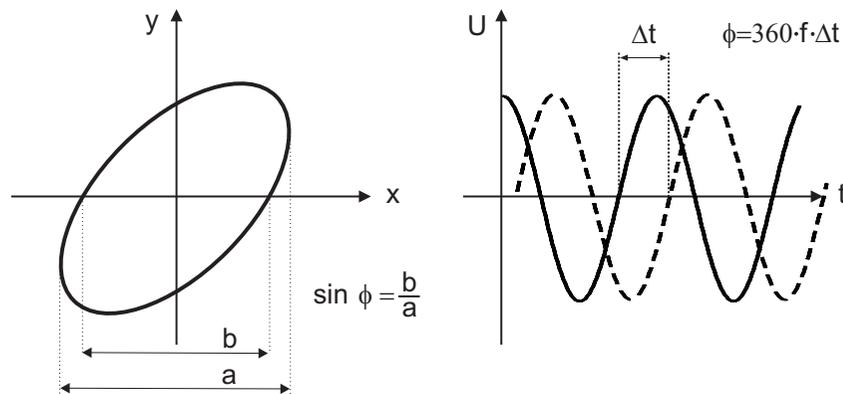


Abbildung 9: Messung der Phasenverschiebung im  $xy$ -Betrieb und  $yt$ -Modus. Im  $xy$ -Betrieb können Sie die Phase aus den Abständen  $a$  und  $b$  bestimmen. Im  $yt$ -Modus erfolgt die Phasenbestimmung beispielsweise durch Messung des Zeitabstands der Nulldurchgänge.

Sie die restlichen Größen.

**Zu Aufgabe 4:** Berechnen Sie die Phasenverschiebung unter Berücksichtigung der Messfehler für die Messung im  $xy$ -Betrieb und  $yt$ -Modus. Welche Messmethode ist genauer? Welche Vorteile besitzt die andere Messmethode?

## Versuch 31 Optische Abbildung

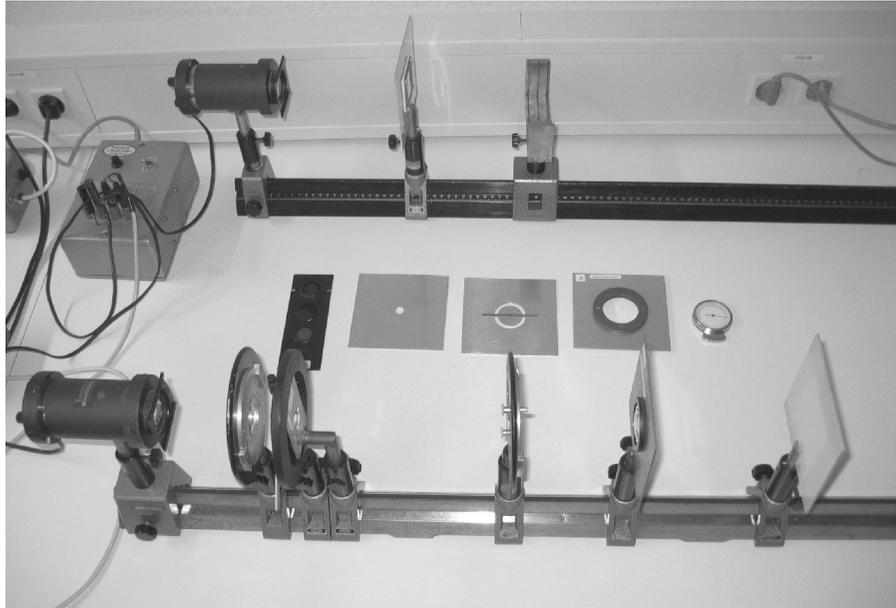


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Optische Abbildung.

### I Messaufbau

- Optische Schiene.
- Lampe mit Kondensator und verschiebbaren Farbfiltern.
- 2 bikonvex Linsen, 1 Achromat- Linse.
- Loch- und Ringblende.
- Fassung zur Aufnahme der Linsen und Blenden.
- Schirm.

- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter.
- verstellbarer Messspalt (Spaltbreite ist in mm geeicht).
- Zwischenbild mit mm-Einteilung.

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer,
- W. Demtröder *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, Springer- Verlag.
- *Homepage des Praktikums:*  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Abbildung durch Linsen, Linsenfehler (speziell sphärische und chromatische Aberration), Snelliussches Brechungsgesetz, Dispersion, graphische Konstruktion der optischen Abbildung, Mikroskop: Strahlengang und Auflösungsvermögen, Beugung am Spalt, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung.

*Verständnisfragen:*

1. Konstruieren Sie die Abbildung eines Objekts durch eine Sammellinse und eine Streulinse.
2. Was ist der Unterschied zwischen den Begriffen Abbildungsmaßstab und Vergrößerung?
3. Was ist die physikalische Ursache für die chromatische- und sphärische Aberration?
4. Wie funktioniert die Entspiegelung einer Linse?
5. Wie groß ist das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges? Wodurch wird es limitiert? Wie können kleinere Gegenstände betrachtet werden?

6. Aus welchen optischen Elementen besteht ein Mikroskop?
7. Was ist die Aufgabe des Objektivs, was die Aufgabe des Okulars? Was ist das Messprinzip des Mikroskops?
8. Wie ist die Auflösung definiert?
9. Welche Vergrößerung kann man mit einem professionellen Mikroskop erreichen?
10. Auf einem Mikroskopobjektiv sind folgende Werte abgedruckt: Vergrößerung=40, Tubuslänge=160, NA=0,65. Wie groß ist die Brennweite des Objektivs und wie hoch ist das Auflösungsvermögen wenn mit grünem Licht beleuchtet wird?
11. Qualitativ: Was ist ein Elektronenmikroskop und warum erreicht man damit eine so viel höhere Auflösung als mit einem optischen Mikroskop?

## IV Aufgabe

- Durch variieren der Bild- und Gegenstandsweite sollen die Eigenschaften der optischen Abbildung untersucht werden (Abbildungsmaßstab, virtuelles und reelles Bild, etc.)
- Es ist die Brennweite einer Sammellinse zu messen. Die chromatische Aberration ist experimentell zu untersuchen und der Einfluss der sphärischen Aberration ist qualitativ zu beobachten.
- Bauen Sie ein Mikroskop auf einer optischen Bank auf. Messen Sie a) die Gitterkonstanten der beiden Strichgitter, b) das Auflösungsvermögen des Objektivs in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Objektivs (quantitativ) und der Wellenlänge (qualitativ).

## V Grundlagen

### Reele und virtuelle Bilder

Bei einer optischen Abbildung werden die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel nach Durchgang durch ein optisches System (Linsen, Spiegel, Auge, „Lochkamera“) in einem Punkt, dem Bildpunkt, wieder vereinigt. Ein

einfaches Beispiel für ein abbildendes optisches System ist der Planspiegel (Abbildung 2). Die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel werden am Spiegel nach dem Reflexionsgesetz in den unteren Halbraum divergent reflektiert. Dadurch scheinen für einen Beobachter alle Lichtbündel aus einem Punkt hinter dem Spiegel zu kommen, obwohl die reflektierten Lichtbündel diesen Bildpunkt überhaupt nicht erreichen. Das Spiegelbild wird daher auch als virtuelles Bild bezeichnet. Allgemein entsteht ein virtuelles Bild im Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung divergenter Lichtbündel. Solche Bilder lassen sich nicht mit einem Schirm (Mattscheibe) auffangen.

Im Gegensatz zum Planspiegel erzeugt ein sphärischer Spiegel ein reelles Bild. Das Abbildungsprinzip beruht auch hier allein auf dem Reflexionsgesetz. Allerdings bedingt die Krümmung der Spiegelfläche, dass die Lichtbündel nicht divergieren sondern sich im Bildpunkt schneiden. Allgemein entsteht ein reelles Bild im Schnittpunkt von Lichtbündeln, die vom gleichen Objektpunkt ausgehen. Das reele Bild lässt sich mit einem Schirm auffangen.

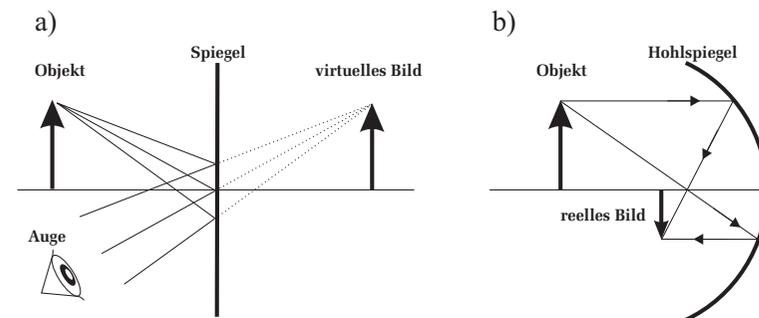


Abbildung 2: a) Virtuelles Bild eines Planspiegels. b) Reelles Bild eines Hohlspiegels.

### Brechung an sphärischen Flächen

Treffen **parallel** zur optischen Achse verlaufende Lichtbündel auf eine transparente, kugelförmige Fläche, die das Medium 2 begrenzt, so werden alle Lichtbündel in einem Punkt auf der optischen Achse gebrochen (Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser Teilbündel wird als Brennpunkt  $F$  bezeichnet. Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Kugelfläche entlang der optischen Achse, heißt Brennweite  $f$ . Mit Hilfe einfacher geometrischen Überlegungen und unter Berücksichtigung des Brechungsgesetz folgt für die

Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \frac{1}{r}, \tag{1}$$

wobei  $n_i$  die Brechungsindizes der beiden Medien darstellen und  $r$  der Radius der Kugelkrümmung ist. Diese Gleichung gilt allerdings nur für kleine Einfallswinkel bzw. nur für Lichtbündel, die in einem geringen Abstand  $h$  zur optischen Achse auf die Linse treffen. In der Literatur wird diese Näherung auch als paraxiale oder als Gaußsche Näherung bezeichnet. Bereits mit einer einzigen sphärischen

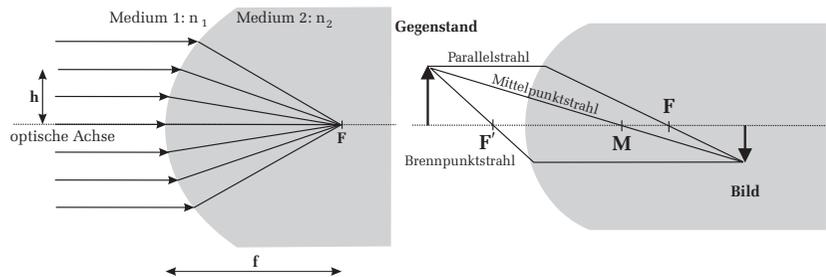


Abbildung 3: Links: Brechung von parallelen Lichtbündeln an einer sphärischen Fläche. Rechts: Abbildung eines Gegenstandes durch ein Kugelsegment.

Grenzfläche lässt sich ein Gegenstand abbilden (Abbildung 3 rechts). Um das Bild des Gegenstandes geometrisch zu konstruieren, bedarf es lediglich zweier Strahlenbündel<sup>1</sup>, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen. Besonders einfach ist die Bildkonstruktion, wenn man spezielle Lichtbündel einzeichnet, nämlich einen der gegenstandsseitig parallel zur optischen Achse verläuft und einen der durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugeloberfläche geht. Mittelpunktstrahlen fallen senkrecht auf die Kugeloberfläche und werden daher nicht gebrochen. Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie zu Brennpunktstrahlen werden (siehe Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entspricht dem abgebildeten Bildpunkt. Zur Konsistenzprüfung kann zusätzlich noch ein dritter Strahl eingezeichnet werden: Aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges folgt, dass ein Strahl, der im Medium 2 parallel zur optischen Achse läuft, im Medium 1 die optische Achse im gegenstandsseitigen Brennpunkt  $F'$  schneidet. Von der Gegenstandsseite aus gesehen bedeutet dies, dass ein Brennpunktstrahl zu einem bildseitigen Parallelstrahl wird.

<sup>1</sup>Der Begriff Strahlenbündel und Strahl wird in diesem Text synonym verwendet.

Zusammenfassend sind bei der geometrischen Abbildung eines Gegenstandspunktes, folgende drei Regeln zu beachten:

1. Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt
2. Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen
3. Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen

**Linsen**

Linsen, speziell sphärische Linsen, bestehen aus einem transparenten Material mit dem Brechungsindex  $n$  und sind durch eine kugelförmige Fläche begrenzt. Trifft ein Lichtbündel auf die Linse ist zu berücksichtigen, dass der Strahl insgesamt zweimal an den Grenzflächen mit den Radien  $r_1, r_2$  gebrochen wird. Für dünne Linsen, bei denen die Dicke klein gegenüber der Krümmungsradien ist, ergibt sich für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \tag{2}$$

Die Brennweite hängt also nur vom Brechungsindex und von den Radien der Grenzflächen ab. Je nach Vorzeichen und Kombination der Grenzflächen definiert man verschiedene Linsentypen. Eine Zusammenfassung kann Abbildung 4 entnommen werden. Bei der geometrischen Konstruktion der Abbildung

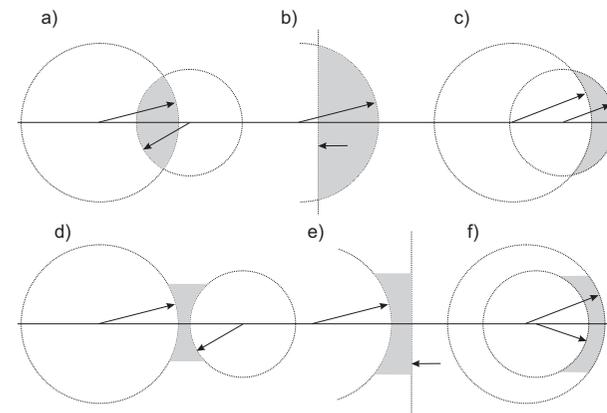


Abbildung 4: Klassifizierung von Linsen: a) bikonvex b) plankonvex c) positiver Meniskus d) bikonkav e) plankonkav f) negativer Meniskus.

durch eine dünne Linse, gelten die gleichen Merksätze wie bei der Brechung an einer einzelnen sphärischen Fläche: **Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt, gegenstandseitige Parallelstrahlen werden zu bildseitigen Brennpunktstrahlen und gegenstandseitige Brennpunktstrahlen werden zu bildseitigen Parallelstrahlen.** Die Brechung erfolgt dabei an der Mittelebene der Linse (Abbildung 5). Es soll nochmals betont werden, dass dies nur für dünne Linsen gilt. Im allgemeinen Fall hat eine Linse zwei sogenannte Hauptebenen, an denen die Brechungen erfolgen. Nur für dünne Linsen fallen diese Hauptebenen zusammen. Bei der optischen Abbildung mit einer Linse

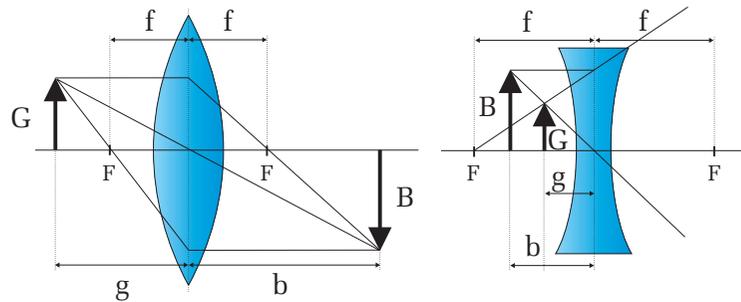


Abbildung 5: Optische Abbildung durch eine dünne bikonvex Linse und eine bikonkav Linse.

sind die Größen Bildweite  $b$ , Gegenstandsweite  $g$  und Brennweite  $f$  durch die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{3}$$

miteinander verknüpft. Bildweite und Gegenstandsweite stehen im direkten Zusammenhang mit der Gegenstandsgröße  $G$  und der Bildgröße  $B$ . Man definiert den Abbildungsmaßstab  $\beta$  durch:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \tag{4}$$

der sich mit Gleichung (3) schreiben lässt als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{b}{f} - 1. \tag{5}$$

### Messung der Brennweite einer Linse

Die Bestimmung der Brennweite einer Linse kann prinzipiell durch Messung der Gegenstands- und Bildweite unter Anwendung der Abbildungsgleichung (3) erfolgen. Allerdings ist diese Methode in der Regel mit größeren Fehlern behaftet, da die Abstände absolut gemessen werden. Dies setzt voraus, dass die Linse gut zentriert in die Fassung montiert sein muss. Für reale, „dicke“ Linsen kommt hinzu, dass sich die Abstände  $g$  und  $b$  nicht auf die Mittelebene sondern auf die Hauptebenen beziehen, deren genaue Lage im allgemeinen unbekannt ist. Diese

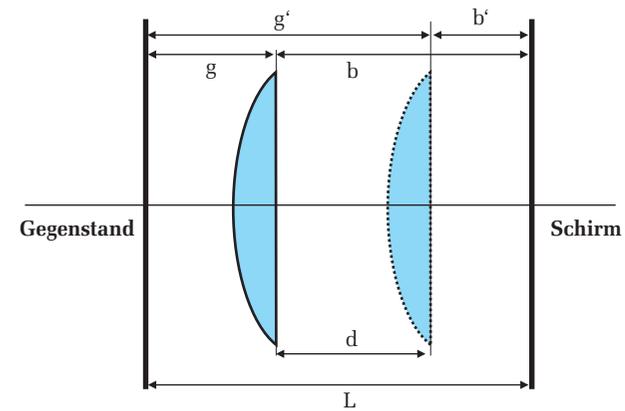


Abbildung 6: Prinzip des Bessel-Verfahrens zur Brennweitenbestimmung.

Nachteile treten bei der sogenannten *Bessel-Methode* nicht auf. Bei diesem Verfahren (Abbildung 6) wird ausgenutzt, dass es bei einem konstanten Abstand  $L > 4f$  zwischen Bild und Gegenstand zwei Linsenstellungen gibt, die zu einer scharfen Abbildung führen. Bei einer Stellung findet eine Vergrößerung, bei der anderen eine Verkleinerung statt. Ist  $d$  der Abstand zwischen diesen beiden Stellungen, der über eine Differenzmessung recht genau ermittelt werden kann, so gilt für die Brennweite:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{6}$$

Die Genauigkeit des Besselverfahrens reicht aus, um bestimmte Abbildungsfehler (Linsenfehler) zu untersuchen. Bei sphärischen Linsen gilt Gleichung (3) nur für achsennahe Strahlen. Lichtbündel, die auf weiter außen von der optischen Achse gelegenen Zonen der Linse treffen, werden nicht mehr in den gleichen

Punkt fokussiert und haben daher eine etwas andere Brennweite als das Linsenzentrum. Dieser Linsenfehler wird als sphärische Aberration bezeichnet. Es gibt mehrere Methoden die sphärische Aberration einer Linse zu minimieren. Am einfachsten gelingt dies durch Abblenden d.h. mit Hilfe einer Lochblende werden nur achsennahe Lichtbündel zur Abbildung zugelassen. Allerdings geht dies auf Kosten der Lichtstärke, die proportional zur Fläche der Linse ist. Je kleiner der Blendendurchmesser, desto schärfer ist zwar das Bild aber auch umso dunkler. Eine andere Methode ist die Verwendung von asphärischen Linsen. Solche Linsen sind so geschliffen, dass auch achsenferne Strahlen in den selben Punkt fokussiert werden wie achsennahe. Die Herstellung dieser Linsen ist allerdings sehr aufwendig, so dass diese vorwiegend nur in teuren Spezialoptiken eingesetzt werden.

Ein weiterer Linsenfehler ist die chromatische Aberration. Bei der Abbildung eines Gegenstandes der mit weißem Licht beleuchtet wird, treten im Bild Farbsäume auf. Diese beruhen auf der Dispersion des Linsenmaterials. Nach Gleichung (2) geht in die Brennweite der Brechungsindex  $n$  ein, der wiederum von der Wellenlänge abhängt. Im Fall der normalen Dispersion hat blaues Licht beispielsweise einen größeren Brechungsindex als rotes und wird daher stärker gebrochen. Somit ist die Brennweite für kurzwelliges Licht kleiner als für Licht mit einer größeren Wellenlänge.

Da achsenferne Lichtbündel am meisten zur Aberration beitragen, lässt sich der Farbfehler ebenfalls durch Abblenden reduzieren. Eine bessere Methode ist die Verwendung von sogenannten Achromaten. Dabei handelt es sich um Linsensysteme mit unterschiedlicher Dispersion und Brechkraft, die den Farbfehler für zwei Wellenlängen vollständig ausgleichen können.

### Vergrößerung des Seh winkels: Lupe und Mikroskop

Wenn Sie einen kleinen Gegenstand möglichst groß sehen möchten, so verringern Sie den Abstand zwischen Ihrem Auge und dem Gegenstand, indem Sie beispielsweise den Gegenstand näher an Ihr Auge heranführen. Dadurch wird das Bild auf der Netzhaut größer dargestellt und Sie können feinere Details erkennen. Aus dem linken Teilbild in Abbildung 7 ist zu erkennen, dass das Bild auf der Netzhaut um so größer ist je geringer der Abstand zum Gegenstand ist oder um so größer der Sehwinkel  $\alpha$  ist. Allerdings können Sie den Gegenstand nicht beliebig nah an das Auge heranführen, da die Ziliarmuskulatur des Auges den Krümmungsradius der Linse nur bedingt variieren kann (Akkommodation). Unterhalb einer bestimmten Entfernung kann der Gegenstand nicht mehr auf die Netzhaut fokussiert werden und der Gegenstand erscheint verschwommen.

Der kleinste Abstand auf dem ein gesundes Auge über einen längeren Zeitraum ermüdungsfrei akkomodieren kann, heißt deutliche Sehweite  $s_0$ . Der Wert von  $s_0$  ist auf 25 cm festgelegt. Überprüfen Sie doch mal die deutliche Sehweite bei Ihnen selbst, in dem Sie z.B. diese Anleitung an Ihr Auge heranführen und den Abstand messen, bei dem Sie auch über einen längeren Zeitraum den Text ohne Anstrengung lesen können. Sollen noch feinere Details eines Objekts erkannt

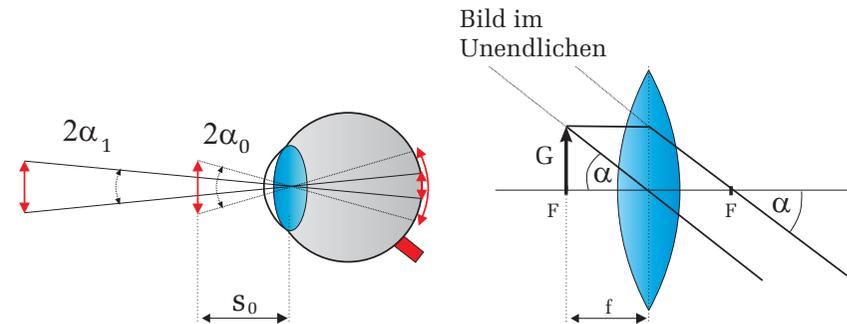


Abbildung 7: Links: Je größer der Sehwinkel  $\alpha$  desto größer ist das Bild auf der Netzhaut. Für Abstände kleiner als die deutliche Sehweite  $s_0 \doteq 25$  cm kann das Bild in der Regel nicht mehr scharf auf die Netzhaut abgebildet werden. Rechts: Wirkungsweise einer Lupe.

werden, so benötigt man optische Instrumente, die den Sehwinkel und damit die Bildgröße auf der Netzhaut vergrößern. Das einfachste Instrument ist die Lupe. Eine Lupe besteht lediglich aus einer einfachen bikonvex Linse mittlerer Brennweite. Ist bei der Abbildung die Gegenstandsweite kleiner oder gleich der Brennweite so erfolgt eine Vergrößerung des Seh winkels. In Abbildung 7 rechts liegt der Gegenstand z.B. genau in der Brennebene der Linse. In diesem Fall ist das Auge völlig entspannt und somit auf Unendlich akkomodiert. Für den Sehwinkel  $\alpha_L$ , wobei der Index L für Lupe steht, ergibt sich:

$$\tan \alpha_L = \frac{G}{f}. \quad (7)$$

Ohne Lupe, bei dem sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite  $s_0=25$  cm befindet, erhält man dagegen für den Sehwinkel  $\alpha_0$ :

$$\tan \alpha_0 = \frac{G}{s_0}. \quad (8)$$

Definiert man als Vergrößerung  $V$  das Verhältnis der Sehwinkel mit Lupe (bzw. allgemein mit einem zusätzlichen optischen Instrument) und ohne Lupe (allgemein ohne optisches Instrument) in der deutlichen Sehweite, so ergibt sich für die Vergrößerung  $V$ :

$$V_{Lupe} = \frac{\tan \alpha_L}{\tan \alpha_0} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (9)$$

**Wenn im Folgenden von Vergrößerung gesprochen wird, ist grundsätzlich die Vergrößerung des Sehwinkels gemeint!**

Typische Werte für die Brennweite einer Lupe liegen zwischen 25 mm und 50 mm. Werte unter 25 mm können nicht realisiert werden, da dann die Abbildungsfehler zu groß werden. Somit kann mit einer gewöhnlichen Lupe maximal eine 10-fache Vergrößerung erreicht werden.

Weitaus größere Vergrößerungen lassen sich mit einem Mikroskop erreichen. Ein Mikroskop besteht im wesentlichen aus zwei Linsen, dem Objektiv und dem Okular, die die Abbildung und Vergrößerung bewirken. Der Strahlengang ist in Abbildung 8 dargestellt. Der zu beobachtende Gegenstand  $G$  befindet sich in der Gegenstandsweite  $g$  etwas außerhalb der Brennweite des Objektivs. Mit dem Objektiv wird dieser Gegenstand in die Bildebene abgebildet. Es entsteht ein reelles, umgekehrtes Bild  $B$ , das im Folgenden als Zwischenbild bezeichnet wird. Mit dem Okular wird dieses Zwischenbild als Lupe betrachtet, d.h. das Zwischenbild befindet sich genau in der Brennweite der Okularlinse, so dass das Auge auf Unendlich akkomodiert.

Um die Vergrößerung des Mikroskops zu bestimmen, muss wieder der Sehwinkel mit und ohne Mikroskop bestimmt werden. Für den Sehwinkel mit Mikroskop ergibt sich aus Abbildung 8:

$$\tan \alpha_M = \frac{B}{f_2}, \quad (10)$$

wobei  $B$  die Bildgröße des Zwischenbilds und  $f_2$  die Okularbrennweite darstellt. Aus dem unteren Teilbild in Bild 8 kann zusätzlich abgelesen werden, dass sich  $G : f_1$  genauso verhält wie  $B : t$ :

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B}{t}. \quad (11)$$

Die Größe  $t$  wird als Tubuslänge bezeichnet und gibt den Abstand zwischen gegenstandsseitigen Objektivbrennpunkt und bildseitigen Okularbrennpunkt an.

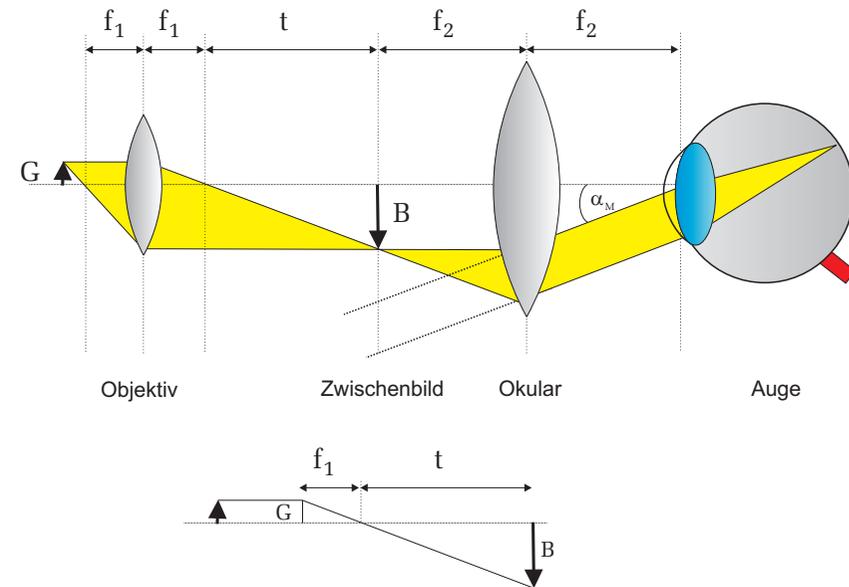


Abbildung 8: Strahlengang eines Mikroskops. Die untere Skizze dient zur Berechnung der Mikroskopvergrößerung.

Setzt man Gleichung (11) in (10) ein, so ergibt sich für den Sehwinkel:

$$\tan \alpha_M = \frac{Gt}{f_1 f_2} \quad (12)$$

und für die Vergrößerung

$$V_M = \frac{\tan \alpha_M}{\tan \alpha_0} = \frac{Gt}{f_1 f_2} / \frac{G}{s_0} = \frac{s_0}{f} = \frac{s_0 t}{f_1 f_2}. \quad (13)$$

Definiert man nun die Objektivvergrößerung durch

$$v_1 = \frac{t}{f_1} \quad (14)$$

und schreibt für die Okularvergrößerung nach Gleichung (9)

$$v_2 = \frac{s_0}{f_2}, \quad (15)$$

so ist die Gesamtvergrößerung das Produkt dieser beiden Einzelvergrößerungen:

$$V_M = v_1 v_2 = \frac{t}{f_1} \frac{s_o}{f_2}. \tag{16}$$

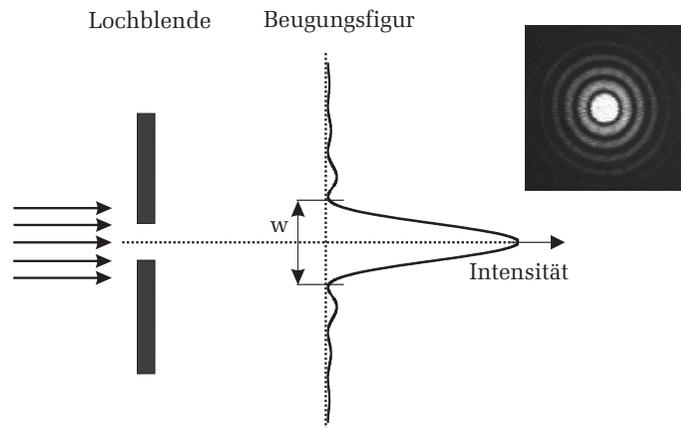


Abbildung 9: *Beugung an einem Spalt.* Auf einem hinter dem Spalt befindlichen Schirm wird nicht ein scharfer Lichtstreifen dargestellt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern eine Beugungsfigur mit einem sehr hellen Maximum, gefolgt von Nebenmaxima, dessen Intensität mit höherer Ordnung rasch abfällt. Das Bild rechts zeigt die Beugungsfigur einer Lochblende.

Offenbar könnte man meinen, dass die Gesamtvergrößerung beliebig erhöht werden kann, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Mikroskops sehr groß wählt. In der Realität ist aber die nutzbare Vergrößerung aufgrund der Wellennatur des Lichtes durch die Beugung begrenzt. Die Beugung ist eine spezielle Interferenzerscheinung von Wellen an geometrischen Hindernissen (Spalt, Lochblende etc.). Bei einem Mikroskop entspricht solch ein Hindernis beispielsweise dem endlichen Durchmesser des Objektivs, das als Lochblende wirkt.

Wird eine Lochblende mit parallelem Licht beleuchtet, so erkennt man auf einem dahinter stehenden Schirm nicht einen hellen Lichtpunkt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern ein Beugungsbild mit einer Intensitätsverteilung wie sie in Abbildung 9 zu sehen ist. Ihr Betreuer wird Ihnen

dies mit Hilfe eines Lasers und einer Spaltblende demonstrieren. Das Beugungsbild besitzt ein sehr helles zentrales Maximum, gefolgt von mehreren Minima und Nebenmaxima, dessen Intensitäten allerdings schnell abnehmen. Bei einem

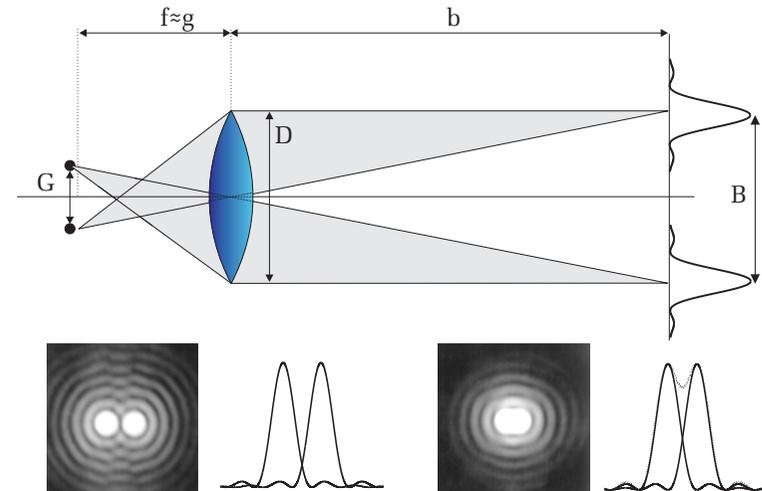


Abbildung 10: *Jeder Objektpunkt erzeugt im Zwischenbild eine Beugungsfigur.* Damit zwei Punkte noch getrennt zu erkennen sind, dürfen sich die Beugungsbilder nicht zu stark überlappen. Im unteren rechten Bild sind die beiden Punkte nicht mehr unterscheidbar.

Mikroskop erzeugt nun jeder Punkt des darzustellenden Gegenstands solch ein Beugungsbild im Zwischenbild (Abbildung 10). Die Breite  $w$  des zentralen Maximums beträgt:

$$w = 2,44 \frac{\lambda b}{D}. \tag{17}$$

Die Herleitung dieser Gleichung können Sie z.B. im Demtröder, *Experimentalphysik 2*, nachlesen.

Je kleiner der Abstand  $g$  zweier Objektpunkte, desto näher rücken auch die Beugungsbilder dieser Punkte im Zwischenbild zusammen. Ab einem gewissen Abstand  $b_{min}$  überschneiden sich die Beugungsbilder so stark, dass sie nicht mehr als zwei getrennte Objekte wahrnehmbar sind. Um dies zu quantifizieren, definiert man das Auflösungsvermögen nach dem Rayleigh-Kriterium: Zwei Objektpunkte sind nur dann voneinander unterscheidbar, wenn der Abstand der

beiden Beugungsfiguren größer ist als die halbe Breite des zentralen Maximums. bzw.: Die Auflösungsgrenze ist also dann erreicht, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das Beugungsminimum des anderen fällt. Der minimale Abstand der Beugungsfiguren ist dann nach Gleichung (17):

$$B_{min} = 1,22 \frac{\lambda b}{D}. \tag{18}$$

Mit Hilfe von (4) erhält man mit  $B_{min}/b = G_{min}/g$  den kleinsten Abstand  $G_{min}$

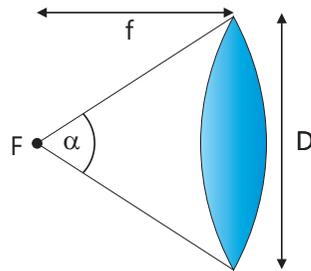


Abbildung 11: Numerische Apertur einer dünnen Linse.

zweier Objektpunkte, der mit dem Mikroskop noch aufgelöst werden kann:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda g}{D}. \tag{19}$$

Da die Objektpunkte praktisch in der Brennebene der Objektivlinse liegen ( $g \approx f$ ), können wir auch schreiben:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}. \tag{20}$$

Der Quotient  $D/f$  ist mit der sogenannten numerischen Apertur NA verknüpft (Abbildung 10). Diese ist definiert durch den Sinus des halben Öffnungswinkels der Objektivlinse multipliziert mit dem Brechungsindex  $n$  des Materials zwischen Objektiv und Präparat (Stichwort Immersionsöl):

$$NA = n \sin \alpha = n \sin \left[ \arctan \left( \frac{D}{2f} \right) \right] \approx n \frac{D}{2f}. \tag{21}$$

Somit folgt schließlich für das Auflösungsvermögen:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}, \tag{22}$$

$$G_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{NA}, \tag{23}$$



Abbildung 12: Kommerzielles Objektiv eines Lichtmikroskops. Die Objektivvergrößerung beträgt 40. Die Zahl 160 besagt, dass das Objektiv nur für Mikroskope mit einer Tubuslänge von 160 mm verwendet werden kann. Zusätzlich ist noch die numerische Apertur,  $NA=0,65$  und die zu verwendene Deckglasdicke von 0,17 mm angegeben.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie bei jedem Versuch den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Bestimmung der Linsenparameter der achromatisch korrigierten Linse

Bauen Sie auf der optischen Schiene einen Aufbau bestehend aus Lampe mit Kondensorlinse, Gegenstand, Linse und Bildschirm auf. Verwenden Sie dabei die achromatisch korrigierte Linse (Achromat). Als Gegenstand stehen zwei Dias mit einer Teststruktur zur Verfügung. Verändern Sie nun die Bild- oder Ge-

genstandsweite so, dass Sie ein scharfes Bild erkennen können. Notieren Sie die Bild- und Gegenstandsweiten und berechnen Sie sofort die Brennweite. Fertigen Sie folgende Tabelle an und messen Sie bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten, die Bildweite/Bildgröße, die Art des Bildes (reell oder virtuell) und die Ausrichtung. In den Bereichen  $\infty > g > 2f$  und  $2f > g > f$  sind jeweils drei verschiedenen Positionen auszumessen. Falls das Bild zu klein wird, verwenden Sie das Dia mit großen Doppelpfeil als Gegenstand. Andernfalls nehmen Sie das Dia mit der komplexen Teststruktur. Notieren Sie sich auch bei jeder Messung die Fehler.

	g	G	b	B	Art	Richtung
$\infty > g > 2f$					reel/virtuell	aufrecht/umgekehrt
$g = 2f$						
$2f > g > f$						
$g = f$						
$f > g$						

**Aufgabe 3: Messung der Brennweite der bikonvex Linse  $L_1$  nach dem Besselverfahren**

Stellen Sie auf der optischen Bank einen geeigneten Abstand Bild-Gegenstand ein (etwa  $L \approx 5f$  bis  $6f$ , ein grober Wert für  $f$  ist am Linsenhalter angegeben) und suchen Sie die beiden Scharfeinstellungen auf. Beachten Sie dabei, dass der weiße Schirm nicht in der Mitte der Halterung sitzt. Sie müssen daher die Dicke des Alu-Blechtes (2 mm) beim Abstand  $L$  berücksichtigen (Die Seite mit dem Gitter ist in der Mitte). Es werden 3 Messungen von  $d$  bei festem  $L$  durchgeführt und gemittelt.

**Aufgabe 4: Untersuchung der chromatischen Aberration**

Bei unverändertem Abstand  $L$  werden je 3 Messungen von  $d$  gemacht. Führen Sie diese Messung jeweils mit dem Rotfilter und b) mit dem Blaufilter durch. Beobachten Sie qualitativ die sphärische Aberration, indem Sie einmal die Lochblende und einmal die Ringblende vor die Linse stellen: Wie ändert sich  $d$ ? (Größeres  $d$  heißt kleineres  $f$ .)

**Aufgabe 5: Aufbau eines Mikroskops auf der optischen Bank**

Bauen Sie das Objekt (Dia mit Kreuzgitter) hinter die Lampe mit dem eingesetzten Grünfilter ein. Dicht dahinter wird der Spalt mit den Schneiden zum Objektiv und wieder dicht dahinter das Objektiv eingesetzt. Der Abstand Linsenebene bis zur Mitte des Reiters ist genau 3 cm. Der Schirm für das Zwischenbild

(Dia mit mm-Teilung) wird im Abstand von 25 cm vom Objektiv aufgestellt und dahinter im Abstand  $f_2$  das Okular. Zur Scharfeinstellung schauen Sie durch das Okular und verschieben Sie den Gegenstande bis Sie ein scharfes Bild sehen. Lampe und Kondensator werden so eingestellt, dass das Bild des Gitters in vernünftiger Helligkeit erscheint. Zu diesem Zweck kann der Lampensockel im Gehäuse verschoben werden.

a) Aus der Bildweite  $b$  und  $f_1$  lässt sich der Abbildungsmaßstab berechnen (Gleichung (5)). Bestimmen Sie aus der Größe des Zwischenbildes (z.B. Zahl der Striche pro 5 mm) bei weit geöffnetem Spalt und mit grünem Licht den Strichabstand des Gitters.

b) Verringern Sie nun die Öffnung des Messspalts und beobachten Sie dabei wie die senkrechten Strukturen des Kreuzgitters verschwinden. Messen Sie dreimal die Spaltbreite bei der die senkrechten Strukturen gerade nicht mehr auflösbar sind. Notieren Sie den Abstand des Spalts zum Objekt. Machen Sie sich klar, dass durch das Verengen des Spalts das Auflösungsvermögen nur in einer Dimension eingeschränkt wird! Beobachten Sie qualitativ den Einfluss der Wellenlänge auf das Auflösungsvermögen, in dem Sie das rote und das blaue Farbfilter benutzen.

**VII Auswertung**

**Zu Aufgabe 2:** Werten Sie Ihre Ergebnisse anhand folgender Tabelle aus ( $\beta$  bezeichnet den Abbildungsmaßstab.) Konstruieren Sie grafisch die Abbildung eines Objekts für die jeweiligen Gegenstandsweiten.

Nr.	g	b	Art	Richtung	$\beta$
I	$\infty > g > 2f$	z.B. $2f = b > f$	reel/ virtuell	aufrecht/ umgekehrt	z.B. > 1
II	$g = 2f$				
III	$2f > g > f$				
IV	$g = f$				
V	$f > g$				

Zeichnen Sie Ihre gemessenen Werte für die Bild- und Gegenstandsweite in ein Diagramm ein. Tragen Sie dazu immer ein Wertepaar  $b, g$  so auf, dass die Gegenstandsweite auf der Abszisse und die Bildweite auf der Ordinate liegt und verbinden Sie die beiden Punkte durch eine Gerade (Abbildung 13). Alle Linien

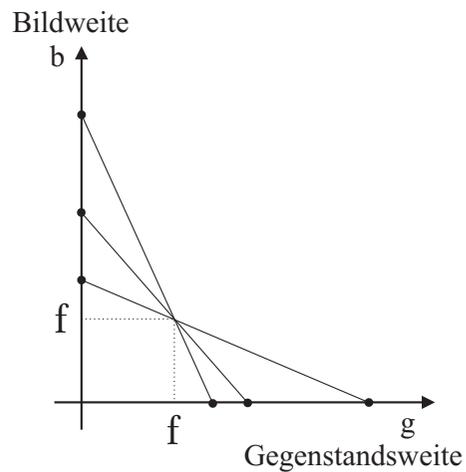


Abbildung 13: *Grafische Bestimmung der Brennweite.*

schneiden sich in einem Punkt, aus dem die Brennweite abgelesen werden kann. Schätzen Sie den Fehler ab.

**Zu Aufgabe 3:** Berechnen Sie die Brennweite nach dem Besselverfahren.

**Zu Aufgabe 4:** Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse bezüglich der untersuchten Linsenfehler.

**Zu Aufgabe 5:** Berechnen Sie die Gitterkonstante des Kreuzgitters und bestimmen Sie das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Berechnen Sie aus der Breite des Spalts und seinem Abstand vom Objekt den Öffnungswinkel des Systems und damit das Auflösungsvermögen; für  $\lambda$  wird der Wert 550 nm eingesetzt. Der erhaltene Wert wird mit der zuvor bestimmten Gitterkonstante verglichen.

## Versuch 34 Spektralphotometrie

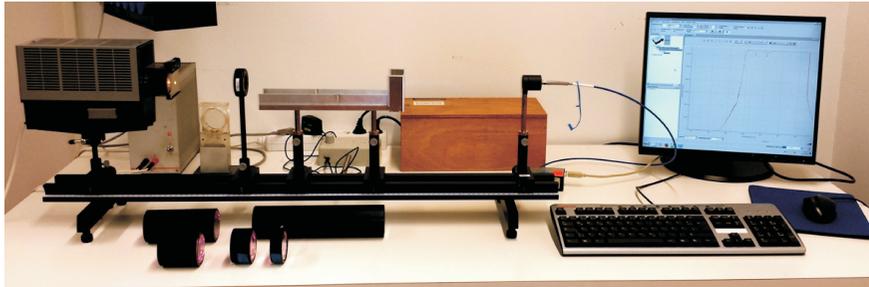


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Spektralfotometrische Messanordnung bestehend aus: Lichtquelle, Lochblende, Linse, Küvettenbank und Fasereinkoppler.
- Gitterspektrometer, Ocean Optics USB4000
- Computer mit Drucker.
- Je Versuchsaufbau:
  - 1 Satz (5 Stück) Küvetten mit 0,00005-molaren Kaliumpermanganatlösung ( $\text{KMnO}_4$ ), Schichtdicken:  $l_1=1,5$  cm,  $l_2=3$  cm,  $l_3=6$  cm,  $l_4=12$  cm,  $l_5=24$  cm.
  - Für alle Aufbauten gemeinsam: Eine 25 ml-Bürette mit 1/20 ml-Teilung und 2 l Vorratsgefäß (VE-Wasser), eine 25 ml-Bürette mit 1/10 ml-Teilung und 2 l Vorratsgefäß (0,001-molare wässrige  $\text{KMnO}_4$ -Lösung)
- Eine offene Küvette (rechteckig),  $l=1,5$  cm
- Zur Auswertung einfachlogarithmisches Papier mit 3 Dekaden.

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Aufbau eines Gitterspektrometers, Absorption (Extinktion) von Strahlung, Lambert-Beersches Gesetz, Absorptionsspektren (Absorption in Lösungen), Fotometrie, Spektralfotometrie. Beantworten Sie bei Ihrer Vorbereitung folgende Fragen zum Versuch:

1. Nach welchem Prinzip funktioniert ein Gitterspektrometer? Wie hoch ist die spektrale Auflösung?
2. Was passiert bei der Absorption von Licht durch die  $\text{KMnO}_4$ -Moleküle der verwendeten Probelösung?
3. Wie hängt die Absorption von Länge und Konzentration der durchstrahlten Lösung ab? Wie kommt man zu den entsprechenden Formeln?

### IV Aufgabe

- Aufnahme des Absorptionsspektrum einer  $\text{KMnO}_4$ -Lösung.
- Durch Messung der Absorption von Licht der Wellenlänge  $\lambda=525$  nm als Funktion der Schichtdicke bzw. der Konzentration einer  $\text{KMnO}_4$ -Lösungen wird der molare Extinktionskoeffizient  $\epsilon$  für  $\lambda=525$  nm ermittelt.

## V Grundlagen

### V.1 Fotometrie

Als Fotometrie bezeichnet man die Konzentrationsbestimmung einer Substanz durch Absorption (bzw. durch Streuung oder Fluoreszenz). Das Prinzip beruht auf der Messung der Abschwächung der Intensität eines einfallenden Lichtbündels durch die in der Messzelle enthaltene Substanz.

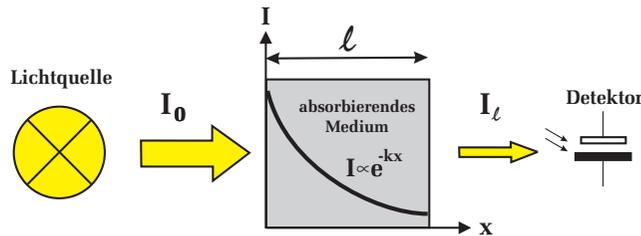


Abbildung 2: Veranschaulichung des Lambert'schen Absorptionsgesetzes.

Das Absorptionsgesetz für Licht lautet in der differentiellen Schreibweise:

$$\frac{dI}{I} = -kdl. \tag{1}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die relative Intensitätsabnahme  $dI/I$  bei kleinen Wegstrecken der Dicke  $dl$  proportional ist. Durch Integration von Gleichung (1) erhält man die Intensität  $I$  des Lichts nach Durchlaufen der Strecke  $l$  im absorbierenden Medium (Lambert'sches Absorptionsgesetz):

$$I = I_0 e^{-kl}. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet  $I_0$  die in das Medium eindringende Intensität,  $l$  die Länge des Lichtweges im absorbierenden Medium und  $k$  die Absorptionskonstante (bzw. „Extinktionskonstante“, die beiden Bezeichnungen werden in der Literatur nebeneinander verwendet und sind identisch).

Zur Auswertung von Messungen empfiehlt sich die logarithmische Schreibweise:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -kl \quad \text{bzw.} \quad \ln I = -kl + \text{const} \quad \text{mit} \quad \text{const} = \ln I_0. \tag{3}$$

Trägt man  $I$  gegen  $l$  auf halblogarithmischem Papier auf, so ergibt sich eine Gerade. In der Praxis verwendet man dekadische Logarithmen. Gleichung (3) hat dann die Gestalt

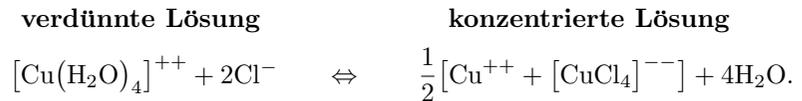
$$\log I = -k'l + \text{const}' \quad \text{mit} \quad k' = \log e \cdot k = 0,434 \cdot k. \tag{4}$$

$k'$  heißt „dekadischer oder Bunsenscher Absorptionskoeffizient“.

Für verdünnte Lösungen gilt im allgemeinen, dass die Absorptionskonstante  $k'$  der Konzentration  $c$  proportional ist (Beersches Gesetz):

$$k' = \epsilon c. \tag{5}$$

Man nennt  $\epsilon$  den molaren Extinktionskoeffizienten oder kurz Molarextinktion, wobei  $c$  in mol/l oder mol/cm<sup>3</sup> anzugeben ist. Nach dem Beerschen Gesetz ist  $\epsilon$  von der Konzentration  $c$  der Lösung unabhängig, d.h.  $\epsilon$  ist eine Stoffkonstante. Bei hohen Konzentrationen können Abweichungen vom Beerschen Gesetz auftreten. Ein Beispiel bietet die CuCl<sub>2</sub>-Lösung, bei der beim Übergang von verdünnter zu konzentrierter Lösung eine Gleichgewichtsverschiebung bei der Komplexbildung auftritt, gemäß



Eine Erhöhung der Konzentration bedeutet also in diesem Fall nicht einfach eine Vergrößerung der Zahl der an der Absorption beteiligten Ionen (wie im Gültigkeitsbereich des Beerschen Gesetzes), sondern Neubildung von Ionen anderer Art, die i.a. auch ein anderes Absorptionsverhalten zeigen.

Die Konzentrationsabhängigkeit der Absorption bietet auch eine einfache Möglichkeit, den zeitlichen Verlauf von chemischen Reaktionen (Auftauchen bzw. Verschwinden von Ionen) zu verfolgen.

$k'$  bzw.  $\epsilon$  hängen von der Wellenlänge ab. Die Funktionen  $k'(\lambda)$  bzw.  $\epsilon(\lambda)$  beschreiben das Absorptionsspektrum der Lösung. Unter einem Spektrum versteht man ein Diagramm, in dem die Intensität eines Strahlers bzw. eine ihr proportionale Größe (hier der Fotostrom) über der Wellenlänge aufgetragen ist. Die Stellen maximaler Absorption sind die Schwerpunkte von sog. Absorptionsbanden, die für jedes Ion charakteristisch sind und zu dessen Nachweis dienen können. Zusammenfassend lässt sich mit den eingeführten Größen das Absorptionsgesetz folgendermaßen schreiben:

$$I = I_0 10^{-k'l} = I_0 10^{-\epsilon cl} \tag{6}$$

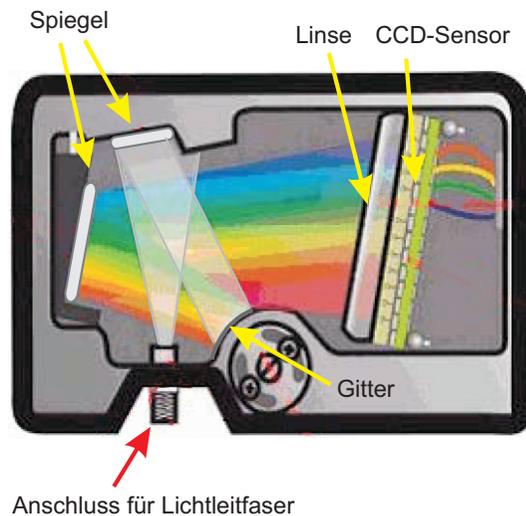


Abbildung 3: Strahlengang im Gitterspektrometer.

Es gibt zwei Methoden  $k'$  und  $\epsilon$  zu messen:

1. Man misst die Intensität des austretenden Lichts als Funktion der Länge der durchstrahlten Flüssigkeit bei konstant gehaltener Konzentration. Auftragung von  $\log I$  gegen  $l$  ergibt  $k'$ . Bei bekannter Konzentration errechnet sich daraus  $\epsilon$ .
2. Man hält die Schichtdicke  $l$  konstant und variiert die Konzentration  $c$  in definierter Weise. Auftragen von  $\log I$  gegen  $c$  ergibt zunächst das Produkt  $\epsilon l$  und damit bei bekanntem  $l$  wieder  $\epsilon$ .

## V.2 Bedienung des Spektrometers und der Software

Im Versuch wird ein computergesteuertes Gitterspektrometer (Abbildung 3) eingesetzt, das es erlaubt, den Spektralbereich einer Lichtquelle von 180 nm bis 950 nm zu registrieren. Die zu untersuchende Lichtquelle wird über eine Lichtleitfaser in das Spektrometer eingekoppelt und über ein optisches Gitter auf eine CCD-Zeile mit 3648 Pixel abgebildet. Dabei entspricht ein Pixel einem Wellenlängenintervall von 0,21 nm. Die Auflösung des Spektrometers beträgt

etwa 1 nm. Das verfügbare Datenerfassungsprogramm *OceanView* erlaubt es den Dunkelstrom zu messen und bei der Datenaufnahme automatisch abzuziehen. Zur Reduzierung von Fluktuationen kann automatisch über viele Scans gemittelt werden.

Starten Sie das Programm *OceanView* vom Desktop aus. Dabei sollte die Datenaufnahme des Spektrometers automatisch gestartet werden. In diesem Modus wird das Spektrum mit der angegebenen Integrationszeit kontinuierlich gemessen und dargestellt. Sie sehen dann ein Fenster gemäß Abbildung 4. Falls das Spektrometer vom Programm nicht erkannt wird, dann überprüfen Sie ob der USB-Stecker des Spektrometers angeschlossen ist. Klicken Sie anschließend auf das Icon *Device Manager* oder drücken Sie die Taste F5. Im erscheinenden Dialogfenster können Sie dann das Spektrometer durch Drücken der Taste *Rescan* neu initialisieren.

In diesem Modus werden kontinuierlich Spektren aufgenommen und grafisch dargestellt. Schalten Sie eine Lichtquelle ein und richten Sie den Fasereinkoppler auf die Lichtquelle aus. Das Maximum des angezeigten Spektrums sollte bis mindestens 2/3 des Skalenbereichs gehen. Die Anpassung der gewünschten Intensität erfolgt über die gewählte Integrationszeit. Reduzieren Sie die Integrationszeit, wenn die Intensität zu hoch ist, d.h. das Spektrum gesättigt ist, vergrößern Sie die Integrationszeit wenn sie zu klein ist. Die Integrationszeit können Sie am linken Rand im Reiter *Aquisition Group Window* einstellen. Sie können das Rauschen des Spektrums verringern, indem Sie über mehrere Einzelmessungen mitteln. Dazu im Feld *Scans to Average* die Zahl der Einzelmessungen eintragen.

### Dunkelmessung

Das Spektrometer liefert auch dann ein von Null verschiedenes Signal, wenn die Lichtquelle nicht eingeschaltet ist. Daher muss der Dunkelstrom für quantitative Messungen vom Spektrum abgezogen werden.

Stellen Sie zunächst die gewünschte Integrationszeit und die Anzahl der Messungen zur Mittelwertbildung ein. Schalten Sie anschließend die Lichtquelle aus und klicken Sie auf das Symbol der Dunkelmessung . Die korrigierte Messung wird in einem neuen Fenster mit der Bezeichnung *View Minus Bkgnd* angezeigt. Wenn Sie nun die Lichtquelle wieder einschalten sehen Sie in diesem Fenster das auf die Dunkelmessung korrigierte Spektrum.

Falls Sie die Integrationszeit oder die Zahl der Scans zur Mittelung ändern, müssen Sie eine neue Dunkelmessung durchführen.

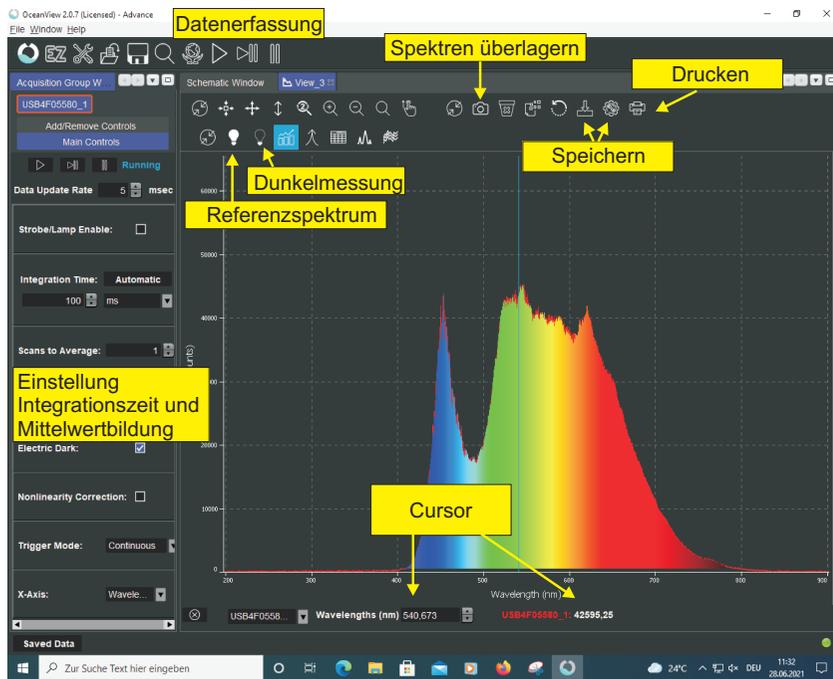


Abbildung 4: Oberfläche des Datenerfassungsprogramms.

## VI Durchführung

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Absorptionsbanden von $\text{KMnO}_4$

Starten Sie die Software. Schalten Sie die Lichtquelle ein. Der Fasereinkoppler muss symmetrisch ausgeleuchtet sein. Falls dies nicht der Fall ist können Sie die Lichtquelle und die Lochblende nachjustieren. Zum Einstellen dieser Messung können Sie einen Assistenten verwenden. Klicken Sie auf das Icon . Wählen Sie den Assistenten *Absorbance* und anschließend *Absorbance only* → *Next*. Variieren Sie die Integrationszeit so dass das Spektrum nicht in Sättigung ist (Spektrum darf oben nicht abgeschnitten sein). Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein und klicken Sie auf *Next*. Nehmen Sie eine Referenzmessung des Spektrums auf

indem Sie auf das Glühbirnen Symbol links oben klicken. Drücken Sie die Taste *Next*. Schalten Sie die Lichtquelle aus und machen Sie eine Dunkelmessung. Klicken Sie dazu auf die Glühbirne links oben im Dialogfeld und anschließend auf *Finish*. Die Messung wird nun in einem neuen Fenster mit dem Namen *AbsorbanceView* angezeigt. In diesem Modus wird das aktuelle Spektrum durch das Referenzspektrum dividiert und der Dunkelstrom abgezogen. Sie sehen nun die Absorption als Funktion der Wellenlänge. Auf der Ordinate ist die optische Dichte aufgetragen:

$$OD = -\log_{10} \left( \frac{I}{I_R} \right), \quad (7)$$

wobei  $I$  das aktuell gemessene Spektrum und  $I_R$  das zuvor bestimmte Referenzspektrum darstellen. Platzieren Sie die 12 cm lange Küvette in den Strahlengang und nehmen Sie das Absorptionsspektrum auf. Zoomen Sie in den Bereich zwischen 430 nm bis 660 nm und bestimmen Sie mit der Cursorfunktion die Lagen der Permanganatbanden in nm. Um den Cursor zu aktivieren klicken Sie mit der Maus in das Diagramm. Die Lage des Cursors können Sie dann im Eingabefeld unter dem Diagramm variieren. Drucken Sie das Diagramm aus und beschriften Sie die Absorptionsbanden mit den zuvor gemessenen Wellenlängen.

### Aufgabe 3: Absorption einer $\text{KMnO}_4$ - Lösung als Funktion der Schichtdicke: Lambertsches Absorptionsgesetz

Platzieren Sie die kürzeste Küvette ganz rechts auf den Küvettenhalter. Klicken Sie im Fenster *View* in das Diagramm und stellen Sie den Cursor auf 525 nm ein. Die Intensität an der Cursorposition wird rechts neben dem Eingabefeld der Wellenlänge angezeigt. Stellen Sie die Integrationszeit so ein, dass das Spektrum an der Cursorposition gerade noch nicht in Sättigung ist, d.h. die Intensität sollte etwa bei 63500 liegen. Um die Intensität leicht zu erhöhen oder abzusenken, können Sie zusätzlich die drei Justageschrauben am Lampengehäuse verwenden. Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein. Schalten Sie die Lichtquelle aus und machen Sie eine Dunkelmessung. Klicken Sie dazu auf das Symbol . Anschließend die Lichtquelle wieder einschalten und die Aufnahme im Fenster *View Minus Bkgnd* starten. Messen Sie für alle Küvetten 5-mal die Intensität die unterhalb des Diagramms angezeigt wird. Verwenden Sie dazu den Aufnahmemodus . In diesem Modus stoppt die Aufnahme nach einer Messung und die Intensität wird dauerhaft angezeigt. Drücken Sie erneut die Taste um die nächste Messung zu starten. Achten Sie darauf, dass die Küvetten immer rechts am Anschlag des Küvettenhalters platziert werden. Berechnen Sie

die Mittelwerte und deren Fehler und tragen Sie diese sofort auf halblogarithmischem Papier gegen die Küvettenlänge ein.

Hinweis: Die Küvetten haben Einfluss auf den Strahlengang. Die Küvette bewirkt, dass sich der Durchmesser der Lochblende, die auf den Lichtleiter abgebildet wird verkleinert. Damit erhöht sich die Intensität. Insbesondere bei der längsten Küvette führt dies zu einem signifikanten Fehler. Messen Sie daher bei der längsten Küvette den Durchmesser der abgebildeten Lochblende an der Position des Fasereinkopplers einmal mit Küvette ( $D_{mK}$ ) und einmal ohne Küvette ( $D_{oK}$ ). Korrigieren Sie dann den Messwert  $I$  bei der längsten Küvette gemäß:

$$I_{korr.} = I \frac{D_{mK}^2}{D_{oK}^2}. \quad (8)$$

Zum Ausmessen können Sie das Stahllineal oder die Schieblehre verwenden.

#### Aufgabe 4: Absorption einer $\text{KMnO}_4$ - Lösung als Funktion der Konzentration: Beersches Gesetz

Bei konstanter Schichtdicke  $l$  wird die Konzentration  $c$  schrittweise erhöht. Als erstes wird eine sogenannte Nullmessung mit reinem VE-Wasser<sup>1</sup> gemacht. Geht man von einem abgemessenen Volumen  $V_0$  reinen Wassers aus und gibt nach und nach die Volumina  $V_1, V_2, \dots$  einer  $\text{KMnO}_4$ -Lösung bekannter Konzentration  $\tilde{c}$  zu (in der Bürette beträgt die Konzentration  $\tilde{c}=10^{-3}\text{ mol/l}$ ), so erhält man die Konzentrationen

$$c_0 = \tilde{c} \frac{0}{V_0} = 0, \quad c_1 = \tilde{c} \frac{V_1}{V_0 + V_1}, \quad c_2 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2}{V_0 + V_1 + V_2},$$

$$c_3 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3}, \quad c_4 = \tilde{c} \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4}.$$

Aus den oben angegebenen Gleichungen ergibt sich für  $V_0=21\text{ ml}$ ,  $V_1=1,4\text{ ml}$ ,  $V_2=1,6\text{ ml}$ ,  $V_3=4,0\text{ ml}$  und  $V_4=14,0\text{ ml}$  ( $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V_0$ ) die gewünschte 1:2-Abstufung, nämlich

$$\left( \frac{10^{-3}}{16} : \frac{10^{-3}}{8} : \frac{10^{-3}}{4} : \frac{10^{-3}}{2} \right) \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

<sup>1</sup>VE-Wasser: Voll Entsalzenes Wasser.

Füllen Sie die rechteckige Küvette mit 21 ml VE- Wasser und stecken Sie diese in den rechten Küvettenhalter. Variieren Sie die Integrationszeit so, dass das Spektrum im Fenster *View* bei 525 nm gerade noch nicht in Sättigung ist. Tragen Sie bei *Scans to Average* 50 ein. Führen Sie wieder eine Dunkelmessung durch. Die Messung führen Sie dann in dem neu angelegten Fenster *View Minus Bkgnd* durch. Messen Sie für die Konzentration  $V_0$  bis  $V_4$  jeweils 5- mal die Intensität. Berechnen Sie wieder die Mittelwerte und deren Fehler und tragen Sie diese in das zuvor angefertigte Diagramm mit ein. Wählen Sie hierfür eine zusätzliche Abszisse.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 3 und 4:** Die gemessenen Intensitäten werden sofort in ein gemeinsames halblogarithmisches Diagramm mit zwei (linearen) Abszissenskalen für  $l$  und für  $c$  eingezeichnet. Zu Hause berechnen Sie aus der Steigung der „Lambert-Geraden“ (mit  $c = 5 \times 10^{-5}\text{ mol/l}$ ) den dekadischen Absorptionskoeffizienten  $k'$  und hieraus dann die Molarextinktion  $\epsilon$  gemäß  $\epsilon = k'/c$ . (Berücksichtigen Sie dazu, dass eine Intensitätsabnahme um den Faktor 10 gerade eine Änderung des dekadischen Logarithmus um 1.0 bedeutet: die hierzu erforderliche Absorptionslänge  $l'$  entnehmen Sie der Zeichnung.  $k'$  ist dann gegeben durch  $k' = 1/l$ ). Schätzen Sie die Fehler ab. Analog verfahren Sie bei der „Beer-Geraden“. Geben Sie die Molarextinktion sowohl in liter/(mol cm) als auch in  $\text{cm}^2/\text{mol}$  an. Wie gut stimmen die Werte aus der Lambert- und aus der Beer-Geraden überein?

## Versuch 223 Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Messprogramm, Jupyternotebook und Excel
- Thermometer

- Objektmikrometer

### II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Demtröder, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Die Grundlagen zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Sie in der Versuchsbeschreibung des Versuchs 251: *Statistik des radioaktiven Zerfalls* nachlesen.
- Homepage des Praktikums <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>
- Pythonnotebooks für das Anfängerpraktikum <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomial- und Gauß-Verteilung.

Verständnisfragen:

- Was ist Wärme aus Sicht der kinetischen Theorie der Wärme? Was besagt der Gleichverteilungssatz? Wie hoch ist die thermische Geschwindigkeit eines Partikels der Masse  $10^{-15}$  kg bei Zimmertemperatur?
- Berechnen Sie das Produkt  $kT$  für Zimmertemperatur und geben Sie diesen in der Einheit  $eV$  an. Diesen Wert sollten Sie sich für die Zukunft unbedingt merken.
- Was bezeichnet man als Brownsche Bewegung? Worin liegt die Ursache dieser Bewegung? Welche Größen haben Einfluss auf die Brownsche Bewegung?
- Wie groß ist der zu erwartende Wert der mittleren Verschiebung bzw. der mittleren quadratischen Verschiebung eines Partikels.

- Berechnen Sie die mittlere quadratische Verschiebung eines Partikels (Partikelradius  $a=500$  nm) suspendiert in Wasser ( $T=20^\circ\text{C}$ ) innerhalb eines Zeitraums von  $t=1$  s. Die Viskosität von Wasser können Sie Abbildung 21 entnehmen.
- Wozu wird das Immersionsöl benötigt?

## IV Aufgaben

1. Präparieren Sie eine Mikroskopprobe einer Partikelsuspension.
2. Nehmen Sie jede Sekunde und mindestens 150 Mal das Mikroskopbild eines einzelnen Partikels auf.
3. Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops mit einem Objektmikrometer.
4. Vermessen Sie die Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder.
5. Berechnen Sie aus der mittleren quadratischen Verschiebung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante.

## V Motivation

### Mit Blütenpollen läßt sich die Existenz von Atomen und Molekülen beweisen

„Heute vor 100 Jahren, am 11. Mai 1905, reichte Albert Einstein bei den „Annalen der Physik“ eine wichtige Arbeit ein, in der er die sogenannte Brownsche Bewegung erklärte. Dem schottischen Botaniker Robert Brown war bereits im Jahr 1827 aufgefallen, daß Blütenpollen in einem Glas Wasser eine eigenartige Zickzackbewegung ausführen. Was war die Ursache dafür? Alle Versuche, diese Brownsche Bewegung zu erklären, scheiterten zunächst. Sie blieb jahrzehntelang geheimnisvoll. Erst Albert Einstein erkannte, daß die Bewegung der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit durch ein fortwährendes Stoßen der Wassermoleküle verursacht wird. Dies war in jener Zeit tatsächlich noch ein gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist. Und gleichzeitig paßte Einsteins Beschreibung zur molekularen Theorie der Wärme. Je wärmer beispielsweise Wasser ist, um

so größer ist die mittlere Geschwindigkeit, mit der die Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stöße verursachen können. So erklärt sich auch der Begriff Thermodynamik: Wärme ist eben etwas Dynamisches. Einstein schrieb damals an einen Freund, daß „unter der Voraussetzung der molekularen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von der Größenordnung  $1/1000$  Millimeter bereits eine wahrnehmbare ungeordnete Bewegung ausführen müssen, welche durch die Wärmebewegung erzeugt ist.“

Nahezu zeitgleich mit Albert Einstein lieferte auch der polnische Physiker Marian Smoluchowski eine korrekte Erklärung der Brownschen Bewegung. Es war dann allerdings der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin der einige Jahre später die Brownsche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigte. Dafür wurde Perrin im Jahr 1926 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. <sup>1</sup>

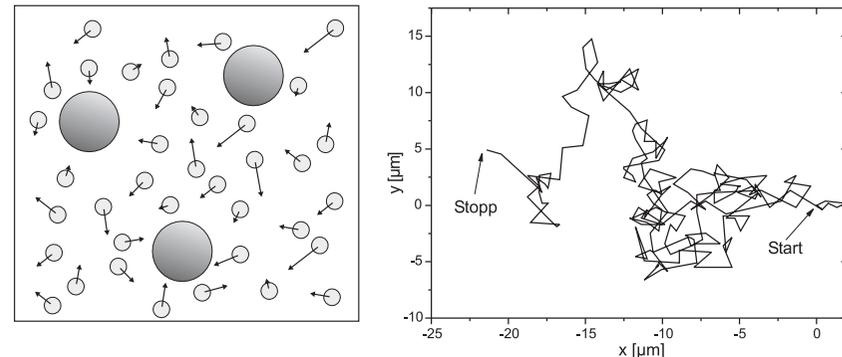


Abbildung 2: Links: Modell der Brownschen Bewegung. Die Moleküle des umgebenden Mediums stoßen aufgrund ihrer thermischen Energie mit den suspendierten Partikeln, wodurch sich diese auf völlig unregelmäßigen Bahnen bewegen. Rechts: Gemessene Bahn eines einzelnen Partikels.

In diesem Versuch werden Sie die Brownsche Bewegung von Partikeln suspendiert in Wasser mit einem Mikroskop beobachten und deren statistische Bewegung untersuchen (Abbildung 2). Durch Vermessen der Teilchenbahn und der Berechnung der pro Zeiteinheit auftretenden mittleren Verschiebung, können Sie die Boltzmannkonstante bestimmen.

<sup>1</sup>Norbert Lossau, Artikel vom 11. Mai 2005 in der Zeitung „Die Welt“

Eine genaue Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung ist nur bei der Beobachtung sehr vieler Einzelschritte möglich und daher im Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich. Bei einer sorgfältigen Durchführung ist aber eine Genauigkeit von besser als 10 % möglich.

## VI Grundlagen

### VI.1 Brownsche Bewegung

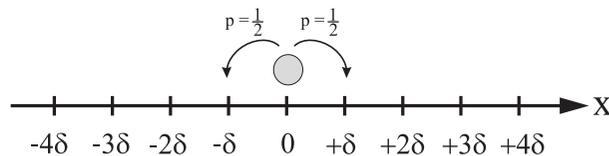


Abbildung 3: *Eindimensionaler Random-Walk. Bei jedem Stoß bewegt sich das Partikel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts. Die Sprungweite  $\delta$  soll bei allen Stößen gleich groß sein*

Die Brownsche Bewegung lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Random-Walk Modell quantitativ beschreiben (Abbildung 3). Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, dass sich ein Partikel nur in einer Dimension, der  $x$ -Richtung, bewegen kann. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das Partikel an der Position  $x = 0$ . Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, das Partikel nach der Zeit  $t$  im Intervall  $[x, x + \Delta x]$  zu finden. Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Das Partikel erfährt alle  $\tau$ -Sekunden einen Stoß. Innerhalb der Zeit  $t$  treten somit  $n = t/\tau$  Stoßprozesse auf.
- Bei jedem Stoß wird das Partikel um die gleiche Distanz  $\delta$  verschoben. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Partikel dabei um  $+\delta$  nach rechts, bzw. um  $-\delta$  nach links bewegt, sind gleich groß.
- Bei mehreren Partikeln hängt die Brownsche Bewegung eines einzelnen Partikels nicht von der Bewegung der anderen Partikel ab. Jedes Partikel bewegt sich völlig unabhängig von den anderen, auch dann, wenn sich zwei oder mehrere Partikel sehr nahe kommen.

Damit sich das Partikel nach  $n$ -Stößen an der Position  $x = m\delta$  befindet, muss es insgesamt  $(n+m)/2$ -mal in die positive  $x$ -Richtung gelaufen sein und  $(n-m)/2$ -mal in die negative Richtung. Dabei ist zu beachten, dass  $m$  bei geradem  $n$  ebenfalls gerade sein muss und entsprechend bei ungeradem  $n$ , ungerade sein muss.

Beispiel: Befindet sich das Partikel nach  $n = 10$  Stößen an der Position  $6\delta$  (d.h.  $m = 6$ ), so ist es insgesamt  $(n+m)/2 = 8$ -mal nach rechts gesprungen und  $(n-m)/2 = 2$ -mal nach links. Nun gibt es aber verschiedene Möglichkeiten, wie das Partikel an die Position  $x = m\delta$  gekommen ist. Es kann z.B. am Anfang zweimal nach links gesprungen sein und anschließend hintereinander 8 Mal nach rechts gelaufen sein. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \quad (1)$$

Möglichkeiten, welchen Weg das Partikel gelaufen sein könnte. Für unser Beispiel mit  $n = 10$  und  $m = 6$  ergeben sich 45 verschiedene Schrittfolgen.

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeit  $P(m; n)$  angeben, mit welcher sich das Partikel nach  $n$ -Stößen an der Position  $x = m\delta$  befindet. Diese ist gerade durch die Binomialverteilung<sup>2</sup> gegeben:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2}, \quad (2)$$

wobei  $p$  die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Sprungs nach links bzw. nach rechts angibt. Da die Sprungwahrscheinlichkeiten in beiden Richtungen gleich groß sind, gilt  $p = 1/2$  und somit

$$P(m; n) = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

In der Regel ist die Zeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen sehr klein, so dass  $n = t/\tau$  bei einer Beobachtungszeit von typischerweise  $t = 1$  s, eine sehr große Zahl darstellt. Für diesen Fall können wir  $n!$  und  $m!$  mit Hilfe der Stirlingschen Formel

$$n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (4)$$

<sup>2</sup>Siehe auch Versuch 251 „Statistik des radioaktiven Zerfalls“

nähern. Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für die Wahrscheinlichkeit  $P(m; n)$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \tag{5}$$

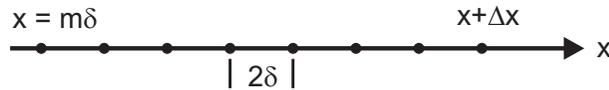


Abbildung 4: Anzahl der Positionen im Bereich  $[x, x + \Delta x]$ .

Wir wollen nun statt  $m$  und  $n$ , die leicht messbaren Größen  $x$  und  $t$  verwenden. Da  $m$  entweder gerade oder ungerade ist, gilt für  $\Delta m$ :

$$\Delta m = \pm 2 \tag{6}$$

Im Intervall  $[x, x + \Delta x]$  gibt es somit  $\frac{\Delta x}{2\delta}$  mögliche Positionen (Abbildung 4). Somit folgt:

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x. \tag{7}$$

Substituieren wir  $n = t/\tau$  sowie  $m = x/\delta$  und definieren zusätzlich die Größe  $D$ :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau}, \tag{8}$$

so erhalten wir schließlich für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit  $t$  innerhalb des Bereichs  $[x, x + \Delta x]$  zu finden:

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{9}$$

$P(x; t)$  in Gleichung (9) ist eine Gaußverteilung (Abbildung 5). Die allgemeine Form solch einer Verteilung lautet

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{((x) - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

wobei  $\langle x \rangle$  den Mittelwert und  $\sigma^2$  die Varianz, bzw.  $\sigma$  die Standardabweichung beschreiben. Da die Verteilung (9) symmetrisch zu  $x = 0$  ist, verschwindet die

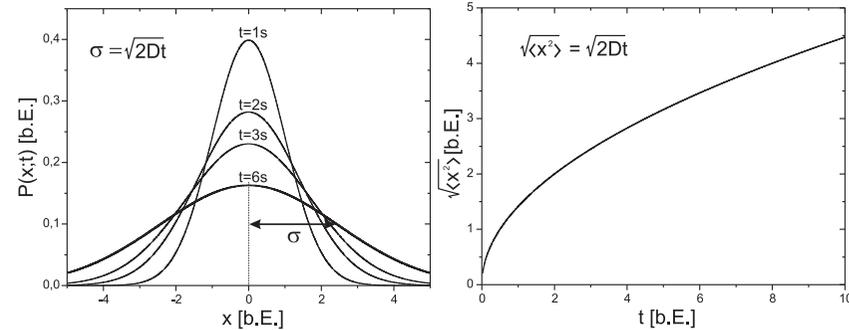


Abbildung 5: Links: Gaußverteilung mit dem Mittelwert  $\langle x \rangle = 0$  und der Varianz  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 2Dt$ . Da die Varianz zeitabhängig ist, wird die Verteilung mit zunehmender Zeit immer breiter. Rechts: Mittelere Verschiebung  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  als Funktion der Zeit.

mittlere Verrückung  $\langle x \rangle$ :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0. \tag{11}$$

Dies ist auch sofort einzusehen, da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel bei einem Stoß entweder nach links oder nach rechts springt, gleich groß ist. Der verschwindende Mittelwert  $\langle x \rangle$  ist daher nicht geeignet, die Brownsche Bewegung des Partikels zu beschreiben. Anders sieht es aus, wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle x^2 \rangle$  berechnen:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2. \tag{12}$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat entspricht der Varianz  $\sigma^2 = 2Dt$  und damit der Breite der Verteilung.

Damit können wir das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung wie folgt formulieren:

Der mittlere Abstand ( $\equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ ) eines Partikels vom Ursprungsort, nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit  $t$  zu:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad \text{Einstein-Smoluchowski-Gleichung.} \quad (13)$$

Bisher haben wir die Brownsche Bewegung nur in einer Dimension untersucht. Unser Ergebnis lässt sich aber sehr einfach auf mehrere Dimensionen übertragen. Findet die Brownsche Bewegung in zwei Dimensionen statt, so gilt für das mittlere Verschiebungsquadrat<sup>3</sup>  $\langle r^2 \rangle$ :

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (14)$$

Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, liefert jeder Summand den Beitrag  $2Dt$  und somit

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}, \quad (15)$$

bzw. im Dreidimensionalen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}. \quad (16)$$

Der Parameter  $D$  wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die Beweglichkeit des Partikels im umgebenden Medium. Nach Einstein ist der Diffusionskoeffizient gegeben durch

$$D = \frac{kT}{f}, \quad (17)$$

wobei  $f$  den Reibungskoeffizienten,  $k$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur der Flüssigkeit darstellen. Für kugelförmige Partikel mit dem Radius  $a$ , die in einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  suspendiert sind, berechnet sich  $f$  nach dem Stokesschen Gesetz (siehe Versuch 212 - Zähigkeit von Flüssigkeiten):

$$f = 6\pi\eta a. \quad (18)$$

Damit folgt für den Diffusionskoeffizient nach Stokes-Einstein:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (19)$$

<sup>3</sup>Im mehrdimensionalen Fall schreiben wir für das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle r^2 \rangle$  anstatt  $\langle x^2 \rangle$ .

Diese Beziehung verknüpft die makroskopischen Größen  $\eta$ ,  $a$  und  $T$  mit den mikroskopische Größen  $\delta$  und  $\tau$  in Gleichung (8). Einsetzen von (19) in Gleichung (15), liefert für das mittlere Verschiebungsquadrat kugelförmiger Partikel im Zweidimensionalen:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t. \quad (20)$$

Damit haben wir die Möglichkeit die Boltzmannkonstante experimentell zu bestimmen. Sind die Größen  $T$ ,  $\eta$  und der Kugelradius  $a$  der Partikel bekannt, so kann durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrats die Boltzmannkonstante berechnet werden:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle. \quad (21)$$

## VI.2 Bedienung des Versuchsaufbaus

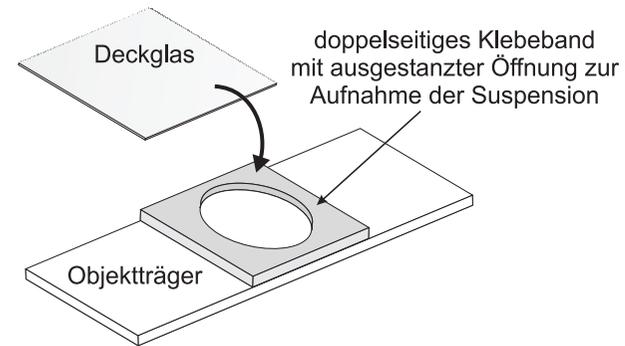


Abbildung 6: Skizze der Probenfassung. Die ausgestanzte Öffnung des doppelseitigen Klebebands wird mit der zu untersuchenden Suspension befüllt und anschließend mit dem Deckglas verschlossen.

### Probenpräparation

In diesem Versuch wird die Brownsche Bewegung von in Wasser suspendierten Latexpartikeln vermessen. Um diese mit dem Mikroskop beobachten zu können,

benötigen wir eine Probenfassung, die einerseits dick genug ist, sodass sich die suspendierten Partikel darin frei bewegen können, andererseits muss diese auch dünn genug sein, damit eine Fokussierung mit dem Mikroskop möglich ist. Um dies zu gewährleisten, werden Sie zunächst eine Probenfassung gemäß Abbildung 6 anfertigen. Auf einen Objektträger wird ein doppelseitiges Klebeband aufgebracht, in dessen Mitte zuvor ein Loch ausgestanzt wurde. In diese Öffnung wird die Probenflüssigkeit eingefüllt und mit einem Deckglas verschlossen. Das doppelseitige Klebeband erfüllt dabei zwei Aufgaben: Zum einen vergrößert dieses das Probenvolumen, so dass sich die suspendierten Partikel frei bewegen können, zum anderen dient es zur Abdichtung der Flüssigkeit, wodurch ungewollte Strömungen durch Verdunstungsprozesse unterdrückt werden.

Für die Anfertigung der Probe gehen Sie wie folgt vor: Schneiden Sie ein Stück doppelseitiges Klebeband passend auf die Größe des Objektträgers (24 mm × 32 mm) zurecht und stanzen Sie mit dem Lochisen zentrisch ein Loch in das Klebeband (Mit der Unterlage auf dem Boden stanzen!). Anschließend kleben Sie das Klebeband mittig auf den Objektträger und entfernen die Abdeckfolie. Schütteln Sie die Flasche mit der Probenflüssigkeit gut durch und pipettieren Sie ca. 150  $\mu\text{l}$  der Probenflüssigkeit in die ausgestanzte Öffnung des Klebebands. Der Durchmesser der Partikel ist auf der Flasche angegeben. Notieren Sie diesen Wert. Legen Sie nun das Deckglas auf das doppelseitige Klebeband und drücken Sie es mit einem Papiertuch vorsichtig an. Dabei darf ruhig etwas von der Flüssigkeit herausfließen. Allerdings dürfen sich keine (größeren) Luftblasen in der Flüssigkeit bilden! Trocknen Sie die Probe mit einem Papiertuch ab und geben Sie auf die Mitte des Deckglases **einen Tropfen** Immersionsöl. Spannen Sie nun die Probe auf den Mikroskoptisch (Abbildung 7) ein. Am Objektivkranz des Mikroskops wählen Sie das Objektiv 100/1.25 oil (100-fache Vergrößerung, Numerische Apertur  $NA=1,25$ ) aus.

Für die Beobachtung der Partikel, muss das Mikroskopobjektiv mithilfe des Fokusgrobiantriebes (siehe Abbildung 7) so nahe an den Objektträger gefahren werden, dass der Öltropfen auf dem Objektträger gerade berührt wird. Ab diesem Punkt darf nur noch mit dem Fokusfeintrieb gearbeitet werden, da sonst eine Berührung des Objektivs mit dem Objektträgerglas leicht möglich. Deshalb sollte der Fokus langsam verändert werden, bis suspendierte Partikel im Bildausschnitt zu sehen sind. Zur Verschiebung des Ausschnittes in x- und y-Richtung, kann der jeweilige x- oder y-Antrieb verwendet werden.

Zur Verbesserung des Kontrastes sollten die Irisblende am Kondensator auf die Position *MIN* gestellt werden.

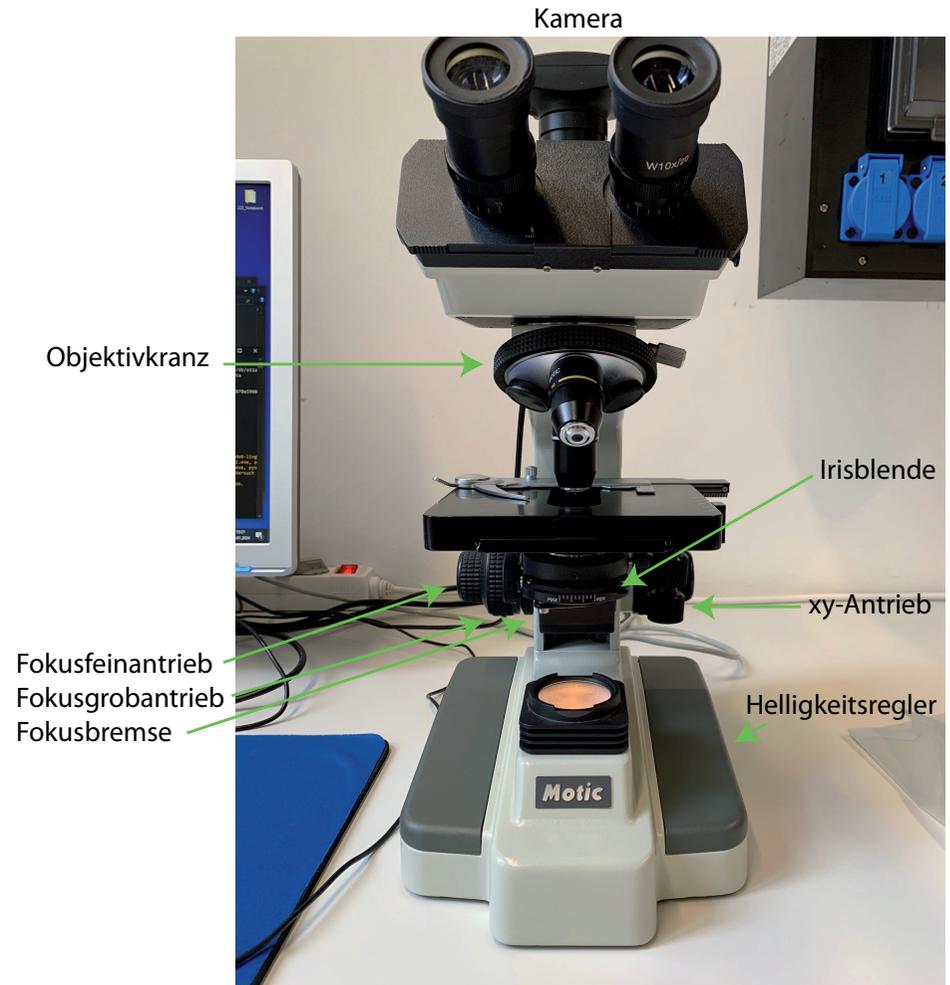


Abbildung 7: Bedienungselemente des Mikroskops.

**Achtung:** Bei der Versuchsdurchführung können folgende systematische Fehler auftreten, die unbedingt zu vermeiden sind:

- Überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich nur ein einziges Partikel beobachten. Manchmal kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere Partikel „zusammenkleben“. Dies lässt sich gut erkennen, indem man etwas den Fokus variiert. Meistens erscheint dieser „Klumpen“ auch deutlich größer als einzelne Partikel.
- Auf keinen Fall dürfen Sie während der Messung die  $xy$ -Position des Objektives verstellen. Auch Erschütterungen des Mikroskops müssen unbedingt vermieden werden.
- Beim Nachfokussieren dürfen Sie mit dem Objektiv auf keinen Fall das Deckglas ihrer Probe berühren. Der dadurch erzeugten Druck, würde die Partikel verdrängen und somit die eigentliche Brownsche Bewegung verfälschen. Sollten Sie beim Nachfokussieren eine abrupte Partikelbewegung beobachten, so müssen Sie sich ein anderes, „höher gelegenes“ Partikel suchen, dessen Position Sie ohne Berührung des Deckglases scharf stellen können.
- Die Probe muss sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Ist dies nicht der Fall, so treten Konvektionsströme auf, die wiederum die Brownsche Bewegung verfälschen. Zudem ist es möglich, dass die Probe schlecht präpariert wurde: Ist die Suspension nicht vollständig mit dem Klebeband abgedichtet, so können durch Verdunstungsprozesse ebenfalls ungewünschte Strömungen in der Probe auftreten. **Warten Sie daher zur Temperierung der Probe zwei Minuten ab, bevor Sie mit der Messung beginnen.** Sollte dann immer noch eine Strömungsbewegung erkennbar sein, so müssen Sie gegebenenfalls eine neue Probe vorbereiten. Wenden Sie sich in diesem Fall an Ihren Betreuer. Auch die Mikroskopbeleuchtung kann die Probe erwärmen. Stellen Sie deshalb die Helligkeit auf ein notwendiges Minimum, damit die Helligkeit des Kamerabildes hoch genug für eine zufriedenstellende Beobachtung eines Partikels ist.

#### Software

Das Messprogramm ist in python geschrieben. Am Anfang müssen Sie einen Gruppennamen eingeben. Das Programm erzeugt automatisch einen Ordner mit diesem Namen und speichert darin alle aufgenommenen Bilder und Messdaten.

Sollte das Programm einmal neugestartet werden, müssen Sie denselben Gruppennamen nochmals eingeben, damit Sie dort weitermachen können, wo Sie vor dem Neustart aufgehört haben.

Das Programm hat drei Tabs, für jede Aufgabe einen eigenen. Im *Caputre*-Tab wird die Bildfolge aufgenommen, im *Calibration*-Tab wird mit Hilfe eines Mikrometermaßstabs eine Eichung der Kameraabbildung vorgenommen und im *Tracking*-Tab müssen Sie ein Partikel über alle Bilder der aufgenommenen Bildfolge verfolgen. Dabei wird automatisch die Verschiebung berechnet und in eine .txt-Datei geschrieben. Auch diese finden Sie anschließend in Ihrem Ordner gespeichert.

Bei der Aufnahme der Bildfolge wird jede Sekunde ein Bild aufgenommen. Den Fehler bzgl. der Zeitmessung können Sie vernachlässigen. Das Programm speichert die Bilder in Ihrem Ordner ab, beginnend mit dem „Bild0.jpg“. Um die Anzahl der aufzunehmenden Bilder festzulegen, tragen Sie einfach die Zahl in das entsprechende Feld der Software ein und starten Sie die Aufnahmeroutine. Um später die Position des Partikels ausmessen zu können, müssen Sie

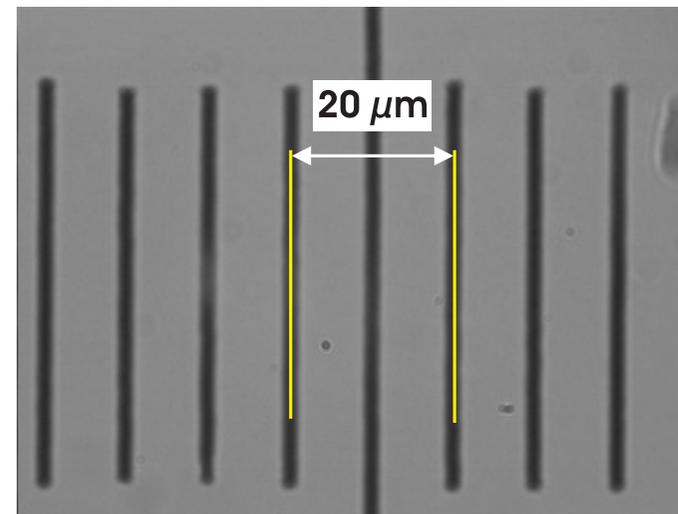


Abbildung 8: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer. Die Distanz zwischen zwei Teilstrichen beträgt  $10 \mu\text{m}$ .

den Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmen. Dazu liegen Objektmikro-

meter aus. Zwischen zwei Skalenteilen des Objektmikrometers liegen  $10 \mu\text{m}$ . Um das Objektmikrometer mit dem Immersionsobjektiv verwenden zu können, müssen Sie hier ebenfalls einen Tropfen Immersionsöl vor Gebrauch auftragen. Im *Calibration*-Tab müssen Sie wieder die Kamera starten und dann entsprechend den Bildausschnitt so wählen, dass die Teilstriche des Objektmikrometers möglichst scharf abgebildet werden (siehe Abbildung 8). Mit dem Button „Start Calibration“ wird ein Bild aufgenommen und gespeichert und ein Courser erscheint. Diesen müssen Sie nun auf einen der Teilstriche verschieben. Mit dem Drücken der „Enter“-Taste wird die Position gespeichert und ein zweiter Courser erscheint. Diesen können Sie mit den Pfeiltasten jetzt verschieben. Erneutes Drücken der „Enter“-Taste speichert die Position erneut und der Abbildungsmaßstab wird in  $\text{nm}/\text{pixel}$  in das Bild geschrieben und im Programm als Konstante gespeichert. Für das Ausmessen der Partikelpositionen müssen Sie in

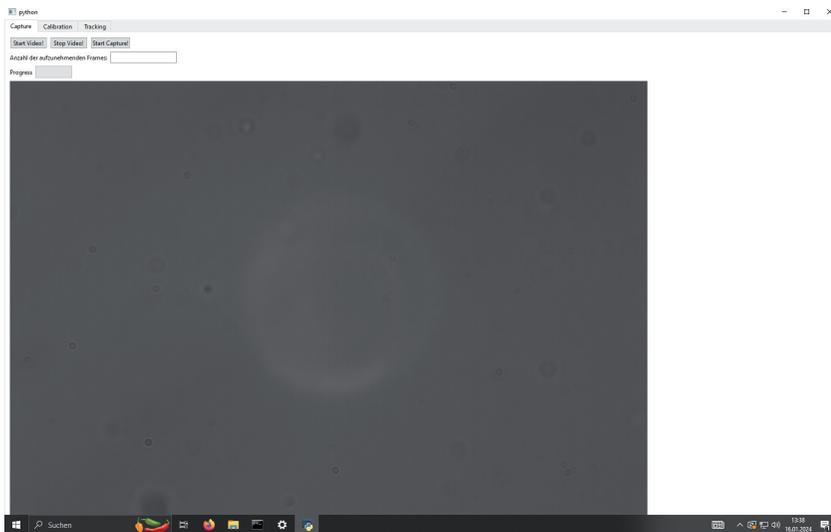


Abbildung 9: Bedienoberfläche des Programms

den *Tracking*-Tab wechseln. Hier können Sie einfach auf den „Start“-Button drücken und es wird automatisch ihr erstes aufgenommenes Bild geladen. Den Courser können Sie entweder mit einem Mausklick auf die gewünschte Position verschieben oder durch das Drücken der „W,A,S,D“-Tasten. Mit dem Drücken der „Enter“-Taste wird die Position gespeichert und das nächste Bild wird ge-

laden. Der Courser verbleibt auf der letzten gespeicherten Position. Sollte das Programm im Laufe des Versuch neugestartet werden, werden Sie zu Beginn des Trackingsvorgangs über ein Dialogfenster nach der Anzahl der aufgenommenen Bilder und des Abbildungsmaßstabes gefragt. Diesen können Sie einfach hier eintragen (Bitte beachten Sie, dass python einen `.` statt einem `,` als Dezimaltrennzeichen erwartet). Danach wird automatisch das nächste, nicht bearbeitete Bild geladen mit dem Courser auf der Position des letzten Bildes, sodass Sie das getrackte Partikel leicht finden sollten.

## VII Durchführung

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Herstellen der Probe suspendierter Latexpartikel

Stellen Sie die Probe nach der Anleitung her. **Schütteln Sie die Flasche kräftig, bevor Sie mit der Pinpette Flüssigkeit entnehmen, da sich die Latexpartikel mit der Zeit am Boden absetzen!** Achten Sie auch darauf, die Glasflächen im Bereich des ausgestanzten Lochs möglichst nicht zu berühren. Legen Sie anschließend die Probe in das Mikroskop und stellen Sie entsprechend den Fokus ein, sodass Sie die suspendierten Partikel beobachten können. Drehen Sie dazu **langsam** am Feintrieb des Fokusrades.

### Aufgabe 3: Aufnahme einer Bildfolge

Nehmen Sie eine Bildfolge von mindestens 150 Bildern auf. Stellen Sie sicher, dass sich das von Ihnen gewählte Partikel die ganze Zeit sichtbar im Bild befindet. Sollte es zu stark in z-Richtung aus dem Fokus gewandert sein, stellen Sie diesen sehr langsam nach, sodass Sie das Partikel wieder gut sehen können. Achten Sie auch darauf, dass sich möglichst nicht zu viele Partikel im beobachteten Ausschnitt befinden, sodass diese nicht dauernd zusammenstoßen. Wenn Sie die Aufnahme der Bildfolge gestartet haben, müssen Sie warten bis der Progressanzeiger bei 100 % ist. Nachdem die Bildfolge aufgenommen worden ist, notieren Sie die Raumtemperatur.

### Aufgabe 4: Eichen des abgebildeten Ausschnitts mit einem Mikrometermaßstab

Nehmen Sie eine Eichung des abgebildeten Ausschnitts mittels des *Calibration*-Tabs vor. Um den Maßstab im vergrößerten Bildausschnitt zu finden, können Sie das Objektiv mit 10facher Vergrößerung benutzen und dann auf das 100fach

vergrößernde Objektiv wechseln. Vergessen Sie nicht den Tropfen Immersionsöl!  
**Werfen Sie das Objektmikrometer auf keinen Fall nach Beendigung der Messung in den Müll! Legen Sie es wieder zurück in die Aufbewahrungsschachtel!** Notieren Sie den Abbildungsmaßstab.

**Aufgabe 5: Vermessen der Partikelpositionen für jedes Bild der aufgenommenen Folge**

Messen Sie die Positionen für das beobachtete Partikel in jedem der aufgenommenen Bilder nacheinander aus. Über den *Tracking*-Tab ist das möglich. Achten Sie darauf, dass Sie immer das gleiche Partikel messen. Nachdem Sie die Position des Partikel in jedem der aufgenommenen Bilder bestimmt haben, können Sie direkt mit der Auswertung, z.B. in Jupyter Notebook, beginnen. Die Datei mit den gemessenen Positionen wird automatisch nach Beenden in ihrem Ordner gespeichert.

Bild-Nr. und Zeit [s]	x[μm]	y[μm]
0	37.24644	43.39302
1	37.1547	43.1178
2	36.97122	42.93432
3	36.14556	41.92518
4	35.96208	39.72342
5	35.68686	39.72342
6	35.68686	39.35646
7	36.42078	38.25558
8	36.32904	39.81516
9	35.13642	39.9069

Abbildung 10: Vorbereiten der Excelarbeitsmappe

**VIII Auswertung in Excel**

**VIII.1 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler**

Ihre Messdaten sind in der Datei „poistion\_data.txt“ gespeichert. Diese Datei können Sie in Excel öffnen. In den folgenden Dialogfenstern sollten Sie kurz überprüfen, ob die Daten bzgl. Dezimaltrennzeichen und Formatierung richtig erkannt wurden und bei Bedarf entsprechend die Einstellungen anpassen. Sie müssen für das Trennzeichen der Spalten das Feld bei „Komma“ anklicken. Und im dritten Schritt des Importdialoges müssen Sie für alle drei Spalten über den Button „Weitere...“ die Dezimaltrennzeichen auf einen Punkt statt einem Komma umstellen und das Tausendertrennzeichen zu entfernen. Wenn der Import der Messdaten geklappt hat, speichern Sie ihre Arbeitsmappe direkt als .xlsx-Datei im gleichen Ordner wieder ab.

Fügen Sie eine Kopfzeile hinzu, um für die einzelnen Spalten jeweils eine Beschriftung einfügen zu können. Die erste Spalte beinhaltet sowohl die Bildnummer als auch den Aufnahmezeitpunkt, da beides gleichbedeutend ist. Die beiden nächsten Spalten sind jeweils die x- und y-Position des gemessenen Partikels in μm zum oberen linken Bildeck (siehe Abbildung 11).

Da es sich um Absolutpositionen auf dem Bild handelt, wir aber die relative Verschiebung von einem Bild zum nächsten benötigen, müssen die Differenzen

der jeweiligen Elemente berechnet werden  $[x_{i+1} - x_i] = x_{diff}$ . Geben Sie dafür einfach die entsprechende Formel mit den referenzierten Zellen in die nächsten beiden Spalten ein und ziehen Sie die Formel bis zur vorletzten Zeile ihrer Messdaten nach unten. Das geht über das kleine Quadrat, das erscheint sobald die die zu kopierenden Zellen ausgewählt haben (siehe Abbildung 11).

Bild-Nr. und Zeit [s]	x[μm]	y[μm]	dx[μm]	dy[μm]
0	37.24644	43.39302	-0.09174	-0.27522
1	37.1547	43.1178	-0.18348	-0.18348
2	36.97122	42.93432	-0.82566	-1.00914
3	36.14556	41.92518	-0.18348	-2.20176
4	35.96208	39.72342	-0.27522	0
5	35.68686	39.72342	0	-0.36696
6	35.68686	39.35646	0.73392	-1.10088
7	36.42078	38.25558	-0.09174	1.55958
8	36.32904	39.81516	-1.19262	0.09174
9	35.13642	39.9069	0.36696	-0.4587
10	35.50338	39.4482	1.19262	0
11	36.696	39.4482	0.82566	-0.27522
12	37.52166	39.17298	0.27522	-0.64218
13	37.79688	38.5308	1.74306	-1.3761

Abbildung 11: Berechnung der Verschiebung in x- und y-Richtung

Da die Verschiebungsquadrate  $dx^2$ ,  $dy^2$  und  $dx^2 + dy^2$  benötigt werden, müssen Sie diese in den nächsten drei Spalten berechnen. Als Formel können Sie in Excel einfach zweimal die gleiche Zelle miteinander multiplizieren oder über das

Exponentenzeichen das Quadrat des Zelleninhaltes bilden. In der letzten Spalte müssen Sie einfach den Inhalt der jeweiligen  $dx^2$  und  $dy^2$  Zellen addieren (siehe Abbildung 12)

Bild-Nr. und Zeit [s]	x[µm]	y[µm]	dx[µm]	dy[µm]	dx²[µm²]	dy²[µm²]	dx²+dy²[µm²]
0	37.24644	43.39302	-0.09174	-0.27522	0.00841623	0.07574605	0.084162276
1	37.1547	43.1178	-0.18348	-0.18348	0.03366491	0.03366491	0.067329821
2	36.97122	42.93432	-0.82566	-1.00914	0.68171444	1.01836354	1.700077975
3	36.14556	41.92518	-0.18348	-2.20176	0.03366491	4.8477471	4.881412008
4	35.96208	39.72342	-0.27522	0	0.07574605	0	0.075746048
5	35.68686	39.72342	0	-0.36696	0	0.13465964	0.134659642
6	35.68686	39.35646	0.73392	-1.10088	0.53863857	1.21193677	1.750575341
7	36.42078	38.25558	-0.09174	1.59958	0.00841623	2.43228978	2.440706004
8	36.32904	39.81516	-1.19262	0.09174	1.42234246	0.00841623	1.430758692
9	35.13642	39.9069	0.36696	-0.4587	0.13465964	0.21040569	0.345065332
10	35.50338	39.4482	1.19262	0	1.42234246	0	1.422342464
11	36.696	39.4482	0.82566	-0.27522	0.68171444	0.07574605	0.757460484
12	37.52166	39.17298	0.27522	-0.64218	0.07574605	0.41239515	0.488141201
13	37.79688	38.5308	1.74306	-1.3761	3.03825816	1.89365121	4.931909374
14	39.53994	37.1547	0.18348	1.8348	0.03366491	3.36649104	3.40015595
15	39.72342	38.9895	-0.36696	-0.82566	0.13465964	0.68171444	0.816374077

Abbildung 12: Berechnung der Verschiebungsquadrate

Nachdem Sie die Verschiebungsquadrate berechnet haben, werden auch noch die Mittelwerte der Verschiebungen benötigt. Lassen Sie zwei Spalten frei und tragen Sie die Bezeichnung der zu berechnenden Werte in die Spalte K ein. Es wird die Anzahl  $n$  der berechneten Differenzwerte (Anzahl der Bilder weniger eines) und die Mittelwerte der Verschiebungen  $\langle dx \rangle$  und  $\langle dy \rangle$ , der Mittelwert der Summe der Verschiebungsquadrate  $\langle dx^2 + dy^2 \rangle = \langle r^2 \rangle$  und der Fehler der mittleren Verschiebungsquadrate  $\Delta \langle r^2 \rangle$  benötigt. Nutzen Sie für die Berechnung der Mittelwerte die entsprechende Funktion von Excel und wählen entweder durch Eingabe oder durch Auswahl den entsprechenden Zellenbereich aus (siehe Abbildung 13).

Den Fehler der mittleren Verschiebungsquadrate wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \langle r^2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (r_i^2 - \langle r^2 \rangle)^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (22)$$

Die Standardabweichung lässt sich in Excel über „STABWA()“ berechnen, die Wurzel über „WURZEL()“ .

	J	K	L	M
1				
2		Anzahl der		
3		Differenzen n:	149	
4		$\langle dx \rangle$ [µm]	-0.0221654	
5		$\langle dy \rangle$ [µm]	-0.0449464	
6		$\langle dx^2 + dy^2 \rangle$ [µm²]	1.71278704	
7		$\Delta \langle dx^2 + dy^2 \rangle$ [µm²]	0.12197809	

Abbildung 13: Berechnung der Mittelwerte

## VIII.2 Erstellen des Histogramms der gemessenen Verschiebungen

Um in Excel ein Histogramm zu erstellen, muss eine Tabelle mit allen notwendigen Unterteilungen der Abzisse erstellt werden. Suchen Sie dazu mit den Befehlen „MIN()“ und „MAX()“ den größten positiven und negativen Verschiebungswert. Als Bereich müssen Sie hier die Verschiebung in x- und y-Richtung gemeinsam auswählen. Unterhalb dieser beiden Werte erzeugen die Histogrammklassen ausgehend vom maximal negativen zum maximal positiven Verschiebungswert in Schritten von  $0,2 \mu\text{m}$  (siehe Abbildung 14).

	J	K	L
5		$\langle dx^2 + dy^2 \rangle$ [µm²]	1.712787
6		$\Delta \langle dx^2 + dy^2 \rangle$ [µm²]	0.1219781
7			
8		max. positive Verschiebung	2.66046
9		max. negative Verschiebung	-2.47698
10			
11		Abzissenwerte für Histogramm	
12			-2.6
13			-2.4
14			-2.2
15			-2
16			-1.8
17			-1.6
18			-1.4

Abbildung 14: Erstellen der Klassenwerte des Histogramms

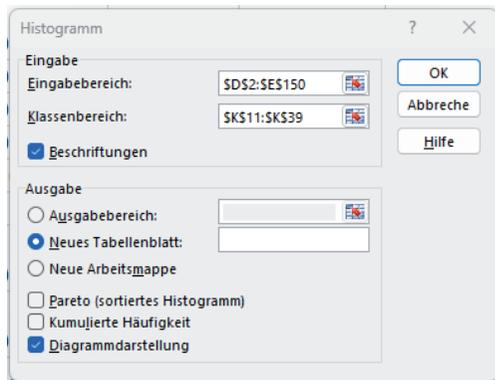


Abbildung 15: Dialogfenster Histogramm

Die Erstellung des Histogramms kann in Excel über den Tab „Daten“ und dort den Button „Datenanalyse“ gestartet werden. Im ersten Dialogfenster müssen Sie den Menüpunkt Histogramm auswählen. Es öffnet sich ein Dialogfenster (siehe Abbildung 15), in dem Sie verschiedene Einstellungen vornehmen müssen. Der Eingabebereich umfasst alle berechneten Verschiebungen sowohl in x- als auch in y-Richtung. Als Klassenbereich müssen Sie die Abzissenwerte auswählen, die Sie vorher erstellt haben. Bei dem Menüpunkt „Diagrammerstellung“ müssen Sie einen Hacken setzen, sonst wird nur eine neue Tabelle erstellt aber kein Histogramm. Damit die Balken der Binbreite entsprechen, müssen Sie über einen Rechtsklick auf einen Balken im Diagrammenüpunkt „Datenreihen formatieren“ die Abstandsbreite auf 0% setzen.

Um eine Gaußkurve an die Messdaten anzufitten muss man in Excel einen kleinen Umweg gehen, da es keine direkte Funktion dafür gibt. Man muss die beiden Parameter einer Gaußkurve selbst bestimmen und die Werte der Kurve für alle Abzissenwerte einzeln berechnen lassen. Den Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  können wieder über die entsprechenden Excelfunktionen berechnet werden. Berechnen Sie diese im neuen Tabellenblatt und wählen Sie dazu die Verschiebungswerte auf dem alten Tabellenblatt aus (siehe Abbildung 16).

Um im Histogramm die angepasste Gaußkurve ebenfalls darstellen zu können, müssen Sie in der Spalte C die einzelnen Werte der Gaußverteilung berechnen. Excel bietet dafür eine Funktion „NORM.VERT()“ an. Diese Funktion hat als Eingabewerte den Abzissenwert, den Mittelwert  $\mu$ , die Standardabweichung  $\sigma$  und die Abfrage, ob eine kumulierte Verteilung ausgegeben wird. In unserem Fall

	A	B	C	D	E	F
1	werte für His	Häufigkeit	Gaußkurve			
2	-2.6	0	0.5529431	$\mu$ :	-0.033556	
3	-2.4	1	0.982485	$\sigma$ :	0.9263624	
4	-2.2	1	1.6662038			
5	-2	2	2.6970371			
6	-1.8	5	4.1667974			

Abbildung 16: Berechnen des Mittelwertes und der Standardabweichung

wollen wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also wird für die letzte Abfrage „FALSCH“ eingetragen. Um beim automatischen Ausfüllen die Zellen für den Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  fest referenziert zu haben, müssen Sie vor und nach den Buchstaben der Zelle ein Dollarzeichen setzen (siehe Abbildung 17).

	A	B	C	D	E	F	G
1	werte für His	Häufigkeit	Gaußkurve				
2	-2.6	0	0.5529431	$\mu$ :	-0.033556		
3	-2.4	1	0.982485	$\sigma$ :	0.9263624		
4	-2.2	1	1.6662038				
5	-2	2	2.6970371				

Abbildung 17: Berechnen der Wahrscheinlichkeitswerte der angepassten Gaußkurve

Um eine graphische Darstellung der Gaußkurve in das Histogramm hinzuzufügen, müssen Sie das Histogramm mit einem Rechtsklick auswählen und anschließend im Menü den Punkt „Daten auswählen“ das Dialogfenster für die Auswahl der Datenreihen. Hier müssen Sie eine neue Reihe hinzufügen. Wählen Sie dann für die x-Werte die berechneten Werte der Gaußkurve aus. Als Reihename können Sie Gaußkurve eingeben. Um die Darstellung der neuen Datenreihe zu ändern, müssen Sie durch einen Rechtsklick das Datenreihenmenü öffnen und dort den Menüpunkt „Datenreihen-Diagrammtyp ändern ...“ auswählen. Im folgenden Dialogfenster können Sie für die Gaußkurve beispielsweise den Punkt „Punkte mit interpolierter Linie“ auswählen. In Abbildung 18 sehen Sie ein beispielhaftes Diagramm, wie es mit Excel erstellt werden soll.

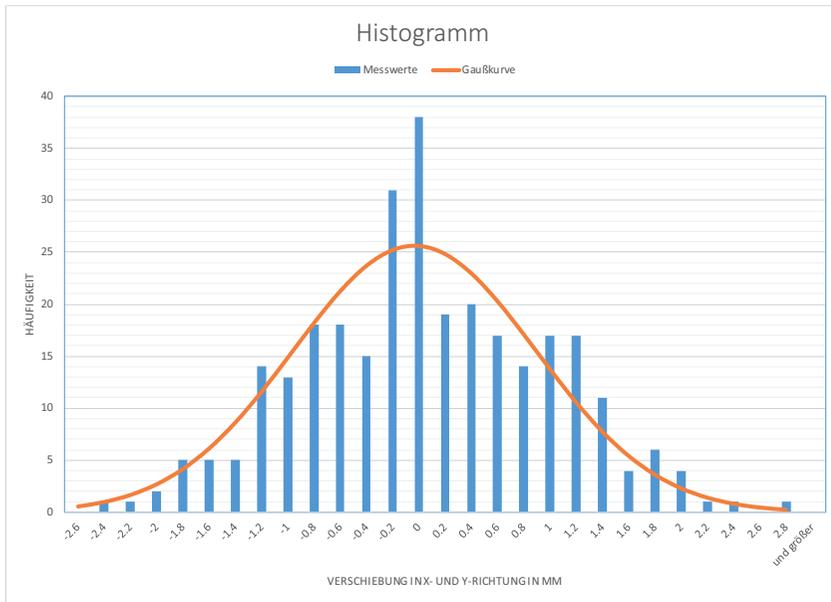


Abbildung 18: Histogramm mit Gaußkurve

### VIII.3 Graphische Darstellung des „random walk“

Um den Weg des beobachteten Partikels darzustellen, wird ein xy-Plot aus den Verschiebungen erzeugt. In Excel gibt es eine eigene Diagrammkategorie dafür. Markieren Sie alle absoluten x- und y-Positionen und wählen Sie unter dem Tab „Einfügen“ das Punktdiagramm aus (siehe Abbildung 19). Anschließend müssen Sie noch die Achsenmaxima und -minima entsprechend einstellen, die Achsenbeschriftungen hinzufügen und die Darstellung der Kurve nach Bedarf anpassen. Eine mögliche Darstellung finden Sie in Abbildung 20. Speichern Sie abschließend die Excelarbeitsmappe ab. Die Diagramme können Sie als Bild in Ihre Auswertung kopieren.

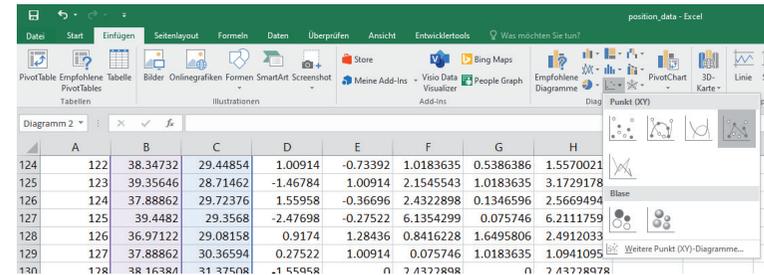


Abbildung 19: Auswahl des Diagrammtyps

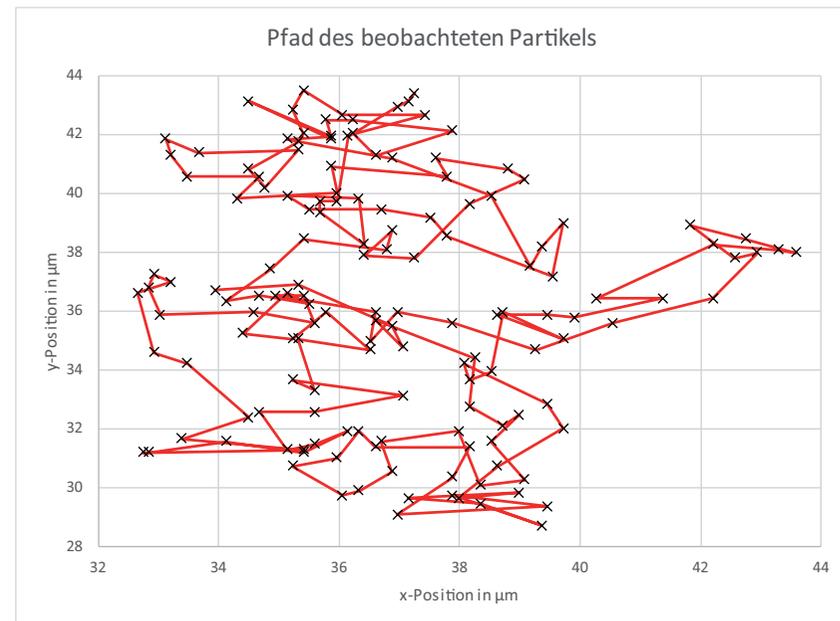


Abbildung 20: Pfad eines beobachteten Partikels

## Viskosität von Wasser

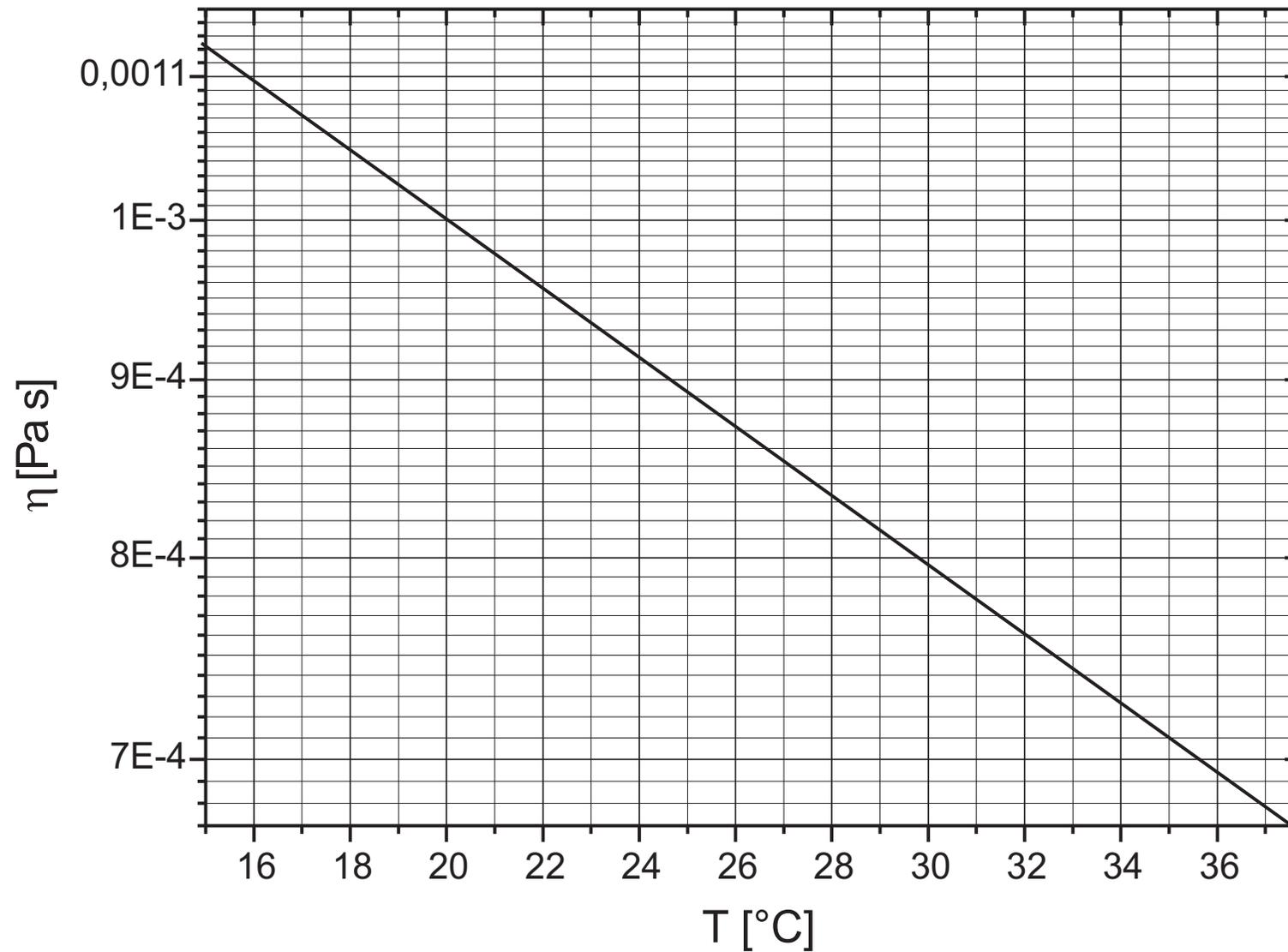


Abbildung 21: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

## Versuch 248 RC-Glied

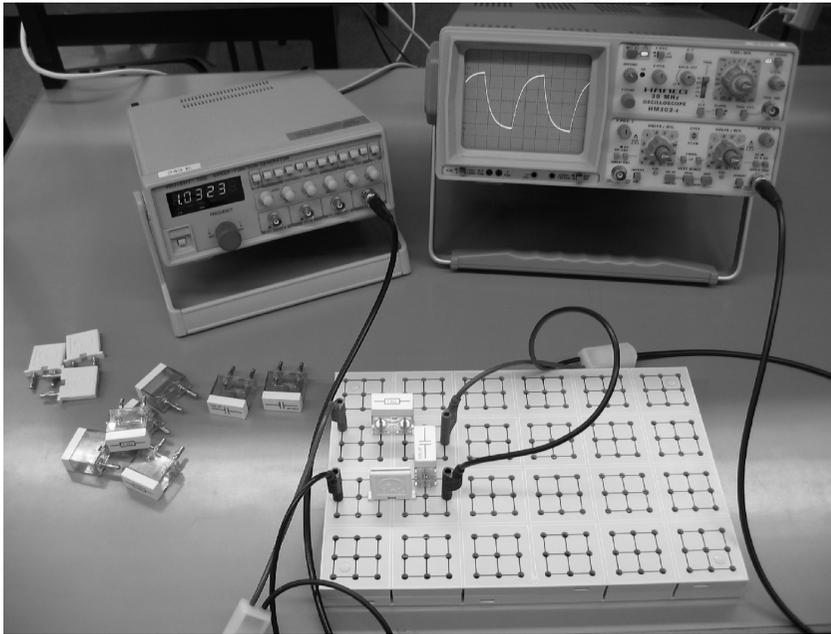


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Oszilloskop
- Funktionsgenerator
- Verschiedene Widerstände und Kondensatoren im Steckgehäuse
- Steckbrett zum Verschalten der Bauelemente

### II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- K.-H. Rohe, *Elektronik für Physiker*, Teubner Verlag.
- Homepage des Praktikums: <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Motivation

Elektrische Schaltungen mit RC-Gliedern stellen in der Wissenschaft und Technik ein elementares Schaltungskonzept dar. So liefern beispielsweise RC-Glieder die Zeitbasis für viele elektrisch erzeugte Schwingungsabläufe. Der Funktionsgenerator, mit dem Sie hier im Praktikum arbeiten, erhält seine Zeitinformation letztendlich von einem internen RC-Glied. Eine weitere wichtige Anwendung von RC-Gliedern stellen Filter-Schaltungen dar. Die Spannung, die in einer RC-Schaltung über dem Kondensator abfällt, hängt von der Frequenz der eingepprägten Spannung ab. Mit anderen Worten: Der Wechselstromwiderstand (Impedanz) ist frequenzabhängig. Somit lassen sich Schaltungen aufbauen, die nur tiefe, nur hohe oder nur einen bestimmten Frequenzbereich durchlassen. Denken Sie beispielsweise an ein Radio bzw. an den Verstärker Ihrer Stereoanlage. Auch hier sind Filterschaltungen auf Basis von RC-Gliedern vorhanden, mit denen Sie die Höhen, Mitten und Tiefen des Audiosignals nach Ihrem Musikempfinden durch Filterung einstellen können.

Neben solch technisch sehr wichtigen Schaltungen dient das Studium von RC-Gliedern auch zum Erkennen von parasitären Effekten in der Messtechnik. Jedes Kabel und jedes Messgerät besitzen ohmsche und kapazitive Eigenschaften, die die Messung einer physikalischen Größe beeinflussen und somit verfälschen können. Es ist daher wichtig diese Einflüsse schon vor einer Messung zu erkennen und entsprechend zu kompensieren.

Um einen Bezug zur Biologie herzustellen, werden Sie in diesem Versuch die passiven Eigenschaften eines Axons mit Hilfe von RC-Gliedern simulieren. Unter passiven Eigenschaften ist gemeint, dass wir ein Axon als eine Art Kabel betrachten. Verstärkende Mechanismen, die bei einem realen

„Nerv“ zusätzlich vorhanden sind, werden hier nicht berücksichtigt<sup>1</sup>. Mit Hilfe einfacher Überlegungen sollen Sie Analogien zwischen einem realen Axon und entsprechenden elektrischen Schaltungen herstellen und so das elektrische Ersatzschaltbild modellieren. Anhand dieses Modells werden Sie erkennen, dass die Stärke eines Reizes sehr schnell entlang eines Axons abfällt und dass die Geschwindigkeit mit dem sich solch ein Signal ausbreitet, von elementaren elektrischen Größen wie Widerstand und Kapazität abhängt.

## IV Vorbereitung

Dieser Versuch setzt voraus, dass Sie mit den Begriffen Ladung, Strom, Spannung und Widerstand absolut vertraut sind. Informieren Sie sich zusätzlich über das Ohmsche- und die Kirchhoffschen Gesetze sowie über den Aufbau und die Kenngrößen (Kapazität, Impedanz) eines Kondensators. Da einzelne Aufgaben dieses Versuchs sehr nah an die Biologie angelehnt sind, sollten Sie Ihr Wissen bezüglich des biologischen Aufbaus einer Membran eines Neurons auffrischen.

Für das Verständnis eines RC-Glieds im Wechselstromkreis müssen Sie sich über die Eigenschaften von Wechselspannungen wie Frequenz, Periodendauer, Amplitude und Phase informieren.

## V Aufgaben

1. Untersuchung des Lade- und Entladevorgangs eines Kondensators und Bestimmung der Zeitkonstante.
2. Aufbau einer Schaltung aus RC-Gliedern zur Simulation der passiven elektrischen Eigenschaften der Membran eines Axons. Messung der Längskonstante.
3. Untersuchung der Eigenschaften eines RC-Glieds im Frequenzbereich: Aufbau eines Tiefpassfilters und Messung des Frequenzgangs.

<sup>1</sup>Auch das wäre physikalisch möglich, würde aber den Rahmen dieses Versuchs sprengen.

## VI Grundlagen

### Verhalten eines RC-Glieds im Zeitbereich

Ein Kondensator  $C$  und ein Widerstand  $R$  werden über einen Schalter  $S$  an eine Gleichspannungsquelle  $U_E$  angeschlossen (Abbildung 2). Wir interessieren uns für den zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator  $U_C$ : Wird der Schalter geschlossen, so fließt durch den Widerstand ein Strom zum Kondensator. Allerdings können die Ladungen nicht durch den Kondensator fließen, da die beiden Kondensatorelektroden durch ein nichtleitendes Dielektrikum getrennt sind. Es kommt daher zu einer Ansammlung von Ladungsträgern an den Kondensatorelektroden, wodurch sich über dem Kondensator die Spannung  $U_C$  aufbaut. Man spricht dabei auch vom „Aufladen eines Kondensators“. Mit zunehmender Aufladung wird der Ladestrom immer geringer, denn die sich am Kondensator aufbauende Spannung, wirkt der Gleichspannungsquelle entgegen, so dass sich pro Zeiteinheit immer weniger Ladungen an den Elektroden ansammeln können. Schließlich ist nach einer gewissen Zeit die Kondensatorspannung genau so groß wie  $U_E$ , d.h. der Kondensator ist aufgeladen.

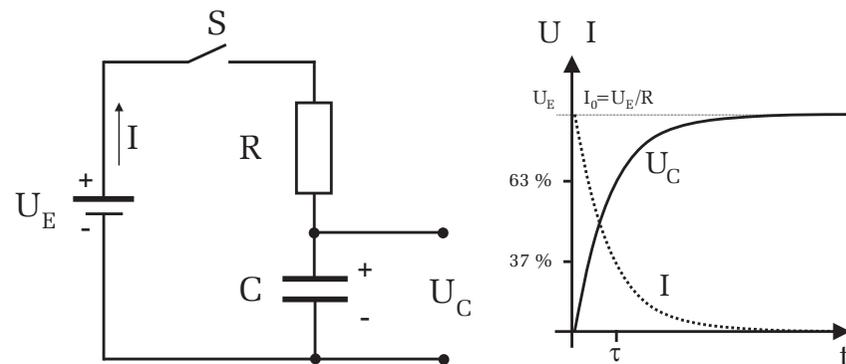


Abbildung 2: Links: Schaltbild. Rechts: Spannungs- und Stromverlauf beim Laden eines Kondensators.  $I_0 = U_E/R$  entspricht dem Ladestrom direkt nach dem Schließen des Schalters und  $U_E$  ist die Spannung des aufgeladenen Kondensators die gerade der Eingangsspannung entspricht. Die Zeitkonstante  $\tau$  entspricht der Zeit, bei der die Kondensatorspannung auf 63% des Endwerts  $U_E$  angestiegen, bzw. der Ladestrom auf 37% des Endwerts abgefallen ist.

Die Spannung am Kondensator erreicht demnach nur allmählich den Wert der Eingangsspannung  $U_E$ . Der Ladestrom verhält sich genau umgekehrt. Beim Einschalten fließt ein hoher Ladestrom der während des Aufladevorgangs immer geringer wird und schließlich auf Null zurückgeht (Abbildung 2).

Der Ladevorgang eines Kondensators gemäß dem Schaltbild in Abbildung 2 lässt sich mathematisch unter Zuhilfenahme des Ohmschen Gesetz einfach beschreiben<sup>2</sup>. Für den Ladestrom ergibt sich:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (1)$$

wobei  $I_0$  durch  $U_E/R$  gegeben ist und für  $\tau = RC$  gilt. Ein ähnliches funktionales Verhalten gilt für die Kondensatorspannung  $U_C$ :

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2)$$

Direkt nach dem Einschalten fließt im RC-Kreis ein Maximalstrom  $I_0$ , der den Kondensator auflädt und der mit der Zeitkonstante  $\tau$  exponentiell auf Null abklingt. Entsprechend steigt die Spannung  $U_C$  des Kondensators exponentiell mit der Zeitkonstante  $\tau$  an, bis schließlich der Endwert, die Eingangsspannung  $U_E$ , erreicht wird.

Das zeitliche Verhalten des Ladevorgangs wird allein durch die Zeitkonstante  $\tau = RC$  bestimmt. Je größer  $\tau$ , desto länger dauert es bis der Kondensator aufgeladen ist. Dies ist leicht einzusehen, denn ein hochohmiger Widerstand  $R$  bewirkt, dass im Mittel nur ein kleiner Ladestrom fließt. Entsprechend lange dauert es bis der Kondensator vollständig aufgeladen ist. Zudem bedeutet eine große Kapazität ein hohes „Fassungsvermögen“ für Ladungen. Daher benötigt eine große Kapazität bei gegebenem Ladestrom eine längere Ladezeit als eine kleine Kapazität.

Die Zeitkonstante  $\tau$  kann durch Messung der Halbwertszeit  $T_H$  der Kondensatorspannung experimentell bestimmt werden. Aus Gleichung (2) folgt für die Halbwertszeit

$$\frac{U_E}{2} = U_E(1 - e^{-T_H/\tau}) \quad (3)$$

und damit

$$\tau = \frac{T_H}{\ln 2}. \quad (4)$$

<sup>2</sup>Die genaue Herleitung finden Sie in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik

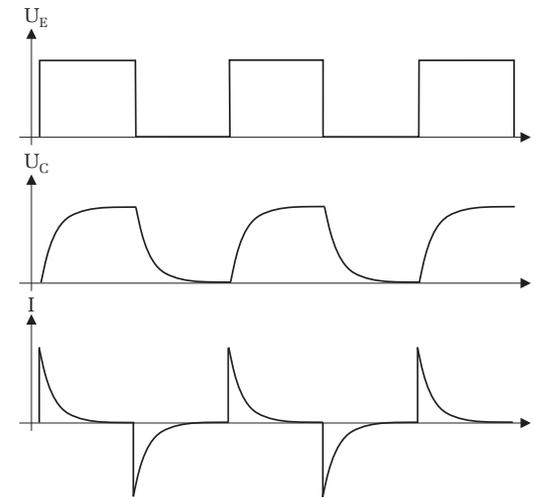


Abbildung 3: eine rechteckförmige Eingangsspannung  $U_E$  bewirkt ein kontinuierliches Laden und Entladen des Kondensators. Beachten Sie, dass sich die Richtung des Ladestroms  $I$  beim Entladen umkehrt.

Statt einer Gleichspannungsquelle und einem Schalter wird das RC-Glied nun an eine Rechteckspannung mit der Periodendauer  $T$  angeschlossen. Steigt die Spannung von Null auf den Wert  $U_E$ , so wird der Kondensator wie zuvor diskutiert mit der Zeitkonstante  $\tau$  aufgeladen. Fällt die Spannung dann wieder auf Null zurück, so wird der Kondensator über den Widerstand  $R$  entladen. Der Entladevorgang erfolgt mit der gleichen Zeitkonstante  $\tau$  wie der Ladevorgang. Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung und des Ladestroms ist in Abbildung 3 dargestellt.

### Beschreibung der elektrischen Eigenschaften einer Membran eines Axons mit Hilfe von RC-Gliedern

Abbildung 4 zeigt den schematischen Aufbau eines Membranabschnitts eines Axons. Der Extrazellulärraum wird vom Intrazellulärraum durch eine elektrisch nicht leitende Doppellipidschicht getrennt. In dieser Schicht sind Ionenkanäle eingebettet. Sie arbeiten spezifisch, d.h. sie lassen beispielsweise nur Natrium- oder Kalium- Ionen durch. Zwischen Extra- und Intrazellulärraum besteht

ein Membranruhespannung  $U_0$  von typischerweise 70 mV. Die Ursache dieser Spannung ist auf die unterschiedliche Verteilung der Ionen zurückzuführen. Aufgrund der Diffusion wandern nun die einzelnen Ionen in Richtung des Konzentrationsgradienten durch die spezifischen Ionenkanäle auf die andere Seite der Membran. Dadurch würde sich der Konzentrationsunterschied mit der Zeit ausgleichen und die Membranruhespannung würde auf Null absinken. Um dies zu verhindern, befinden sich in der Doppellipidschicht zusätzlich noch Ionenpumpen, die kontinuierlich Ionen entgegen dem Konzentrationsgradienten befördern.

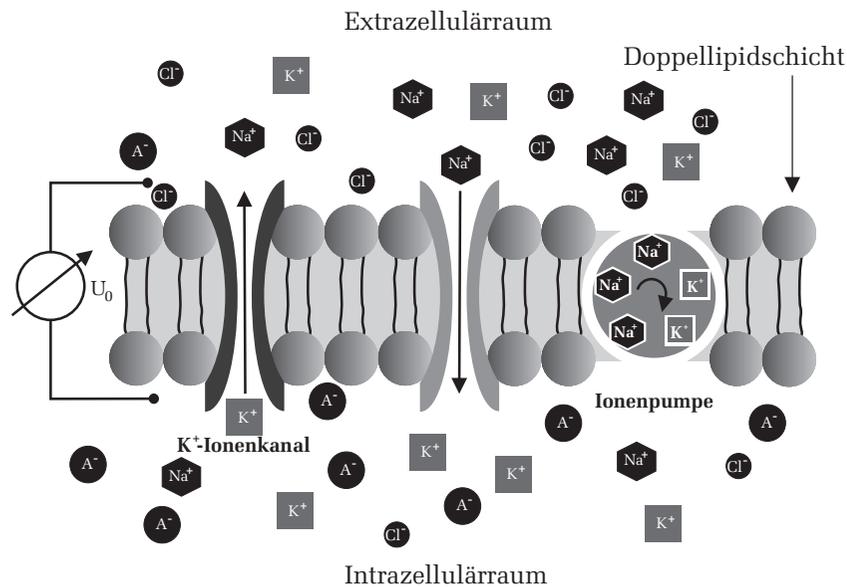


Abbildung 4: Schematischer Aufbau der Membran eines Axons.

Die elektrischen Eigenschaften solch einer Membran lassen sich mit Hilfe einfacher elektrischer Bauelemente wie Widerstand, Kondensator, Spannungs- und Stromquelle sehr gut modellieren. Betrachten wir dazu zunächst die unterschiedlichen Ionenkonzentrationen (Abbildung 5a). Im Inneren der Membran ist die Konzentration von Kaliumionen höher als im Außenbereich. Die damit verbundene Potentialdifferenz kann im Ersatzschaltbild durch eine Spannungsquelle  $U_K$  beschrieben werden. Diese Spannungsquelle ermöglicht ein Fluss von Kali-

umionen durch die Membran (**Diffusionsstrom**). Die Ionen können aber nur durch den Ionenkanal die Membran durchqueren. Der Kalium- Ionenkanal stellt somit einen elektrischen Leiter für Kalium dar. Da jeder Leiter, abgesehen von den Supraleitern, einen endlichen Widerstand besitzt, wird der Kalium- Ionenkanal im Ersatzschaltbild durch den Widerstand  $R_K$  dargestellt (Abbildung 5b). Neben Kalium werden die elektrischen Eigenschaften der Membran noch von anderen Ionenarten bestimmt. Wir berücksichtigen dies indem wir die Potentialdifferenzen bezüglich aller Ionenarten durch verschiedene Spannungsquellen und die dazugehörigen Ionenkanäle durch unterschiedliche Widerstände darstellen. Dabei gilt es die richtige Polung der einzelnen Spannungsquellen zu beachten.

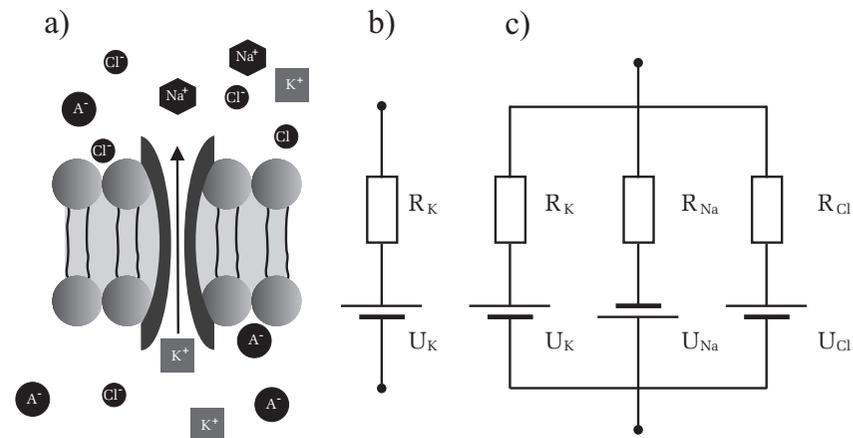


Abbildung 5: a) Doppellipidschicht mit einem Ionenkanal. b) Elektrisches Ersatzschaltbild einer Ionenart unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Ionenkonzentration und der Wirkungsweise des Ionenkanals. c) Ersatzschaltbild für drei verschiedene Ionenarten und Ionenkanäle.

Da sich die Ionen auf der Oberfläche der Membran im Gegensatz zu deren Durchquerung vergleichbar gut bewegen können, dürfen wir die einzelnen Ersatzschaltbilder parallel schalten (Abbildung 5c). Dies gilt aber nur für einen kurzen Membranabschnitt. Für längere Abschnitte müssen zusätzlich noch Längswiderstände der Membran berücksichtigt werden. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Als nächstes müssen wir die Ionenpumpen in unser Ersatzschaltbild mit einbeziehen (Abbildung 6). Die Ionenpumpen sorgen dafür, dass stets ein ausreichendes

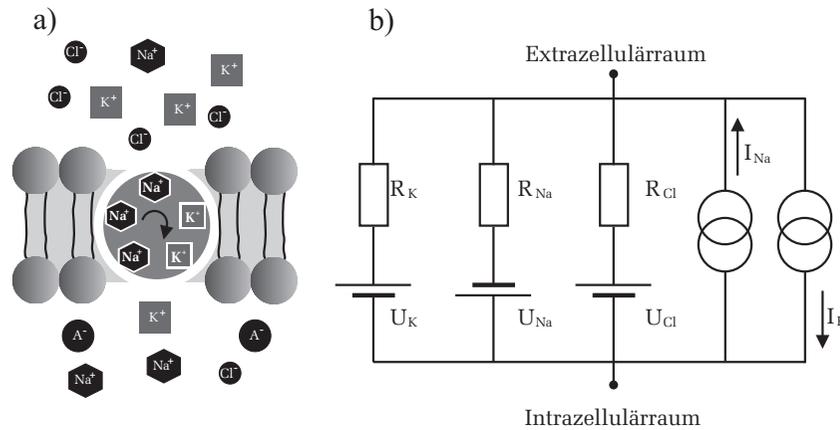


Abbildung 6: Berücksichtigung einer Ionenpumpe der Membran. Für jede Ionenart, die durch eine Ionenpumpe befördert wird, muss im Ersatzschaltbild eine Stromquelle (im Schaltbild zwei ineinander greifende Kreise) parallel hinzugefügt werden. Da die Förderrichtungen für  $K^+$ - und  $Na^+$ -Ionen entgegengesetzt verlaufen, fließen auch die einzelnen Ströme in entgegengesetzten Richtungen.

der Ionenüberschuss einer Ionenart auf **einer** der Membranseiten vorhanden ist. Damit wirken sie dem Konzentrationsabbauenden Diffusionsstrom durch die Ionenkanäle entgegen. Die Ionen, die durch Diffusion durch die Ionenkanäle, die Membran durchqueren, werden mit Hilfe der Ionenpumpe wieder zurück transportiert. Elektrisch gesehen stellt somit eine Ionenpumpe eine Stromquelle dar. In Abbildung 6 ist eine Ionenpumpe dargestellt, die zum einen  $K^+$ -Ionen in den Intrazellulärraum transportiert und gleichzeitig  $Na^+$ -Ionen in den Außenbereich der Zelle befördert. Wir berücksichtigen dies im Ersatzschaltbild, indem wir zwei Stromquellen einzeichnen, eine für  $K^+$ -Ionen und eine für  $Na^+$ -Ionen.

Schließlich müssen wir noch die elektrischen Eigenschaften der Doppellipidschicht untersuchen. Wie bereits angemerkt wurde, können sich die Ionen auf der Oberfläche der Doppellipidschicht gut bewegen. Die Doppellipidschicht selbst ist für die Ionen undurchlässig; sie stellt einen elektrischen Isolator dar. Solch eine Anordnung, aus zwei leitenden Elektroden (die Ober- und Unterseite der Doppellipidschicht), die durch einen Isolator getrennt sind, entspricht im Ersatzschaltbild einem Kondensator mit der Kapazität  $C_M$ . Typische Werte für die Membrankapazität  $C_M$  eines Neurons liegen bei etwa  $1 \mu F/cm^2$ .

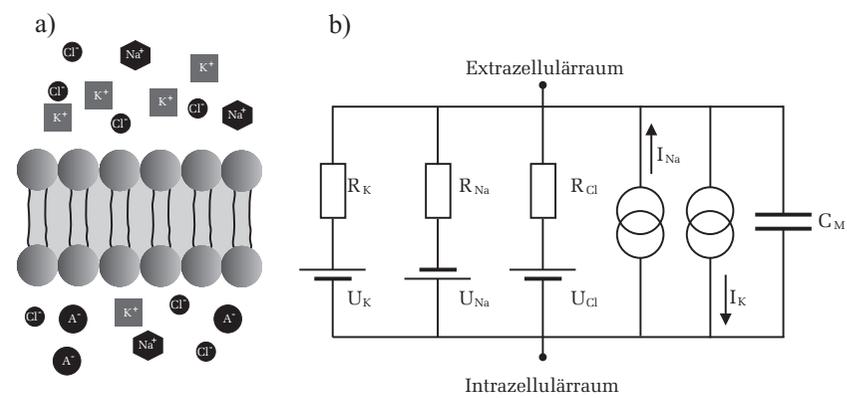


Abbildung 7: Der Membranbereich, der allein aus der nichtleitenden Doppellipidschicht besteht, wird im Ersatzschaltbild durch eine Kapazität beschrieben.

In Abbildung 7 ist das gesamte Ersatzschaltbild eines Membranabschnitts dargestellt. Auf den ersten Blick scheint dieses recht kompliziert zu wirken. Allerdings kann dies durch weitere Überlegungen noch vereinfacht werden: Nach dem Theorem von Thévenin, auf das hier nicht näher eingegangen werden soll, kann eine Stromquelle auch durch eine Spannungsquelle und einen zusätzlichen Serienwiderstand beschrieben werden. Weiterhin können alle Spannungsquellen und Widerstände (und somit auch die Stromquellen) zu einer Gesamtspannungsquelle und einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Ist man zudem nur an den passiven Eigenschaften der Membran interessiert, so kann auch die Spannungsquelle vernachlässigt werden. Die Spannungsquelle hat nur Einfluss auf den Absolutwert der Membranruhespannung. Diese ist aber für die passiven Eigenschaften völlig belanglos. Die passiven Eigenschaften eines Membranabschnitts können also allein durch einen Widerstand  $R_M$  und einen parallel geschalteten Kondensator  $C_M$  beschrieben werden (Abbildung 8a).

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf einen Membranabschnitt des Axons. Sollen größere Bereiche eines Axons untersucht werden, so müssen auch Längswiderstände berücksichtigt werden. Das Ersatzschaltbild eines längeren Membranabschnitts ist in Abbildung 8b dargestellt. Mehrere RC-Glieder sind durch Längswiderstände, die die Leitfähigkeit der Ionen berücksichtigen, parallel geschaltet.  $R_L^e$  stellt den Widerstand im extrazellulären Raum dar. Der Wert für  $R_L^i$  ist in der Regel sehr klein und kann daher

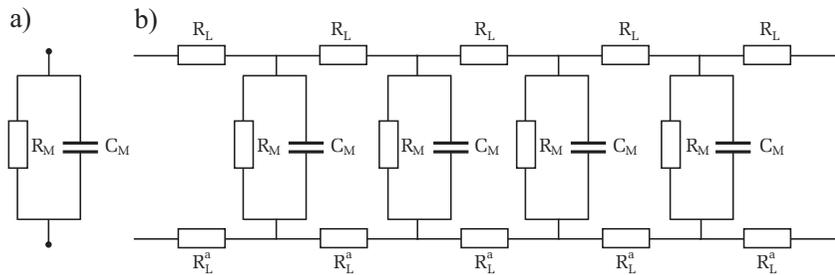


Abbildung 8: Links: Ersatzschaltbild zur Beschreibung der passiven Eigenschaften eines Membranabschnitts. Rechts: Für längere Membranabschnitte müssen zusätzlich noch Längswiderstände, die die Leitfähigkeit der Ionen entlang der Membran wiedergeben, berücksichtigt werden. Aus Symmetriegründen wurden hier Längswiderstände sowohl im Extra- als auch im Intrazellulärraum eingezeichnet.

vernachlässigt werden. Der Widerstand  $R_L$  des cytoplasmatischen Innenraums ist dagegen nicht zu vernachlässigen. Er hängt von der Querschnittsfläche des Axons und vom spezifischen Widerstand des Cytoplasmas ab.

### Ausbreitung eines Signals entlang eines Axons

Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich das Membranpotential  $U(x, t)$  entlang eines Axons mit der Entfernung und der Zeit ändert, wenn man an einer Stelle einen Strom injiziert. Dabei beschränken wir uns wieder auf die passiven Membraneigenschaften, d.h. signalverstärkende Mechanismen, wie z.B. spannungsgesteuerte Ionenkanäle, werden nicht berücksichtigt.

Die Behandlung dieses Problems ist mathematisch sehr aufwendig und wird daher hier nicht analytisch durchgeführt. Wir wollen jedoch die Ergebnisse anhand einiger Grafiken diskutieren.

Nehmen wir zunächst an, dass am Anfang des Axons bei  $x = 0$ , bzw. am Eingang (Knoten 0) unseres Ersatzschaltbilds, eine rechteckförmige Reizspannung  $U_0$  angelegt wird. Der Spannungsverlauf  $U(x, t)$  entlang des Axons (bzw. analog an den Knotenpunkten im Ersatzschaltbild) ist im mittleren Teil in Abbildung 9 an vier unterschiedlichen Orten skizziert. Den Bildern kann man entnehmen, dass mit zunehmendem Abstand von der Einkopplungsstelle, die Signale immer stärker gedämpft werden und der Signalanstieg immer langsamer verläuft.

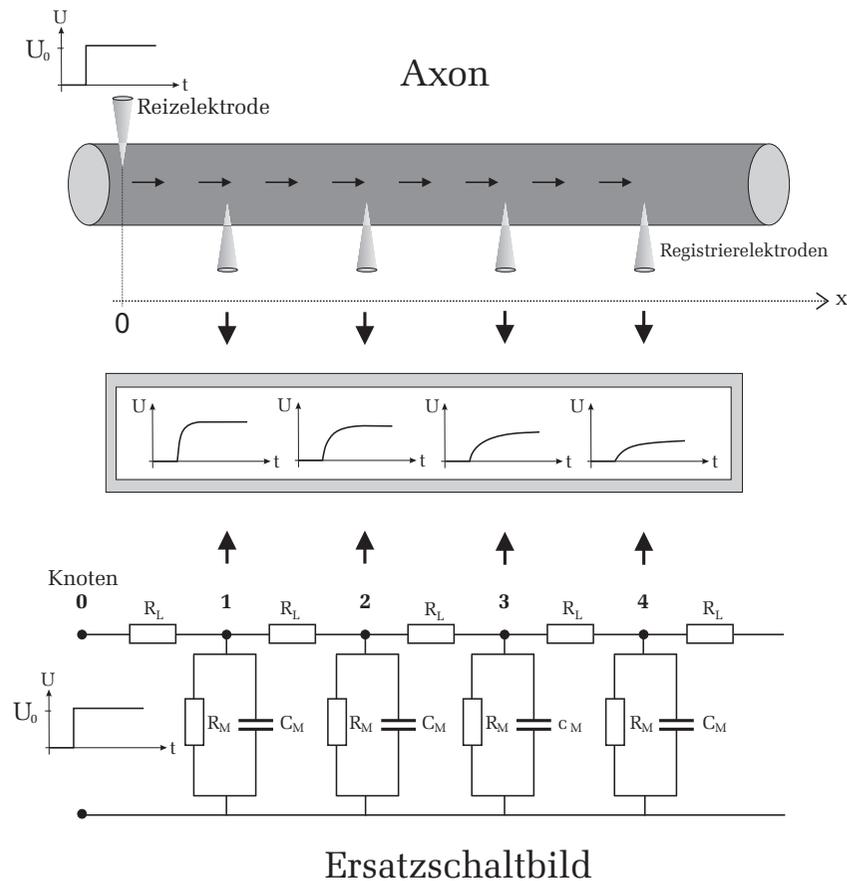


Abbildung 9: Oben: Ausbreitung eines Reizes entlang eines Axons. Bei  $x = 0$  wird ein rechteckförmiges Reizsignal in den Axon eingespeist. Die Ausbreitung dieses Signals wird mit Hilfe von Registrierelektroden gemessen. Unten: Elektrisches Ersatzschaltbild. Das Reizsignal wird hier am Eingang (Knoten 0) eingekoppelt. Der zeitliche Verlauf des sich ausbreitenden Signals wird an den verschiedenen Knoten untersucht. Mitte: Qualitativer Signalverlauf an unterschiedlichen Orten als Funktion der Zeit.

Eine exakte Berechnung dieser Signalverläufe ist in Abbildung 10 zu sehen. Die linke Abbildung zeigt den Signalverlauf an unterschiedlichen Orten des Axons (oder analog an den Knoten im Ersatzschaltbild) als Funktion der Zeit. Die einzelnen Kurven zeigen alle ein ähnliches Verhalten. Beim Einschalten des rechteckförmigen Reizes zum Zeitpunkt  $t = 0$  (gepunktete Kurve), steigen auch die an den verschiedenen Orten anliegenden Spannungen an. Mit zunehmender Zeit wird die Steigung der Signale immer geringer bis schließlich ein zeitlich konstantes Spannungsniveau  $\hat{U}$  (Gleichgewichtsspannung) erreicht wird. Diese Gleichgewichtsspannung fällt mit zunehmendem Abstand vom Ort der Anregung rasch ab. Eine genauere Analyse zeigt, dass die Gleichgewichtsspannung exponentiell mit dem Abstand  $x$  abfällt (Abbildung 10 Rechts):

$$\hat{U}(x) = U_0 e^{-x/\lambda}, \tag{5}$$

wobei hier  $\hat{U}$  die Gleichgewichtsspannung bezeichnet und  $\lambda$  die sogenannte Längskonstante darstellt.

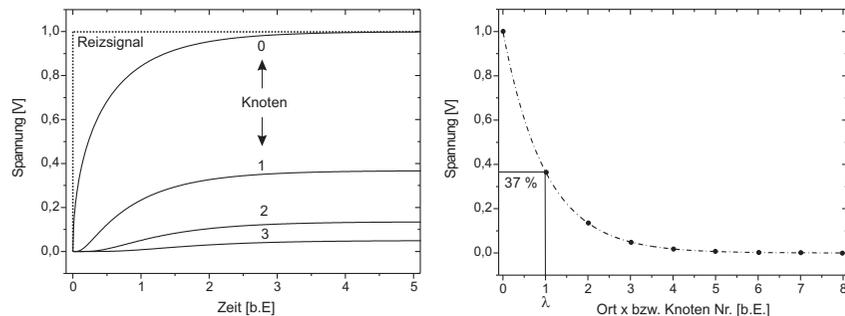


Abbildung 10: Links: Auf dem Ersatzschaltbild basierte Rechnungen des Spannungsverlaufs an unterschiedlichen Orten (Knoten). Für große Zeiten ändern sich die Spannungen nicht mehr. Diese zeitlich konstanten Spannungen werden im Folgenden als Gleichgewichtsspannungen  $\hat{U}$  bezeichnet. Die Abkürzung b.E. steht für „beliebige Einheit“. Rechts: Die Gleichgewichtsspannung fällt mit zunehmenden Abstand exponentiell ab. Der Ort  $\lambda$ , bei dem die Spannung auf 37% des Ursprungswertes abgesunken ist, heißt Längskonstante (hier zufällig am Knoten 1).

Die Längskonstante ist die Entfernung von der Strominjektionsstelle zu dem Ort auf dem Axon, an dem  $\hat{U}$  auf den 1/e-ten Teil bzw. auf 37 % seines Ursprungs-

wertes abgefallen ist. Sie hängt nur von den Längs- und Membranwiderständen ab. Eine genaue Rechnung für  $\lambda$  ergibt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\tilde{R}_M}{\tilde{R}_L}}. \tag{6}$$

Die beiden Widerstände  $\tilde{R}_L$  und  $\tilde{R}_M$  wurden hier mit einer Tilde gekennzeichnet, da diese bei einem realen Axon von dessen Geometrie abhängen.  $\tilde{R}_M$  und  $\tilde{R}_L$  sind daher längenspezifische Widerstände:  $\tilde{R}_M$  ist der Membranwiderstand einer Längeneinheit des Axons und  $\tilde{R}_L$  der Längswiderstand des cytoplasmatischen Innenraums pro Längeneinheit. Im Ersatzschaltbild sind die Widerstände  $\tilde{R}_L$  und  $R_L$  bzw.  $\tilde{R}_M$  und  $R_M$  vom Betrag her aber identisch.

Die Längskonstante entspricht der Wurzel aus dem Verhältnis von Membranwiderstand und Längswiderstand. Je größer  $\lambda$  desto geringer ist die Dämpfung eines sich ausbreitenden Reizsignals. Typische Werte für  $\lambda$  sind einige Millimeter, wobei dickere Nerven in der Regel eine größere Längskonstante aufweisen als dünne Axone.

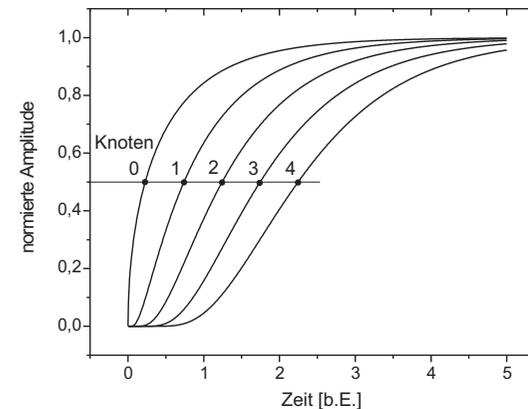


Abbildung 11: Normierter Spannungsverlauf an unterschiedlichen Orten des Axons (bzw. unterschiedliche Knoten im Ersatzschaltbild).

Wie wir gesehen haben, hängt die Signaldämpfung nur von den beiden Widerständen  $\tilde{R}_L$  und  $\tilde{R}_M$  ab, nicht aber von der Membrankapazität  $C_M$ . Die Membrankapazität hat aber ebenfalls großen Einfluss auf die Reizweiterleitung.

Ihnen ist wahrscheinlich schon in der linken Abbildung 10 aufgefallen, dass neben der Gleichgewichtsspannung auch der Anstieg der Signale (also die Steigung) mit zunehmenden Abstand vom Ort der Einkoppelung immer geringer wird. Allerdings ist dies wegen des exponentiellen Abfalls der Gleichgewichtsspannung nur qualitativ zu erkennen. Für eine quantitative Untersuchung ist es günstiger die einzelnen Spannungsverläufe auf die jeweilige Gleichgewichtsspannung zu normieren (d.h. wir skalieren die einzelnen Kurven so, dass sie den gleichen relativen Spannungsbereich überdecken). Das Gleiche machen Sie übrigens auch, wenn Sie die Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop messen. Durch Variieren der y-Ablenkung werden die Signale so eingestellt, dass sie möglichst den ganzen vertikalen Bildschirm ausnutzen. Damit normieren Sie die Signale auf den Schirmbereich des Oszilloskops. Wie Sie Abbildung 11 entnehmen können, erfolgt der Spannungsanstieg an weiter vom Ort der Reizeinkopplung gelegenen Punkten später als an nähergelegenen. Dieser Sachverhalt unterliegt sogar einer einfachen Gesetzmäßigkeit: Misst man die Zeit an einem Ort des Axons (bzw. an einem Knoten im Ersatzschaltbild), die vergeht, bis die dort anliegende Spannung gerade die Hälfte der Gleichgewichtsspannung erreicht hat und trägt darüber den Ort bzw. die Knoten- Nummer auf, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung  $v$ . Zu Erkennen ist dies in Abbildung 11 darin, dass die Halbwertszeiten der Signale benachbarter Knoten den gleichen Abstand voneinander aufweisen. Mit Hilfe einiger mathematischen Überlegungen kann man eine Art Leitungsgeschwindigkeit  $v$  einführen:

$$v = \frac{\lambda}{\tau_M} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{R}_L \tilde{R}_M C_M^2}}, \tag{7}$$

wobei für die Zeitkonstante  $\tau_M = \tilde{R}_M C_M$  gilt. Die Leitungsgeschwindigkeit eines Reizes hängt demnach von beiden Widerständen und von der Membrankapazität ab. Um eine hohe Geschwindigkeit der Signalausbreitung zu erzielen, muss demnach die Längskonstante  $\lambda$  möglichst groß und die Zeitkonstante  $\tau$  möglichst klein sein.

### Frequenzverhalten von RC-Gliedern

Bisher haben wir nur das Verhalten von RC-Gliedern im Zeitbereich untersucht. Um das Verhalten von Kondensatoren in Wechselstromkreisen zu verstehen, soll im Folgenden untersucht werden, wie ein RC-Glied auf eine sinusförmige Anregung reagiert.

Betrachten wir zunächst die Schaltung in Abbildung 12. Zwei in Serie geschaltete Widerstände sind an einer Wechselspannungsquelle  $U_E(t) = \hat{U}_E \sin \omega t$  angeschlossen. Dabei steht  $\hat{U}_E$  für die Amplitude und  $\omega = 2\pi f$  für die Kreisfrequenz der Wechselspannung. Für die Spannung, die am Widerstand  $R_2$  abfällt, folgt nach dem ohmschen Gesetz:

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_E(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \hat{U}_E \sin \omega t. \tag{8}$$

An  $R_2$  fällt demnach eine Spannung ab, die die gleiche Frequenz und Phase aufweist wie die Eingangsspannung  $U_E(t)$ . Allerdings ist die Amplitude um den Faktor  $R_2/(R_1 + R_2)$  geringer als  $\hat{U}_E$ . Sind beispielsweise die Widerstände gleich groß, so misst man an  $R_2$  nur die Hälfte der Amplitude der Eingangsspannung. Die Amplitude hängt aber nicht von der Frequenz ab!

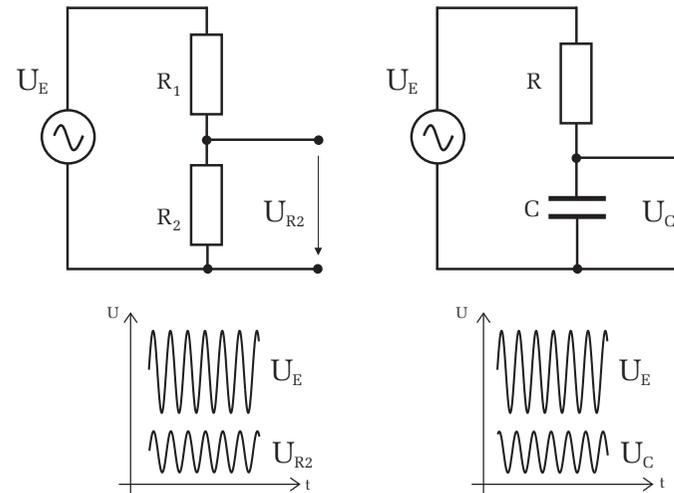


Abbildung 12: Links: Ein- und Ausgangsspannung bei rein ohmschen Widerständen. Beide Spannungen sind phasengleich. Die Amplitude der Ausgangsspannung hängt nur von den beiden Widerstanswerten ab. Rechts: Bei einem kapazitiven Widerstand (Kondensator) kommt es zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung zu einer Phasenverschiebung. Zudem hängt die Amplitude der Ausgangsspannung von der Frequenz ab.

Wir ersetzen nun den Widerstand  $R_2$  durch einen Kondensator der Kapazität  $C$

und interessieren uns wiederum für die Spannung  $U_C$  die am Kondensator abfällt. Eine mathematische Behandlung dieses Problems liefert:

$$U_C = \hat{U}_C(\omega) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U}_E}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (9)$$

Die Spannung  $U_C$  hat demnach die gleiche Frequenz wie die Eingangsspannung  $U_E$ . Allerdings tritt hier zusätzlich eine Phasenverschiebung  $\varphi$  auf, die zudem von der Frequenz abhängt. Eine weitere wichtige Eigenschaft lässt sich aus dem Vorfaktor ablesen. Im Gegensatz zu der Schaltung mit den beiden Widerständen ist die Amplitude beim RC-Glied frequenzabhängig. Für kleine Frequenzen, d.h.  $\omega \rightarrow 0$ , nimmt der Nenner den Wert Eins an. Die Amplitude  $\hat{U}_C$  entspricht dann gerade der Amplitude  $\hat{U}_E$  des Eingangssignals. Für größere Frequenzen wird die Amplitude immer geringer und geht für  $\omega \rightarrow \infty$  schließlich gegen Null. Das RC-Glied verhält sich wie ein Tiefpassfilter. Nur **tiefe** Frequenzen können den Filter **passieren**, höhere Frequenzen werden entsprechend stark gedämpft (Abbildung 13).

Vertauscht man den Kondensator mit dem Widerstand und misst die Spannung  $U_R$  über dem Widerstand so zeigt das RC-Glied ein Hochpassverhalten:

$$U_R = \hat{U}_R(\omega) \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U}_E}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

Entsprechend werden beim Hochpassfilter tiefe Frequenzen stark gedämpft, während hohe Frequenzen nicht unterdrückt werden.

Um die Wirkung eines Filters, d.h. dessen Bandbreite zu quantifizieren, definiert man die Grenzfrequenz

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}. \quad (11)$$

Durch Einsetzen von  $\omega_g$  in Gleichung (9) bzw. Gleichung (10) erkennt man, dass bei der Grenzfrequenz die Amplitude auf das  $1/\sqrt{2}$ -fache abgefallen (Tiefpass), bzw. angestiegen ist (Hochpass).

## VII Durchführung des Versuchs

### 1. Lade- und Entladeverhalten eines RC-Glieds

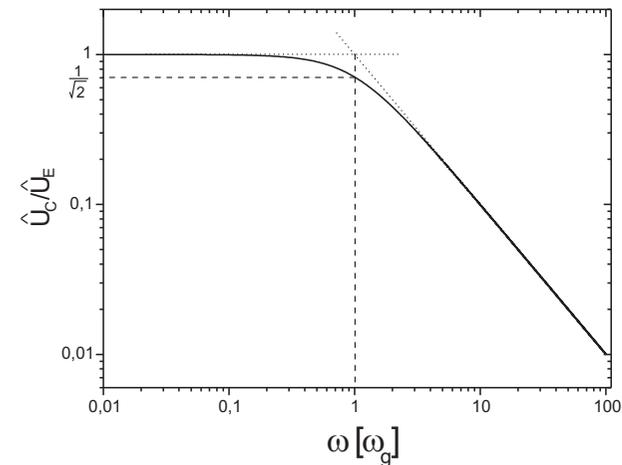


Abbildung 13: Frequenzgang eines Tiefpassfilters. Aufgetragen ist das Verhältnis der Amplitude am Kondensator zur Amplitude der Eingangsspannung über die Frequenz in Einheiten der Grenzfrequenz  $\omega_g$ . Beachten Sie den logarithmischen Maßstab beider Achsen. Die Grenzfrequenz ergibt sich in dieser Auftragung aus dem Schnittpunkt der Verlängerung (gepunktete Geraden) der linearen Bereiche bei kleinen und großen Frequenzen.

Bauen Sie mit Hilfe der Steckelemente (Widerstände, Kondensatoren und Verbindungsleitungen) die Schaltung nach Abbildung 14 auf dem Steckbrett auf. Einige Buchsen des Steckbretts sind bereits intern miteinander elektrisch verbunden. Diese Verbindungen sind auf der Oberfläche des Steckbrettes durch schwarze Linien zwischen den Buchsen markiert.

Verbinden Sie nun den Ausgang des Funktionsgenerators mit Ihrer Schaltung. Beachten Sie dabei, dass das schwarze Kabel an Masse (Symbol  $\perp$  im Schaltbild) angeschlossen wird und das rote an den Widerstand. Zur Darstellung der Signale verwenden wir ein Oszilloskop. Schließen Sie den Ausgang  $U_C$  Ihrer Schaltung an Kanal 2 und das Eingangssignal  $U_E$  an Kanal 1 an. Beachten Sie auch hier wieder, dass das schwarze Kabel an Masse angeschlossen wird.

Drücken Sie am Funktionsgenerator die Taste für die Signalform „Rechteck“. Die Frequenz müssen Sie bei jeder Messung so einstellen, dass Sie am Oszilloskop den gesamten Lade- bzw. Entladevorgang beobachten können ( $f \ll \tau$ ).

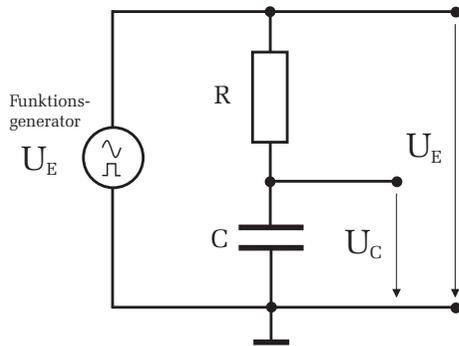


Abbildung 14: Schaltung zum Lade- und Entladeverhalten eines RC-Glieds.

Messen Sie für die folgenden drei RC-Kombinationen die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  des Lade- oder Entladevorgangs und skizzieren Sie für eine RC-Kombination den Spannungsverlauf des Lade- **und** Entladevorgangs:

- C=100 nF, R=4,7 kΩ
- C=10 nF, R=4,7 kΩ
- C=10 nF, R=47 kΩ.

Vertauschen Sie für eine RC- Kombination den Kondensator mit dem Widerstand und skizzieren Sie den Spannungsverlauf  $U_R$  über dem Widerstand der beim Laden **und** Entladen des Kondensators auftritt.

**2. Ersatzschaltbild der Membran eines Axons**

Bauen Sie die Schaltung nach Abbildung 15 auf dem Steckbrett auf. Wählen Sie für die Membrankapazität  $C_M=100$  nF und für die Längswiderstände  $R_L=1$  kΩ. Die Membranwiderstände sind durch  $R_{M1}$  und  $R_{M2}$  gekennzeichnet. Wählen Sie hierfür zunächst die Widerstände  $R_{M1}$ . Dem letzten Membranwiderstand muss eine besondere Beachtung geschenkt werden: Bei der Behandlung der elektrischen Eigenschaften eines Axons im Kapitel Grundlagen sind wir davon ausgegangen, dass der Axon sehr lang ist. In unserem Ersatzschaltbild besteht dieser aber nur aus sechs Abschnitten. Da die Schaltung abrupt endet und somit keine weitere Signalleitung mehr möglich ist, würden sich die Messungen am letzten Knoten erheblich verfälschen. Wir können dies kompensieren, indem wir annehmen, dass hinter dem letzten Knoten noch viele weitere Membranabschnitte vorhanden sind. Berechnet man von diesen fiktiven Abschnitten den Gesamtwi-

derstand  $R_{M1}^\infty$  und benutzt diesen Wert am letzten Knoten für den Membranwiderstand, so verhält sich die Schaltung an allen Knoten wie ein unendlich langer Axon. Für den letzten Widerstand am Knoten 5 müssen Sie daher den Widerstand  $R_{M1}^\infty$  einsetzen.

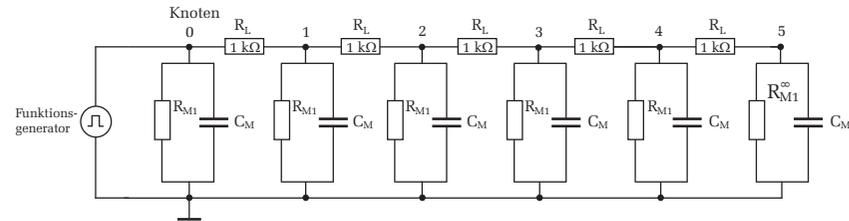


Abbildung 15: Ersatzschaltbild der Membran eines Neurons.

**Messung der Längskonstante  $\lambda$ :**

Schließen Sie dazu den Funktionsgenerator an den Eingang am Knoten 0 Ihrer Schaltung an. Beachten Sie dabei, dass das schwarze Kabel wieder an Masse angeschlossen wird. Im Folgenden sind alle Messungen massebezogen, d.h. wenn Sie den Spannungsverlauf an einem Knoten mit dem Oszilloskop messen, so muss das rote Kabel mit dem entsprechenden Knoten und das schwarze Kabel mit Masse verbunden werden.

Überprüfen Sie, ob am Funktionsgenerator die Signalform noch auf Rechteck eingestellt ist. Die Frequenz und Amplitude müssen Sie am Funktionsgenerator so einstellen, dass Sie zum einen die Signalamplitude am **letzten** Knoten noch gut messen können und zum anderen den gesamten Ladevorgang bis zum Erreichen der Gleichgewichtsspannung (vergleiche Abbildung 10) auf dem Oszilloskopschirm darstellen können. Verbinden Sie dazu den letzten Knoten 5 an Kanal 2 des Oszilloskops und stellen Sie entsprechend die Amplitude und Frequenz ein. An Kanal 1 des Oszilloskops sollten Sie zusätzlich noch das vom Funktionsgenerator kommende Eingangssignal darstellen.

Messen Sie nun ausgehend vom letzten Knoten die Gleichgewichtsspannung an allen Knoten Ihrer Schaltung (Knoten 5 bis Knoten 0). Nutzen Sie dabei, wenn möglich, den gesamten vertikalen Bildschirm des Oszilloskops aus und vergewissern Sie sich, dass der Einstellknopf für die y-Ablenkung auf „calibriert“ steht. Fertigen Sie in Ihr Protokollheft eine Skizze der Schaltung an und tragen Sie die Messwerte in eine Tabelle ein, die die Größen: Knoten-Nr., Frequenz am Funktionsgenerator, Gleichgewichtsspannung und den Ablesefehler der Gleich-

gewichtsspannung dokumentiert.

Ersetzen Sie nun die Membranwiderstände  $R_{M1}$  durch die Widerstände  $R_{M2}$  und  $R_{M2}^\infty$  und wiederholen Sie die Messung für diese Widerstandswerte.

Abschließend sollen Sie noch qualitativ verifizieren, dass die Gleichgewichtsspannung nach Gleichung (5) und Gleichung (6) unabhängig von der Membrankapazität ist. Entfernen Sie alle Membrankapazitäten und vergleichen Sie die Gleichgewichtsspannung mit den zuvor gemessenen Werten. Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse mit einigen Sätzen in Ihrem Protokollheft.

### 3. Frequenzverhalten von RC-Gliedern: Tiefpassfilter

Für die Messung des Frequenzverhaltens von RC-Gliedern bauen Sie wieder die Schaltung nach Abbildung 14 auf. Wählen Sie für  $R=4,7\text{ k}\Omega$  und für  $C=100\text{ nF}$ . Schalten die Signalform am Funktionsgenerator auf Sinus und stellen Sie die Amplitude  $\hat{U}_E$  auf einen glatten Wert (z.B.  $4\text{ V}_{SS}$ ) ein. Messen Sie nun mit dem Oszilloskop die Amplitude der Spannung über dem Kondensator als Funktion der Frequenz. Fertigen Sie am besten eine Tabelle mit den Spalten: Frequenz, Amplitude am Kondensator  $\hat{U}_C$  mit Fehlerangabe und das Verhältnis  $\hat{U}_C/\hat{U}_E$ . Beginnen Sie Ihre Messung bei kleinen Frequenzen und erhöhen Sie diese in selbst zu wählenden Schritten bis etwa  $10\text{ kHz}$  (mindestens 10 Messwerte).

doppelt- logarithmischen Papier (2 auf 4 Dekaden) über die Frequenz auf. Bestimmen Sie hieraus die Grenzfrequenz und vergleichen Sie diesen Wert mit dem theoretisch zu erwartenden Wert.

## VIII Auswertung

### Zu Aufgabe 1:

Berechnen Sie aus den gemessenen Halbwertszeiten die Zeitkonstante  $\tau$  und tragen Sie die Ergebnisse in einer zusammenfassenden Tabelle ein. Die Tabelle soll die Größen  $C$ ,  $R$ ,  $f$ ,  $\tau_{\text{exp.}}$ ,  $\tau_{\text{theo.}}$  enthalten.

Interpretieren Sie den Spannungsverlauf von  $U_R$ . Aus welchem Grund entspricht der Verlauf dem Ladestrom ?

### Zu Aufgabe 2:

Tragen Sie die gemessenen Gleichgewichtsspannungen für die Membranwiderstände  $R_{M1}$  und  $R_{M2}$  in ein halblogarithmisches Diagramm über die Knotennummer auf. Sie erhalten bei dieser Auftragung eine Gerade. Berechnen Sie aus der jeweiligen Steigung die Längskonstante  $\lambda$  unter Berücksichtigung der Fehler.

Bestimmen Sie mit Hilfe der beiden Werte für  $\lambda$  die Werte für die Membranwiderstände  $R_{M1}$  und  $R_{M2}$ .

### Zu Aufgabe 3

Tragen Sie das Verhältnis  $\hat{U}_C/\hat{U}_E$  gemäß Abbildung 13 in ein Diagramm auf