

Universität Heidelberg
Physikalisches Praktikum I für
Studierende der Molekularen Biotechnologie
Ausgabe 11. Dezember 2024



Inhaltsverzeichnis

Grundlagen	2
Versuch 11 Einführung	13
Versuch 22 Bestimmung der Elementarladung nach Millikan	19
Versuch 41 Temperaturmessung.	23
Versuch 42 Wärmekapazität	31
Grundlagen der Radioaktivität	38
Versuch 251 Statistik und Halbwertszeit des radioaktiven Zerfalls.	46
Versuch 254 Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen	56

Grundlagen

I Vorbemerkung

Dieses Praktikum verfolgt hauptsächlich drei Ziele:

1. Sie lernen den Umgang mit physikalischen Messgeräten und Messapparaturen.
2. Kenntnisse, die Sie bereits erworben haben (oder noch erwerben werden) sollen durch die Überprüfung im Experiment gesichert werden.
3. Das Führen eines Protokolls.

Zu diesem Zweck enthält das Praktikum Versuche mit überschaubarer Theorie und einfachen Messapparaturen, deren Funktionsweise leicht einzusehen ist. Natürlich ist damit nicht die Messgenauigkeit aufwendiger Apparaturen, wie sie in der Forschung verwendet werden, erreichbar. Das Ziel des Praktikums sind weniger präzise Ergebnisse, sondern Sie sollen lernen, die Einflüsse, die die Messgenauigkeit begrenzen, zu erkennen und einzuschätzen. Aus diesem Grund sollen bei der Auswertung die Ergebnisse stets mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

Lesen Sie bei der Versuchsvorbereitung die Versuchsanleitung genau durch und überlegen Sie, was bei der Versuchsdurchführung und Auswertung gemacht werden soll, welche Messwerte Sie brauchen, usw. Nur so können Sie zügig messen und vermeiden unnötige Mehrarbeit durch Fehler beim Auswerten.

Gestalten Sie die Auswertung übersichtlich und kennzeichnen Sie alle Angaben so, dass man sofort erkennen kann, worum es sich handelt (z.B.: „aus der Zeichnung abgelesen:“, „Literaturwert:“, „Mittelwert der Messreihe:“). Endergebnisse werden stets zusammen mit ihrem Fehler angegeben und besonders kenntlich gemacht, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Es ist unsinnig, den Fehler mit mehr als zwei Stellen anzugeben; das Ergebnis soll bis auf maximal zwei ungenaue Stellen angegeben werden (s.u.).

Bei graphischen Darstellungen von Messwerten ist folgendes zu beachten:

- Die graphische Darstellung erfolgt grundsätzlich auf Millimeterpapier bzw. Logarithmenpapier.

- Richtige Größe wählen. Nutzen Sie wenn möglich den vollen Bereich des mm-Papiers bzw. Logarithmenpapiers.
- Bei jeder Achse Messgröße und Maßeinheit angeben (Bsp.: T in °C, T [°C], T/°C).
- Um sich das Eintragen der Messpunkte zu erleichtern, empfiehlt es sich eine sinnvolle Achseneinteilung zu wählen (z.B. 1 °C=0,5 cm oder 1 cm oder 2 cm zu wählen und nicht 1 °C=0,4 cm oder 2,5 cm)
- Verbinden Sie beim Zeichnen von Kurven nicht einfach die Punkte miteinander („Malen nach Zahlen“), sondern versuchen Sie die Streuung der Messwerte auszugleichen.
- Befinden sich mehrere Kurven in einem Diagramm, so sind die einzelnen Kurven und Messwerte zu kennzeichnen (Legende hinzufügen).
- Jede Zeichnung, Tabelle und Diagramm muss mit einer Text-Überschrift versehen werden.

II Vorbereitung

Um das Praktikum effizient durchzuführen, ist eine gründliche Vorbereitung notwendig. Es ist nicht in Ihrem Interesse die Versuche „starr“ nach Anleitung abzuarbeiten, ohne zu verstehen was Sie überhaupt praktizieren. Die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum setzt voraus, dass Sie ein entsprechendes Kenntnisniveau der mit den Versuchen verknüpften Physik besitzen. Ob diese Kenntnisse aus Ihrem Fundus oder aus Ihrer Vorbereitung stammen, ist natürlich belanglos. Informieren Sie sich vor Beginn der Versuchsdurchführung, über die Stichpunkte, die bei den jeweiligen Versuchen unter dem Kapitel „Vorbereitung“ aufgelistet sind. Dabei reicht das alleinige Studium der Praktikumsanleitung keinesfalls aus. **Die Praktikumsanleitung ist kein Lehrbuch!** Zu jedem Versuch sind daher zusätzlich Literaturempfehlungen angegeben. Bei den meisten Versuchen ist es vollkommen ausreichend, wenn Sie sich mit Hilfe der Standardwerke (Walcher, Gerthsen, Bergmann-Schäfer, etc.) auf die Versuche vorbereiten.

Um Ihnen die Vorbereitung zu erleichtern, sind neben den Stichpunkten zusätzlich noch Fragen in der Praktikumsanleitung aufgelistet.

Eine Versuchsdurchführung ohne ausreichende Vorbereitung ist klarerweise ohne Lerneffekt und nicht sinnvoll. Die Praktikantin oder der Praktikant muss in diesem Fall damit rechnen, nach Hause geschickt zu werden und den Versuch zu einem späteren Zeitpunkt zu wiederholen.

Die folgenden Punkte fassen das Basiswissen zusammen, über das Sie bei den Versuchen verfügen sollten:

1. Mathematische Voraussetzungen - elementare Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponential-Funktion - elementares Differenzieren und Integrieren - gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung/Kraftgesetz, Gleichung des natürlichen Wachstums.
2. Statistik und Fehler - Mittelwert, Standardabweichung, statistische und systematische Fehler, Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung, Gauß-Verteilung.
3. Die 7 Basiseinheiten des SI-Systems : m, kg, s, A, K, mol, Cd.
4. Mechanik - Newtonschen Gesetze; Kräfteparallelogramm - Erhaltungssätze für Translation und Rotation (Energie, Impuls, Drehimpuls) - Drehmoment, Trägheitsmoment u. Steinerscher Satz - Hooksches Gesetz - Resonanzkurve - Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators und typische Lösungen - Schallgeschwindigkeit, longitudinale und transversale Schwingungen.
5. Elektrizitätslehre - Elementarladung und Ladungserhaltung; Faraday-Konstante, Avogadrokonstante, Stoffmenge - Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, spezifischer Widerstand - Messbereichserweiterung von Messinstrumenten - Kondensator, Kapazität - Herleitung Kondensatorentladung, Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld.
6. Optik - Reflexions- und Brechungsgesetz - Abbildung mit Linsen (geometrische Bildkonstruktion, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab) - kontinuierliche und Linienspektren (qualitatives Verständnis) - Auflösungsvermögen optischer Instrumente.
7. Wärmelehre - Wärme, Zustandsgrößen (Temperatur, innere Energie,...), Zustandsgleichung des idealen Gases - 1. und 2. Hauptsatz, Wärmebilanz,

spezifische Wärme, Phasendiagramm, Dampfdruck - Van-der-Waals-Gleichung realer Gase, Verlauf der Isothermen im $p(V)$ -Diagramm, Gesetz von Dulong-Petit, Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz, Clausius-Clapeyron Gleichung.

Die Kenntnis dieses Basiswissens erspart natürlich nicht das sorgfältige Durcharbeiten der Anleitung und die Vorbereitung der anderen Kapitel im Skript. Insbesondere sollten Sie sich bei der Vorbereitung auch schon über die Versuchsdurchführung, die Messmethoden und über die Auswertung Gedanken machen. Machen Sie sich bewusst, was und wie Sie messen werden und schätzen Sie ab, welchen Einfluss die Fehler der Einzelmessungen auf den Gesamtfehler haben (Bsp.: eine quadratische Größe geht mit doppeltem Gewicht ein als eine lineare).

III Durchführung der Versuche

Sehen Sie sich die Apparatur gründlich an und machen Sie sich mit der Funktion aller Einzelteile vertraut. Spielen Sie die Messprozedur nach Möglichkeit zunächst qualitativ durch. Wenn Sie eine elektrische Schaltung herzustellen haben, kontrollieren Sie zunächst selbst sorgfältig, ob Sie keine Schaltfehler gemacht haben. **Vor Anlegen der Spannung muss die Schaltung vom Assistenten abgenommen werden.** Das Protokoll wird auch während der Messungen lückenlos geführt, d.h. man soll keine großen Zwischenräume für spätere Eintragungen lassen. Lassen Sie sich Zeit zum Führen eines ordentlichen Protokolls.

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsaufbaus: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung. Im Einzelnen soll das Protokoll enthalten:

1. Überschrift und Versuchsnummer.
2. Einleitung: Formulierung der theoretischen Grundlagen, sowie physikalischer Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis des Versuchs erforderlich sind.

3. Das Protokoll muss so ausgelegt sein, dass Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann, dann die für den Versuch nötigen Umformungen. Damit man den Einfluss der Fehler der gemessenen Größen auf das Versuchsergebnis leichter übersehen kann, ist es zweckmäßig, die Formeln auf die Form

V Versuchsergebnis = Funktion der direkt gemessenen Größen

zu bringen. Alle Abkürzungen, die in den Formeln vorkommen, müssen erklärt sein, evtl. mit Hilfe der Skizze der Apparatur. Diesen Teil des Protokolls schreiben Sie am besten schon zu Hause bei der Vorbereitung.

4. Skizze und Beschreibung der Versuchsanordnung (schematisch, Schaltplan bei elektrischen Schaltungen).
5. Knappe aber vollständige Angaben über das Messverfahren, soweit dies nicht völlig selbstverständlich ist. Das Protokoll muss selbsterklärend sein!
6. Präsentieren Sie Ihre Messergebnisse in Form von Tabellen und Diagrammen, die klar und ausreichend beschriftet sein müssen. Kommentieren Sie diese mit einigen einleitenden Sätzen.
7. Führen Sie nach Möglichkeit eine vorläufige Auswertung unmittelbar nach der Messung durch.
8. Bei der Auswertung müssen alle Zwischenrechnungen im Protokollheft ausgeführt werden. Vergleichen Sie, soweit vorhanden, Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten. Bei der Fehlerabschätzung berücksichtigen Sie nur die Faktoren, die Sie quantitativ kennen, also im allgemeinen die zufälligen Fehler und die mutmaßliche Genauigkeit der Eichung der Instrumente. **Es genügt vollständig, sich auf die Faktoren zu beschränken, die die Messgenauigkeit hauptsächlich begrenzen.** Wenn Sie glauben, dass bei dem Versuch systematische Fehler auftreten, die Sie nicht quantitativ erfassen können, machen Sie hierüber eine kurze Bemerkung. Achten Sie darauf, dass Sie alle zur Auswertung nötigen Angaben aufgeschrieben haben (z.B. Barometerstand, Zimmertemperatur, etc.).
9. Zusammenfassung und kritische Diskussion. Fassen Sie am Schluss der Auswertung den gesamten Versuch mit einigen kurzen Sätzen zusammen. Gehen Sie dabei auf die physikalische Fragestellung ein, das Messprinzip, die

Messergebnisse und Fehler. Setzen Sie sich kritisch mit dem Versuch auseinander. Gibt es Möglichkeiten den Versuchsaufbau oder das Messprinzip zu verbessern? Gibt es Möglichkeiten die Fehler zu minimieren?

IV Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung

Jede Messung kann nur mit einer begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden. Zwei unabhängige Messungen werden daher unterschiedliche Ergebnisse liefern. Damit das Resultat einer Messung aussagekräftig ist, reicht es nicht aus nur den Zahlenwert des Messergebnisses anzugeben, sondern es muss auch eine Aussage über die Messgenauigkeit gemacht werden. Dies geschieht z.B durch die Angabe eines Intervalls $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ bzw.

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

innerhalb dessen der „wahre Wert“ mit einer bestimmten, anzugebenen Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel:

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel ergab folgendes Resultat:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Die erste Zahlenangabe entspricht der besten Schätzung des „wahren Wertes“. Die zweite Zahl ist die Messgenauigkeit, die man häufig auch den „Fehler“ des Messergebnisses nennt. Das Wort „Fehler“ darf nicht falsch interpretiert werden. Diese Angabe gibt nicht etwa den Betrag an, um den das Messergebnis falsch ist, sondern stellt ein Unsicherheitsbereich dar, in dem der „wahre Wert“ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, werden wir an späterer Stelle diskutieren. Das Resultat der Messung ist dann wie folgt zu interpretieren:

Als beste Schätzung für die Erdbeschleunigung wurde ein Wert von $9,81 \text{ m/s}^2$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Intervall $9,78 \text{ m/s}^2 \dots 9,84 \text{ m/s}^2$.

Beachten Sie, dass es bei der Angabe des Messergebnisses und der Messunsicherheit keinen Sinn macht beliebig viele Nachkommastellen anzugeben

(Taschenrechnerergebnis). Die Angabe

$$g = (9,8114587 \pm 0,0298682) \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

ist sinnlos. Die Messgenauigkeit soll auf eine oder höchstens zwei signifikante Stellen gerundet werden und die letzte signifikante Stelle des Messergebnisses soll der selben Größenordnung entsprechen wie die Messgenauigkeit:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (4)$$

IV.1 Systematische und Statistische Fehler

Bei einer Messung können zwei Arten von Fehlern auftreten: Systematische Fehler und statistische (zufällige) Fehler. Systematische Fehler führen dazu, dass das Messergebnis einseitig vom wahren Wert abweicht. Eine Wiederholung der Messung zeigt immer die gleiche Abweichung. Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“. Im Gegensatz dazu schwanken bei zugrundeliegenden statistischen Fehlern, die Messwerte zufällig. Mal sind sie größer, das andere mal kleiner als der „wahre Wert“.

IV.1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler werden zunächst durch die begrenzte Genauigkeit der Eichung der Instrumente verursacht. Bei Maßstäben und Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit. An vielen Analogmessinstrumenten ist zusätzlich noch eine Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt den relativen Fehler des Messbereichsendwertes an. Wird z.B. mit einem Voltmeter der Klasse 1,5 innerhalb eines Messbereiches von 200 V eine Messung durchgeführt, so beträgt der Fehler 1,5% von 200 V, d.h. 3 V. Bei digitalen Instrumenten wird der Fehler in der Regel durch zwei Größen angegeben. Einen prozentualen Fehler, der sich entweder auf dem Messwert (Angabe *v.M.* = vom Messwert) oder auf den Messbereich (Angabe *v.E.* = vom Endwert) bezieht, sowie eine Fehlerangabe in der Form: $\pm x$ Digits. Die letztere Angabe bedeutet, dass der Messwert um $\pm x$ Einheiten der hintersten Stelle der Anzeige schwanken kann.

Beispiel: Mit einem digitalen Voltmeter mit der Genauigkeitsangabe

$$\pm 1,5\% \text{ v.M.}, \pm 3 \text{ Digits}$$

wird ein Spannung von 12,00 V gemessen. Der absolute Fehler berechnet sich aus 1,5% vom Messwert sowie drei Einheiten der letzten Stelle: 1,5% von 12,00 V und $3 \times 10 \text{ mV} = 180 \text{ mV} + 30 \text{ mV} = 210 \text{ mV}$.

Desweiteren können systematische Fehler auch durch Umwelteinflüsse wie Temperaturdriften, Einkopplung elektrischer Felder (z.B. Netzbrummen) etc. oder aber auch durch grundsätzliche Mängel des Messverfahrens verursacht werden. Z.B. muss bei der Messung an einer hochohmigen Spannungsquelle der Innenwiderstand des Voltmeters berücksichtigt werden (wichtig in Versuch 41 *Temperaturmessung*). Geschieht dies nicht, treten systematische Abweichungen auf.

Für die Abschätzung von systematischen Fehlern lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Es kommt im Einzelfall auf den Scharfsinn und die physikalischen Kenntnisse des Experimentators an. Allerdings können systematische Fehler auch noch nach einer Messung berücksichtigt werden. Sind die Ursachen bekannt, kann das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.

IV.1.2 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Prozesse während des Messprozesses. Ursachen hierfür sind z.B. das Rauschen eines Sensors oder thermodynamische Prozesse. Auch der Experimentator selbst kann eine statistische Fehlerquelle darstellen, da dieser stets die Messwerte aufnehmen, ablesen und interpretieren muss. All dies kann statistischen Schwankungen unterliegen. Z.B. wird man bei einer mehrmaligen Zeitmessung mit einer Stoppuhr aufgrund schwankender Reaktionszeiten verschiedene Ergebnisse erhalten.

Statistische Fehler haben die Eigenschaft, dass die Messergebnisse zufällig um den „wahren Wert“ schwanken. Falls es möglich ist eine Messung mehrmals zu wiederholen, können solche Fehler mit Mitteln der Statistik aus der Streuung der Messwerte ermittelt werden.

Tabelle 1 zeigt ein Beispiel, bei dem eine elektrische Spannung x 20-mal gemessen wurde. Die Messwerte sind in Abbildung 1 eingetragen.

Gesucht ist ein Wert der die beste Schätzung des wahren Wertes darstellt. Mit Hilfe statistischer Überlegungen lässt sich zeigen, dass dieser Bestwert dem arithmetischen Mittelwert entspricht:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (5)$$

Nr.	x [V]						
1	5,070	6	5,039	11	5,053	16	5,038
2	5,073	7	5,043	12	5,054	17	5,058
3	5,031	8	5,034	13	5,078	18	5,040
4	5,024	9	5,034	14	5,071	19	5,071
5	5,034	10	5,079	15	5,050	20	5,051

Tabelle 1: Ergebnisse einer 20-maligen Spannungsmessung.

Dieser Wert ist in Abbildung 1 als waagrechte Linie eingezeichnet.

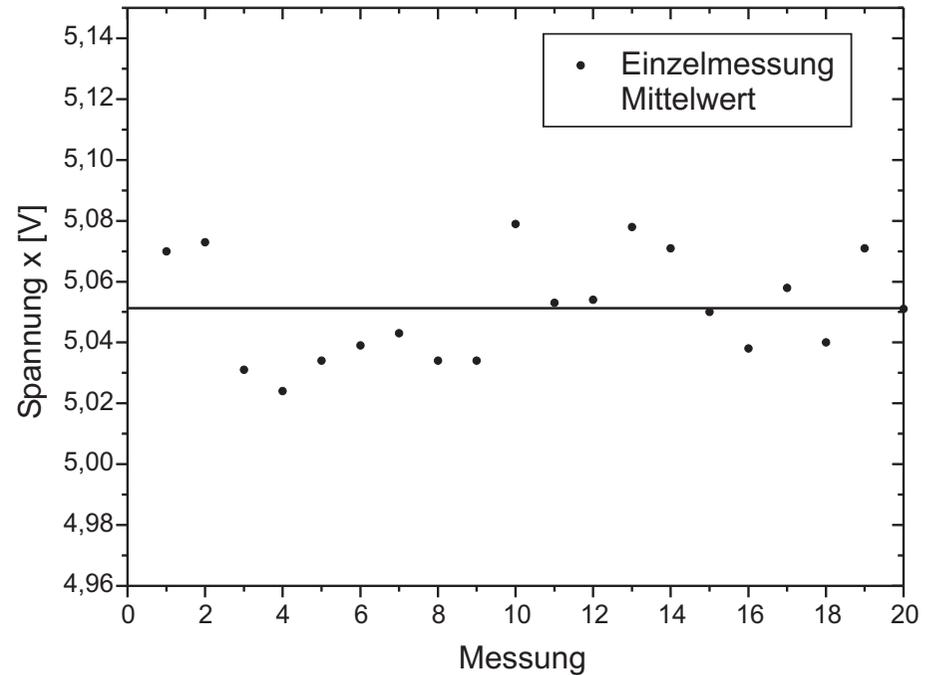
Neben der besten Schätzung des „wahren Werts“ (Mittelwert) müssen wir zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung machen. Dazu wiederholen wir die Messung nicht nur 20-mal sondern viele Male mehr. In Abbildung 2 sind z.B. 3500 Einzelmessungen aufgetragen. Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass die Messwerte symmetrisch um einen mittleren Wert streuen. Die meisten Messwerte liegen in der Nähe des Mittelwertes. Aber es gibt auch einzelne „Ausreißer“, die weiter weg vom Mittelwert liegen. Um dies zu quantifizieren empfiehlt sich eine andere grafische Darstellung der Messwerte in Form eines Histogramms. Dabei wird gezählt, wieviele Einzelmessungen innerhalb eines bestimmten Intervalls aufgetreten sind und die entsprechende Häufigkeit in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Solch ein Histogramm ist in Abbildung 3 dargestellt. Für sehr viele Messungen, streng genommen für unendlich viele, nähert sich das Histogramm einer bekannten Verteilung, die als Normal- bzw. Gaußverteilung bezeichnet wird und durch

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

dargestellt wird. Die Gaußverteilung beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$\int_a^b P(x) dx \quad (7)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert x_i gemessen wird, der im Intervall


 Abbildung 1: Darstellung von 20 unabhängigen Messungen einer elektrischen Spannung x . Die waagrechte Linie entspricht dem Mittelwert.

$a \leq x_i \leq b$ liegt. Durch den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ ist die Verteilung normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1. \quad (8)$$

Dies ist sofort einsichtig, da mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit irgendein Wert gemessen wird.

Eine Gaußverteilung besitzt zwei Parameter. Die Lage des Maximums der Verteilung wird durch die Größe μ bestimmt und entspricht dem wahrscheinlichsten Wert. Die Breite der Verteilung ist durch die Größe σ (Abbildung 3) gegeben.

Falls die Messwerte tatsächlich gaußverteilt sind - und das ist sehr häufig der Fall - können wir annehmen, dass wir das Messergebnis einer großen Anzahl von

Einzelmessungen, ebenfalls durch die Parameter μ und σ beschreiben können. Wie sich zeigen lässt, konvergiert der arithmetische Mittelwert \bar{x} für eine große Anzahl von Einzelmessungen, gegen den wahrscheinlichsten Wert μ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu. \tag{9}$$

Der Mittelwert stellt somit, wie wir bereits zuvor erwähnt haben, die beste Schätzung des „wahren Werts“ dar.

Die Breite der Gaußverteilung wird durch σ bestimmt. Je größer σ , desto breiter ist die Verteilung und umso größer ist die Streuung der Messwerte um den wahrscheinlichsten Wert μ . Wir können daher σ als ein Maß für die Messgenauigkeit interpretieren.

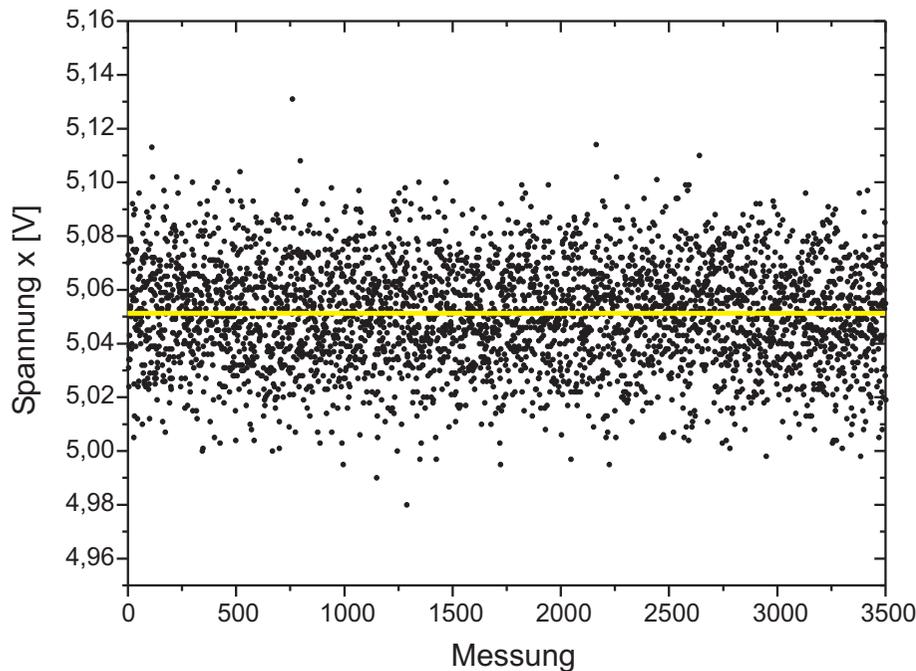


Abbildung 2: Darstellung von 3500 Messungen.

Für eine große Anzahl von Einzelmessungen lässt sich zeigen, dass die Reihe (Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert)

$$S'_E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \tag{10}$$

gegen σ konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_E = \sigma. \tag{11}$$

S'_E wird als **Standardabweichung** einer Messreihe bezeichnet. Allerdings ist

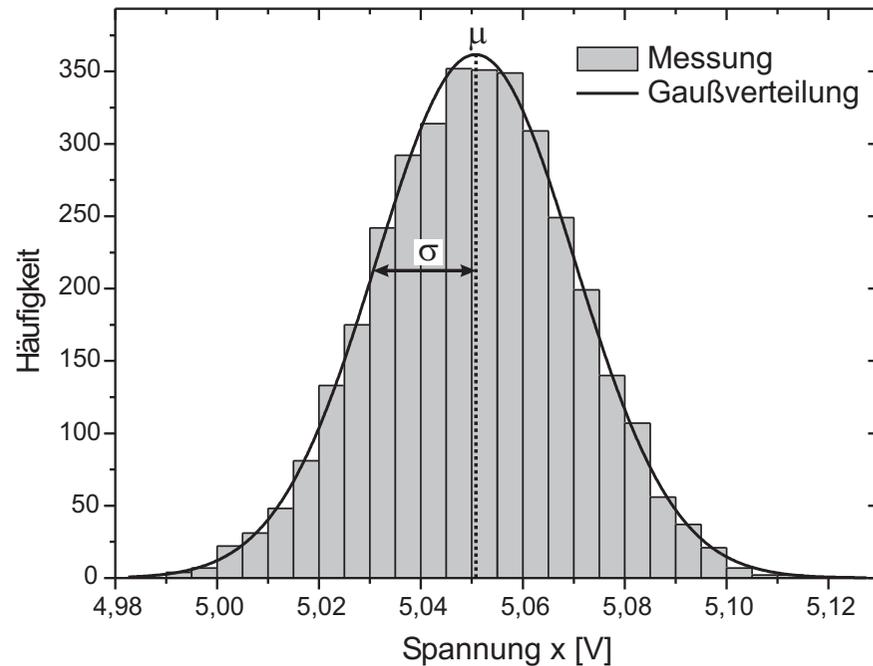


Abbildung 3: Histogramm von 3500 Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie zeigt die dazugehörige Gaußverteilung mit den Parametern μ und σ . Die Gaußverteilung ist hier nicht auf Eins normiert, sondern auf die Fläche des Histogramms.

Intervall	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
Wahrscheinlichkeit	68,3%	95,5%	99,7%

 Tabelle 2: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .*

hier Vorsicht geboten. S'_E ist nur dann ein guter Schätzwert für die Streuung der Messwerte, wenn viele Einzelmessungen durchgeführt werden. Bei nur wenigen Messungen wird die Streuung um den Mittelwert überschätzt. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es besser ist als Maß für die Streuung die Größe

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (12)$$

zu verwenden. S_E wird auch als der **mittlere Fehler einer Einzelmessung** bezeichnet.

Wird eine Messung viele male wiederholt und als beste Schätzung des „wahren Wertes“ der Mittelwert \bar{x} angegeben, so ist dieser natürlich genauer als der Messwert einer Einzelmessung und zwar um den Faktor $1/\sqrt{N}$:

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (13)$$

S_M wird auch als **mittlerer Fehler des Mittelwerts** oder einfach als **Standardfehler** bezeichnet.

Mit Hilfe von Gleichung (7) lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert x_i im Bereich von $\pm\sigma$ um den wahrscheinlichsten Wert μ schwankt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P(x) dx = 68,3 \%. \quad (14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung ein Wert im Bereich $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ auftritt beträgt 68,3 %. Analog lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für den 2σ bzw. 3σ -Bereich bestimmen.

Für das Endergebnis einer Messung gibt man in der Regel den 1σ -Fehler S_E

bzw. S_M an. Wird ein größerer Fehlerbereich angegeben (z.B. 3σ -Fehler) ist dies gesondert zu vermerken.

Beispiel:

Für die in Tabelle 1 angegebenen Messdaten errechnen sich die Ergebnisse wie folgt:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{5,070 \text{ V} + \dots + 5,051 \text{ V}}{20} = 5,051 \text{ V}. \quad (15)$$

$$\text{Fehler einer Einzelmessung: } S_E = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0173 \text{ V}. \quad (16)$$

$$\text{Fehler des Mittelwerts: } S_M = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0039 \text{ V}. \quad (17)$$

Das Endergebnis wird in der Form

$$\bar{x} \pm S_M \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm \Delta x \quad (18)$$

angegeben. Anstatt S_M schreibt man auch häufig für den Fehler einfach Δx . In unserem Beispiel erhalten wir

$$x = (5,051 \pm 0,004) \text{ V}. \quad (19)$$

IV.2 Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Praktikumsversuchen reicht es nicht aus nur eine physikalisch Größe zu messen und dessen Fehler abzuschätzen. In der Regel sollen aus dem Messergebnis weitere Größen und dessen Genauigkeiten bestimmt werden.

Beispiel:

Es soll die Verlustleistung P eines ohmschen Widerstands R , an dem die Spannung U anliegt, bestimmt werden. Dazu wird der Widerstand R und die Spannung U gemessen und gemäß

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (20)$$

die Verlustleistung berechnet. Da sowohl R als auch U nur mit einer bestimmten Genauigkeit bestimmt wurden, besitzt auch die daraus abgeleitete Größe P eine endliche Genauigkeit.

Die Bestimmung dieser Genauigkeit geschieht mit Hilfe der Differentialrechnung. Wenn die direkt gemessenen Größen x und y um kleine Beträge dx und dy geändert werden, verändert sich der Wert einer Funktion $f = f(x, y)$ um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{vollständiges Differential}) \quad (21)$$

Hier bedeutet $\partial f / \partial x$ die partielle Differentiation der Funktion f nach x , d.h. die Ableitung von f nach x , wobei die Variable y als Konstante behandelt wird.

Wenn wir in dieser Gleichung die Differentiale dx und dy durch die Fehler Δx und Δy der direkt gemessenen Größen ersetzen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich die Fehler im Mittel teilweise kompensieren werden, wenn sie voneinander unabhängig sind. Daher berechnet man den mittleren Fehler Δf durch „quadratische Addition“ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (22)$$

Hier und im Folgenden wird unter Δx bei zufälligen Fehlern, der mittlere Fehler S_M nach Gleichung (13), bei systematischen Fehlern die oben diskutierten Überlegungen verstanden.

Für das oben angeführte Beispiel (20) berechnet sich der Fehler wie folgt:

$$P = P(U, R) \quad (23)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (24)$$

$$= \sqrt{\left(2\frac{U}{R} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2} \Delta R\right)^2} \quad (25)$$

Die funktionale Abhängigkeit der zu ermittelnden Größe von den direkt gemessenen hat häufig eine einfache Form. Es lohnt sich, die folgenden Formeln zu merken, die aus der allgemeinen Gleichung (22) folgen:

$$f = ax \quad \Delta f = a\Delta x \quad (26)$$

$$f = x + y \quad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (27)$$

$$f = xy, \quad f = x/y \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (28)$$

$$f = x^{\pm b} \quad \frac{\Delta f}{f} = |b| \frac{\Delta x}{x}, \quad b = \text{const.} \quad (29)$$

Merken Sie sich:

1. „Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der absoluten Fehler der Summanden“.
2. „Der relative Fehler des Produkts oder des Quotienten zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der einzelnen relativen Fehler“.

Für eine Fehlerabschätzung kann man statt den Gleichungen (27) und (28) auch die einfacheren Formeln $\Delta f = \Delta x + \Delta y$ bzw. $\Delta f / f = \Delta x / x + \Delta y / y$ verwenden. Bevor man mit der Messung beginnt, sollte man sich mit Hilfe der Gleichungen (26) bis (29) überlegen, durch welche Fehler die Genauigkeit der Messung hauptsächlich begrenzt wird. Man kann dann versuchen, die empfindlich in das Resultat eingehenden Fehler klein zu halten.

Farbe	Frequenz [THz]	U_S [V]	ΔU_S [V]
gelb	518,7	-0,59	0,05
grün	549,0	-0,72	0,05
blau	687,9	-1,28	0,05
UV	821,3	-1,88	0,05

Tabelle 3: Messdaten aus dem Versuch Fotoeffekt.

V Ausgleichsrechnung

Bei vielen Praktikumsversuchen kommt es häufig vor, dass die Steigung m einer linearen Funktion bestimmt werden muss. Hier im Praktikum können Sie dies auf zwei verschiedene Arten machen. Eine grafische Methode die hier erläutert werden soll und eine rechnerische Methode die im nächsten Abschnitt *Lineare Regression* diskutiert wird.

Wir wollen die Bestimmung einer Geradensteigung anhand eines Beispiels mit Daten des Versuchs 35, *Fotoeffekt* erläutern. Bei diesem Versuch wird mit Hilfe einer Fozelle das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Dazu wird die Fozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenz (Farbe) beleuchtet und gemessen, bei welcher Sperrspannung U_S der Fotostrom verschwindet. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt. Das Planck'sche Wirkungsquantum lässt sich aus der Steigung $\Delta U_S/\Delta f$ des Graphen gemäß

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f}, \quad (30)$$

bestimmen, wobei e die Elementarladung darstellt. Um die Steigung zu berechnen legen wir zunächst durch alle Messpunkte unter Berücksichtigung der Messfehler eine Ausgleichsgerade. Dabei soll die Gerade so platziert werden, dass die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der Gerade im Mittel minimal wird. Für das Planck'sche Wirkungsquantum berechnen wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,37 \text{ V}}{323,8 \text{ THz}} = 6,78 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (31)$$

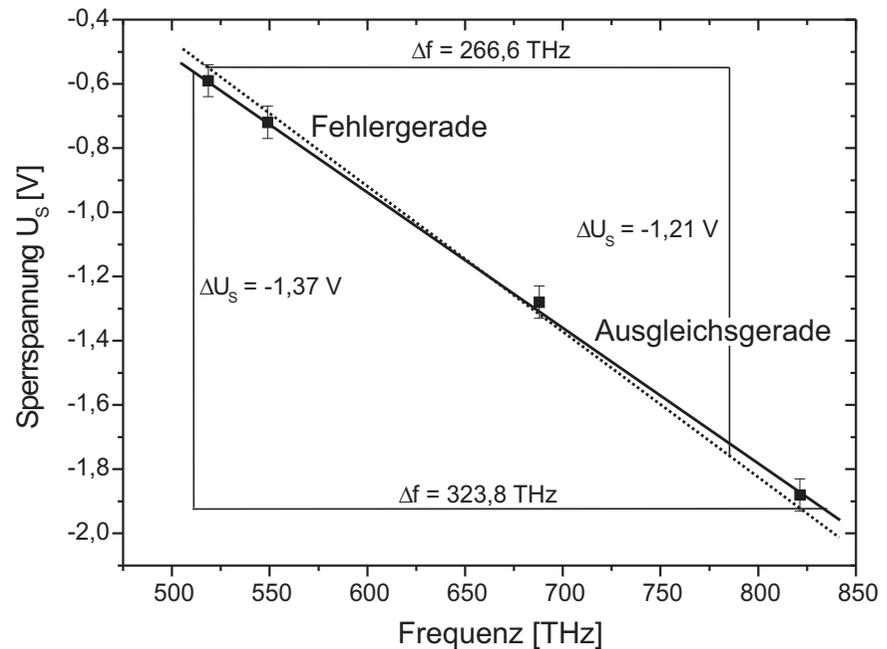


Abbildung 4: Bestimmung der Steigung und dessen Fehler mit Hilfe einer Ausgleichsgerade (durchgezogen) und Fehlergerade (punktiert).

Um den Messfehler abzuschätzen, legen wir durch die Messwerte eine zweite Gerade (Fehlergerade). Diese sollte maximal steil (oder maximal flach) sein aber noch innerhalb der Fehler der einzelnen Messungen liegen. Hieraus erhalten wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,21 \text{ V}}{266,6 \text{ THz}} = 7,27 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (32)$$

Den Fehler schätzen wir aus der Differenz der beiden Steigungen ab. Somit lautet das Ergebnis dieser Messung:

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (33)$$

VI Lineare Regression

Sofern bei einer Messung keine systematischen Fehler auftreten und die Messdaten normalverteilt sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, für x_i den Wert y_i zu messen:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}, \quad (34)$$

wobei Δy_i den Fehler von y_i bezeichnet. Die Gesamtwahrscheinlichkeit P alle N Messwerte zu messen, berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten P_i :

$$P = \prod_i P_i \quad (35)$$

$$= \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}. \quad (36)$$

Gesucht werden nun die Funktionsparameter von $f(x)$, für die die Wahrscheinlichkeit P maximal wird. Der erste Term in (36) stellt eine Konstante dar, die nicht von den Funktionsparametern abhängt. Somit wird die Wahrscheinlichkeit maximal, wenn die Summe in der Exponentialfunktion minimal wird. Diese Summe wird auch als χ^2 -Summe bezeichnet.

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2. \quad (37)$$

Wir wollen uns im Folgenden auf lineare Funktionen beschränken, d.h.

$$f(x) = mx + n. \quad (38)$$

Für die Berechnung der Parameter m und n folgt dann:

$$\chi^2(m, n) = \sum_i \left(\frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i}\right)^2 = \text{Minimum} \quad (39)$$

Durch diese Methode wird eine Gerade mit den Parametern m und n bestimmt, für die die quadratischen Abstände der Messwerte y_i von der Geraden minimal wird. Durch den Faktor $1/\Delta y_i^2$ werden zusätzlich Messwerte mit einem kleinen Fehler Δy_i stärker gewichtet als Messwerte mit einem großen Fehler (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl.: least square method).

Für die Berechnung von m und n müssen wir die Nullstellen der partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = -2 \sum_i x_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial n} = -2 \sum_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0. \quad (41)$$

Auflösen nach den Funktionsparametern liefert:

$$m = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \quad (42)$$

$$n = \frac{1}{\xi} \left(\sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right), \quad (43)$$

mit

$$\xi = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2. \quad (44)$$

Für den Fall, dass alle Fehler gleich groß sind, d.h. $\Delta y_i \equiv \Delta y$, vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (45)$$

$$n = \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\overline{x\bar{y}}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (46)$$

Da die Messwerte y_i fehlerbehaftet sind, besitzen auch die Funktionsparameter einen Fehler den wir mit Δm bzw. mit Δn bezeichnen. Die Fehler berechnen sich nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta m^2 = \sum_i \left(\frac{\partial m}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \quad (47)$$

$$\Delta n^2 = \sum_i \left(\frac{\partial n}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \quad (48)$$

Mit Hilfe von Gleichung (42) und (43) erhalten wir:

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \quad (49)$$

$$\Delta n^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}, \quad (50)$$

wobei ξ in Gleichung (44) definiert wurde. Sind wiederum alle $\Delta y_i \equiv \Delta y$ gleich groß, so vereinfachen sich diese Berechnungen zu

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{1}{\overline{x^2 - \bar{x}^2}}, \quad (51)$$

$$\Delta n^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2 - \bar{x}^2}}. \quad (52)$$

Die hier ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für lineare Funktionen, sondern lassen sich auch auf andere Funktionen übertragen.

Wir wollen wieder eine Beispielrechnung mit den Daten des Versuchs Fotoeffekt (Tabelle 3) durchführen. Hier entspricht x = Frequenz, $U_S = y$ und $\Delta U_S = \Delta y$. Da die Fehler der einzelnen Messungen alle gleich groß sind, müssen wir nur die Mittelwerte in Gleichung (45) berechnen:

$$\bar{x} = 6,442 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (53)$$

$$\bar{y} = -1,118 \text{ V} \quad (54)$$

$$\overline{xy} = -7,815 \times 10^{14} \text{ VHz} \quad (55)$$

$$\overline{x^2} = 4,295 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (56)$$

$$\overline{x^2} = 4,150 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (57)$$

Für die Steigung folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz}. \quad (58)$$

Das Plank'sche Wirkungsquantum erhalten wir durch Multiplikation mit der Elementarladung:

$$h = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz} = 6,79 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (59)$$

Den Fehler berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (51):

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}, \quad (60)$$

wobei nach Tabelle 3 für $\Delta y = 0,05 \text{ V}$ und für $N = 4$ zu wählen ist. Wir erhalten für den Fehler von h :

$$\Delta h = e \Delta m = 0,33 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (61)$$

Das Messergebnis lautet somit

$$h = (6,8 \pm 0,3) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (62)$$

Versuch 11 Einführung

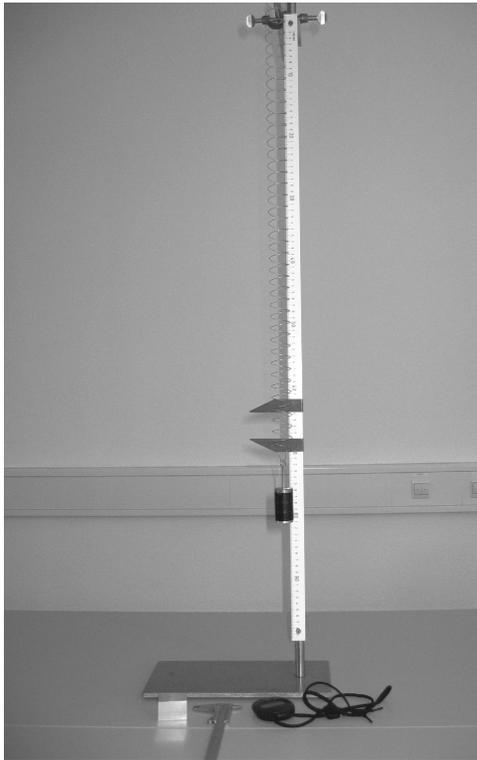


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Vorbemerkung

Ziel des Einführungsveruches ist es Sie mit grundlegenden Techniken des Experimentierens und der Auswertung der Messdaten vertraut zu machen. Diese Grundkenntnisse sind für eine erfolgreiche Durchführung des Praktikums notwendig.

Bei diesem Versuch werden Sie Messungen am Federpendel durchführen. Zunächst wird die Federkonstante gemessen. Das Ergebnis dieser Messung wird verwendet um in einer zweiten Messung die Erdbeschleunigung zu bestimmen. Sie werden in diesem Versuchsteil den statistischen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Federpendels kennen lernen. Es soll auch gezeigt werden, dass zwei scheinbar identische Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer unterschiedliche Messgenauigkeiten besitzen. Um aus den Messdaten die Federkonstante und die Erdbeschleunigung zu extrahieren ist es notwendig die Ergebnisse graphisch darzustellen. Aus den Diagrammen die erstellt werden, kann man die zu bestimmenden Größen einschließlich des Messfehlers ablesen.

II Messmethode

Die Differentialgleichung für ein Federpendel lautet:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (1)$$

Wenn man das Federpendel zur Zeit $t = 0$ um x_0 auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (3)$$

Die Periodendauer T ist mit ω wie folgt verknüpft:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Somit ergibt sich für die Periodendauer zu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5)$$

Misst man die Periodendauer T als Funktion der Masse m so kann man hieraus die Federkonstante D bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse m belastet, so gilt:

$$mg = Dx \quad (6)$$

Da der Wert der Federkonstante D aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

III Durchführung

Aufgabe 1: Fehlerbestimmung zweier Messmethoden

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse von 200g. Messen Sie dann je 10 mal 3 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen. Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalausschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 10 mal 3 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes¹. Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden Methoden.

Aufgabe 2: Messen der Schwingungsdauer als Funktion der Masse

Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit Massen zwischen 50 g und 250 g in Schritten von 50 g. Für jede Masse werden dreimal drei Pendelschwingungen ausgemessen. Diese Messreihe wird dazu benutzt die Federkonstante des Pendels zu bestimmen.

Aufgabe 3: Bestimmung der Auslenkung als Funktion der Masse

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit den Massen 0g, 50g, 100g, 150g, 200g und 250g beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Notieren Sie die Ablesegenauigkeit für die Auslenkung!

¹Für eine Messreihe mit n Messungen x_1, x_2, \dots, x_n und dem Mittelwert \bar{x} ist der mittlere Fehler der Einzelmessung (auch Standardabweichung) durch $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ definiert. Der mittlere Fehler des Mittelwertes ist durch $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$ gegeben.

IV Auswertung

Tragen Sie zunächst die Ergebnisse der Vergleichsmessungen der Schwingungsdauer in ein Histogramm ein. Wählen Sie für beide Histogramme den gleichen

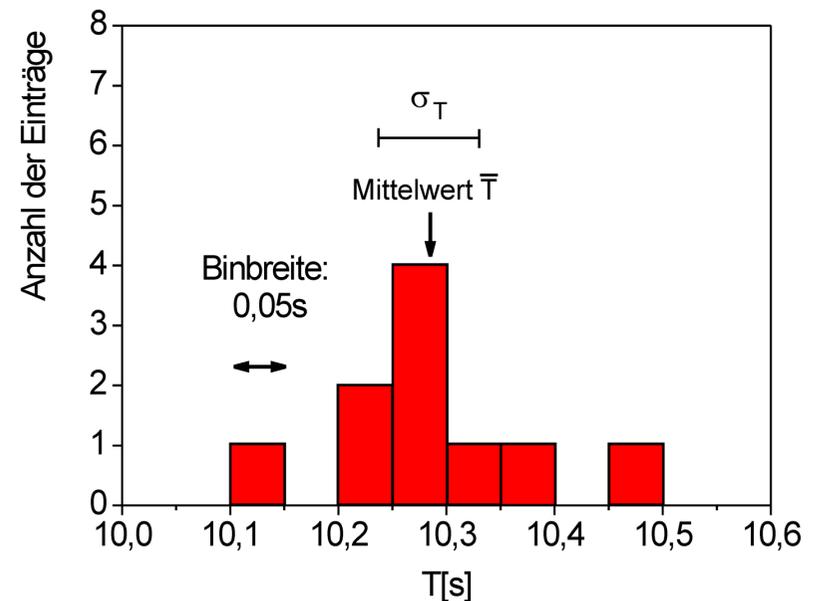


Abbildung 2: Histogramm einer Messreihe.

Abszissenbereich! Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Histogramm für eine Messreihe. Berechnen Sie für beide Methoden den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Welche Methode ist genauer? Was ist der Grund?

Messung	T [s]	\bar{T} [s]	σ_T [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	10,11	10,285	0,094	0,03
2	10,23			
3	10,34			
4	10,28			
5	10,26			
6	10,24			
7	10,28			
8	10,46			
9	10,27			
10	10,38			

Um die Federkonstante aus der Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse zu bestimmen, wird eine graphische Methode verwendet. Hierzu wird Gleichung (5) geschrieben als

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m \quad (7)$$

Dies lässt sich als Geradengleichung

$$y = ax + b \quad (8)$$

interpretieren wenn man

$$\begin{aligned} x &= m \\ y &= T^2 \\ a &= \frac{4\pi^2}{D} \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

setzt. Daher wird im Diagramm das Quadrat der gemessenen Schwingungsdauer T gegen die Masse m aufgetragen. Der Wert von T^2 und von m sind fehlerbehaftet. Folglich müssen Fehlerbalken in das Diagramm eingezeichnet werden. Der Fehler wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern der Mittelwerte der Schwingungsdauern bestimmt. Als nächstes wird die Steigung aus dem Diagramm bestimmt in dem eine Gerade so in das Diagramm gelegt wird, dass die Gerade die Messwerte möglichst gut beschreibt. Die Steigung dieser Geraden kann nun aus dem Diagramm nach

$$a = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \quad (10)$$

abgelesen werden. Um den Fehler von a zu erhalten werden in dasselbe Diagramm zusätzlich Fehlergeraden eingezeichnet. Die Fehlergeraden werden so gelegt, dass sie noch gerade die Messungen unter Berücksichtigung des Messfehlers beschreiben könnten. Die Differenz der Steigungen der optimierten Geraden und der Fehlergeraden wird als Fehler der Steigung $\sigma_{\bar{a}}$ verwendet. Nach Gleichung (9) kann nun die Federkonstante und mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz der Messfehler der Federkonstanten berechnet werden.

Nach Gleichung (7) sollte man erwarten, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Dies ist aber nicht der Fall. Überlegen Sie sich die Ursache hierfür. Aus dem selben Grund ist es übrigens auch nicht möglich die Federkonstante für einzelne Messungen direkt aus Gleichung (5) zu bestimmen. Die graphische Bestimmung der Federkonstante ist in diesem Fall unerlässlich! Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem zweiten Diagramm die Auslenkung des Federpendels gegen die Masse aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden, da Gleichung (6) wieder als Geradengleichung der Form

$$x = \frac{g}{D} m \quad (11)$$

dargestellt werden kann. Die Steigung

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta m} \quad (12)$$

und ihr experimenteller Fehler können nun nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Erdbeschleunigung wird nach

$$g = D \cdot a \quad (13)$$

berechnet. Um den Fehler der Erdbeschleunigung zu bestimmen muss die Fehlerfortpflanzung angewendet werden, da sowohl der Wert von D als auch der Wert von a fehlerbehaftet sind.

V Messprotokoll

Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer:

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Maximalauslenkung.

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Nulldurchgang

Ablesegenauigkeit der Stoppuhr:

Messung der Federkonstante:

m [g]	Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
50	1	3				
	2	3				
	3	3				
100	1	3				
	2	3				
	3	3				
150	1	3				
	2	3				
	3	3				
200	1	3				
	2	3				
	3	3				
250	1	3				
	2	3				
	3	3				

Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Start/Stop bei

.....

Messung der Erdbeschleunigung:

Δm [g]	Auslenkung x [mm]	Ablesefehler Δx [mm]

Messung der Auslenkung als Funktion der Masse

VI Beispiele für die Darstellung von Messergebnissen

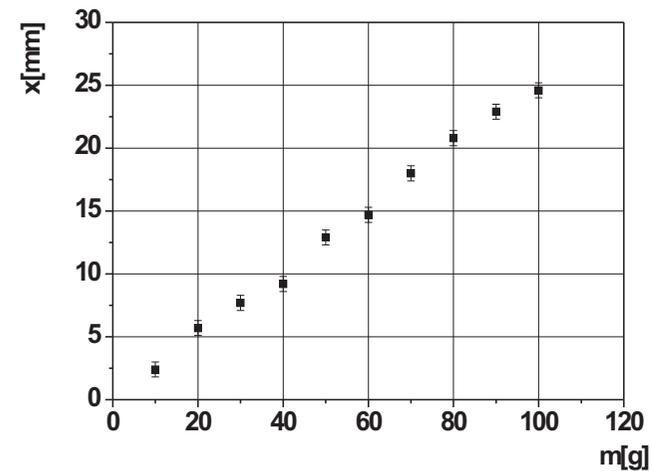
Abschließend werden noch ein paar Beispiele dafür gegeben, wie Messdaten graphisch dargestellt werden sollen. Es werden auch einige Beispiele für typische Fehlerquellen beim Zeichnen von Diagrammen gezeigt.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich zu

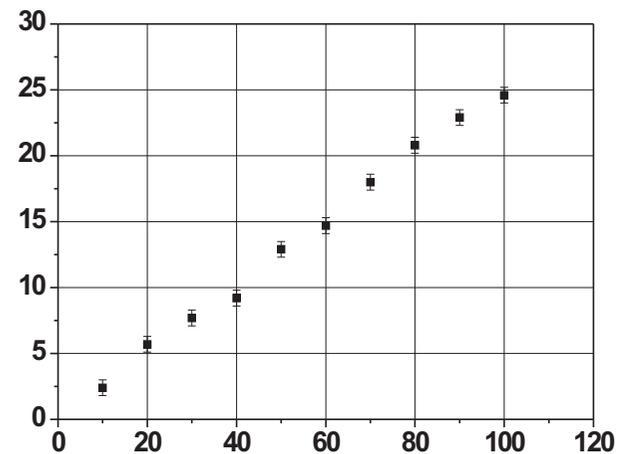
$$a_{\text{Ausgleich}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{20\text{mm}}{80\text{g}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

die der Fehlergeraden zu

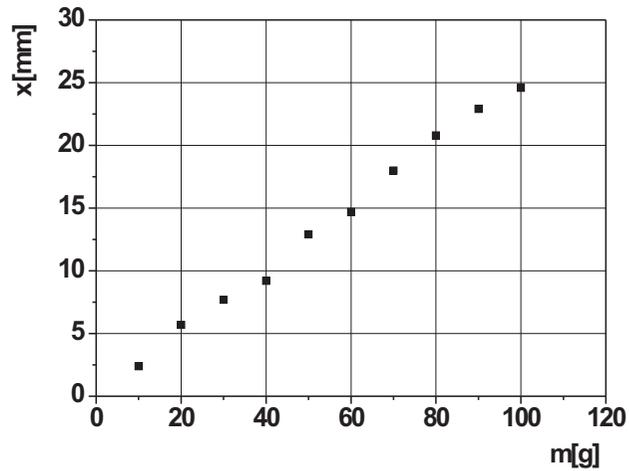
$$a_{\text{Fehler}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{21,5\text{mm}}{78\text{g}} = 0,276 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$



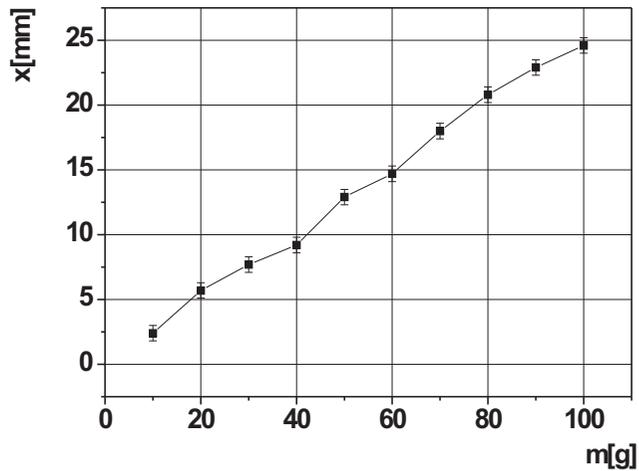
(a) Richtige Darstellung von Messwerten.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Achsenbeschriftungen fehlen.



(a) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Fehlerbalken fehlen.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Messpunkte sind durch eine (unphysikalische) Zick-Zack-Linie verbunden.

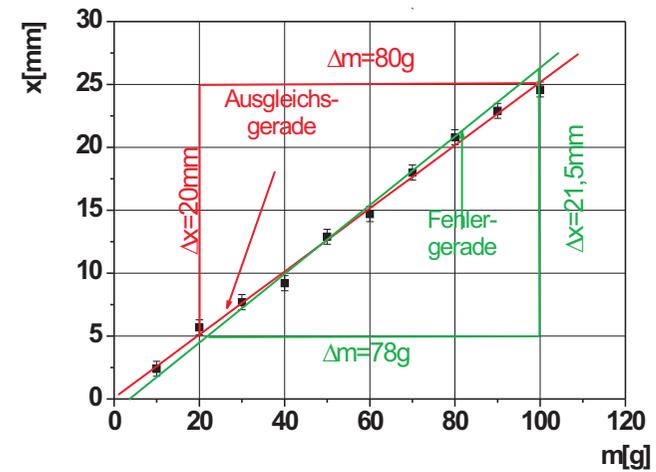


Abbildung 5: Richtiges Anpassung einer Ausgleichsgerade und Ermittlung der Geradensteigung.

Versuch 22 Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

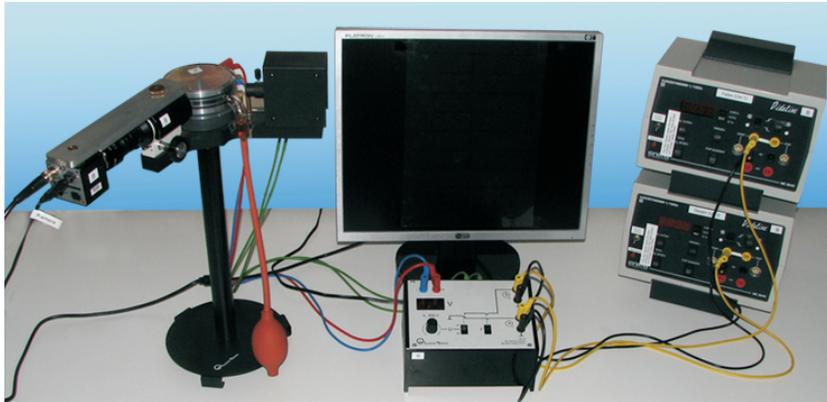


Abbildung 1: Übersicht des Millikan-Versuchs.

I Messaufbau

- Millikan-Gerät (Plattenkondensator, Ölzerstäuber und Beleuchtung).
- Mikroskop-Kamera mit Monitor.
- Millikan-Steuergerät (Hochspannungsquelle, Triggerung der Stoppuhren).
- Zwei elektronische Stoppuhren.
- PC mit Drucker, Datenauswertung mit dem Programm Excel.

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart, 7.Auflage 1994, S. 310-313.

- W. Ilberg, M. Krötzsch, D. Geschke, *Physikalisches Praktikum*, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, Leipzig 10. Auflage 1994, S. 254-256.
- J. Becker, H.J. Jodl, *Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, VDI-Verlag GmbH Düsseldorf 1991, S. 152-155.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Auftrieb, Stokesches Gesetz, Elektrisches Feld in einem Kondensator, Kraft auf eine Ladung im homogenen elektrischen Feld. Berechnen Sie die Summe aller Kräfte auf ein im feldfreien Raum mit konstanter Geschwindigkeit sinkendes Öltröpfchen und auf ein im elektrischen Feld des Kondensators mit konstanter Geschwindigkeit steigendes Öltröpfchen. Leiten Sie hiermit die beiden Gleichungen (5) und (6) ab.

IV Aufgaben

- Bestimmung der Elementarladung durch Messung der Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit von elektrisch geladenen Öltröpfchen im Plattenkondensator.

V Grundlagen



Robert A. Millikan

Robert A. Millikan hat im Jahre 1913 in der Fachzeitschrift *Physical Review* eine Arbeit mit dem Titel „*On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant*“ (Phys.Rev. 2 (1913), 109-143) veröffentlicht. Für die in dieser Arbeit beschriebene Messung der elektrischen Elementarladung erhielt Millikan im Jahre 1923 den Nobelpreis für Physik. Der hier im Praktikum aufgebaute Versuch beruht im wesentlichen auf der Originalapparatur von Millikan. Grundprinzip des Millikan- Experiments ist die Tatsache, dass auf ein im homogenen Feld eines Plattenkondensators bewegliches, elektrisch geladenes Öltröpfchen verschiedene Kräfte wirken, die indirekt messbar sind. Dabei wird die Ladung eines Tröpfchens aus der Messung seiner Fallgeschwindigkeit v_f im feldfreien Raum und seiner

Steiggeschwindigkeit v_s bei einer an den Kondensator angelegten Spannung bestimmt.

Auf ein fallendes Tröpfchen (ohne elektrisches Feld) wirken drei Kräfte:

Gewichtskraft:
$$F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} g \quad (1)$$

Auftriebskraft:
$$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g \quad (2)$$

Stokesche Reibung:
$$F_R = 6\pi r \eta v \quad (3)$$

Wobei r , $\rho_{\text{Öl}}$, und v der Radius, die Dichte und die Geschwindigkeit des Öltröpfchens bezeichnen, g ist die Schwerebeschleunigung, ρ_{Luft} und η sind die Dichte und die Viskosität der Luft. Trägt das Öltröpfchen eine elektrische Ladung q , so wirkt im Feld eines Plattenkondensators eine zusätzliche Kraft,

elektrische Kraft:
$$F_e = q \frac{U}{d} \quad (4)$$

auf dieses ein. Hier ist q die Ladung des Tröpfchens, U ist die am Kondensator anliegende Spannung und d der Abstand der Kondensatorplatten.

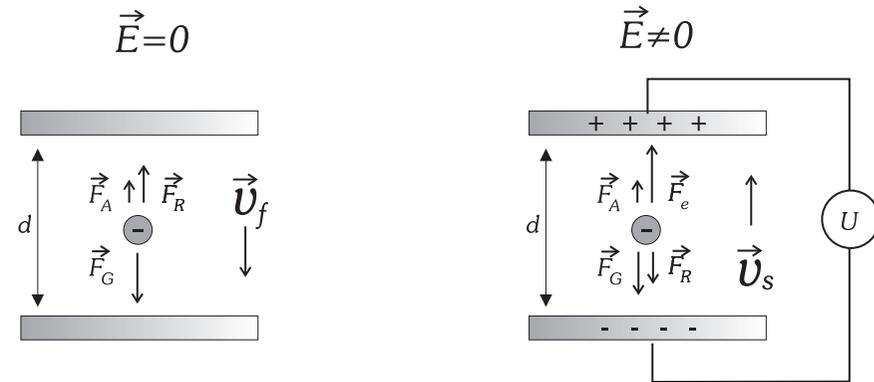


Abbildung 2: Einwirkende Kräfte auf ein elektrisch geladenes Öltröpfchen im Plattenkondensator. Links: Ohne elektrisches Feld. Rechts: Im elektrischem Feld.

Aus der Summe aller Kräfte, die ohne elektrisches Feld auf ein mit konstanter Geschwindigkeit v_f fallendes Tröpfchen wirken und aus der Summe der Kräfte, die auf ein im elektrischen Feld des Kondensators mit konstanter Geschwindigkeit v_s steigendes Tröpfchen wirken, lassen sich die beiden Gleichungen für den Radius r und die Ladung q des Öltröpfchens ableiten:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}} v_f \quad (5)$$

$$q = (v_f + v_s) \sqrt{\frac{9 v_f \eta^3}{2 \rho g}} \frac{6\pi d}{U}, \quad (6)$$

wobei ρ die Differenz ($\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}$) darstellt.

Berechnet man die Ladungen der Öltröpfchen mit Hilfe von Gleichung (6) und leitet aus vielen solchen Messungen die Elementarladung e ab, so stellt man fest, dass der so bestimmte Wert um etwa einen Faktor 1,1 zu hoch ist. Genauere Untersuchungen zeigen, dass dieser Faktor um so größer wird, je kleiner der Radius der Öltröpfchen ist. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass die Radien der Öltröpfchen im Bereich 10^{-6} m bis 10^{-7} m liegen (folgt aus Gleichung (5)). Dies entspricht derselben Größenordnung wie die mittlere freie Weglänge der Moleküle in Luft. Die Viskosität η wurde aber bei der bisherigen

Betrachtung als konstant angenommen. Allerdings gilt dies nur dann, wenn der Durchmesser der Öltröpfchen deutlich größer ist als die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle. Man kann aber die Viskosität η mit einem radiusabhängigen Korrekturfaktor $f(r)$ versehen. Dieser auch schon von Millikan benutzte Korrekturfaktor (die sogenannte Cunningham-Korrektur des Stokeschen Gesetzes) ist gegeben durch:

$$\eta(r) = \eta_0 f(r) = \frac{\eta_0}{1 + \frac{b}{rp}}. \quad (7)$$

Hier ist η_0 der Grenzwert der Viskosität für sehr große Öltröpfchen, p ist der Luftdruck und b eine empirische Konstante. Da bei unserer Betrachtung der Radius r von η abhängt (Gleichung 5), müsste man, um r exakt zu berechnen, Gleichung (7) in Gleichung (5) einsetzen und nach r auflösen. Das führt zu einer quadratischen Gleichung. Es zeigt sich aber, dass es genügt, in Gleichung (5) mit η_0 zu rechnen. Der Fehler, den man dabei für r macht, liegt bei etwa 5 %. Der daraus resultierende Fehler für den Korrekturfaktor f beträgt nur etwa 0,5 % und ist somit vernachlässigbar.

Bei der Auswertung zu verwendende Konstanten:

Viskosität der Luft	$\eta_0 = 1,81 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$
Schwerebeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Dichte des Öls bei 15°C	$\rho_{\text{Öl}} = 877 \text{ kg/m}^3$
Dichte des Öls bei 25°C	$\rho_{\text{Öl}} = 871 \text{ kg/m}^3$
Dichte der Luft	$\rho_{\text{Luft}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$
Konstante im Korrekturfaktor	$b = 7,78 \times 10^{-3} \text{ Pa m}$
Abstand der Kondensatorplatten	$d = (6,00 \pm 0,05) \text{ mm}$
Skala auf dem Bildschirm	$1\text{Skt} = (5,00 \pm 0,13) \times 10^{-5} \text{ m}$

Bachten Sie, dass die roten Linien auf dem Bildschirm nicht einem Skalenteil entsprechen sondern 10 Teilen.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Machen Sie sich mit der Versuchsanordnung vertraut.

Bringen Sie Öltröpfchen in den Kondensator ein und beobachten Sie ihr Verhalten unter dem Einfluss der angelegten Spannung (Für diese und die folgenden Aufgaben ca. 500 V mit dem Drehknopf einstellen. Anschließend den eingestellten Wert notieren und dann für die gesamte Durchführung nicht mehr verändern – **die Spannung ab jetzt über den entsprechenden Kippschalter nur ein- und ausschalten!**). Benutzen Sie zur Scharfstellung das Einstellrad an der Mikroskopführung. Beachten Sie die Prozedur zum Nullstellen der Stoppuhren (ist auf den Uhren angegeben). **Diese müssen Sie nur einmal durchführen.** Mit dem rechten Schalter des Steuergeräts starten Sie die obere Uhr, mit der die Fallzeit der Tröpfchen gemessen wird. Mit dem linken Schalter wird die Spannung am Kondensator angelegt, gleichzeitig wird die obere Stoppuhr angehalten und die untere Stoppuhr gestartet. Am oberen Umkehrpunkt des Tröpfchens wird der linke Schalter wieder ausgeschaltet, dies stoppt die untere Uhr und startet wieder die obere Uhr, usw. Am Ende der Messung eines Tröpfchens wird schließlich wieder der rechte Schalter betätigt.

Aufgabe 2: Notieren Sie die Werte für Temperatur und Luftdruck.

Aufgabe 3: Mehrmaliges Messen der Steig- und Fallgeschwindigkeit an einem einzigen Öltröpfchen

Suchen Sie sich ein **langsam steigendes (ca. 8 s pro 10 Skt.)** Tröpfchen aus. Messen Sie seine Fallgeschwindigkeit (ohne elektrisches Feld) und seine Steiggeschwindigkeit (mit elektrischem Feld) jeweils 5 mal und notieren Sie die Werte der einzelnen Messungen (Wege und Zeiten). Aus der Verteilung der insgesamt 10 Messwerte soll später die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung abgeschätzt werden.

Tragen Sie die gemessenen Werte direkt in das Excelarbeitsblatt ein, um zu überprüfen, ob Sie wirklich ein einfach geladenes Teilchen beobachtet haben. Sie müssen ebenfalls ihre eingestellte Spannung, den Luftdruck und die Temperatur dort eintragen. Falls Sie die Fall- und Steigzeiten nicht über 10 sondern beispielsweise über 20 Skalenteile gemessen haben, müssen Sie dies ebenfalls in der Tabelle ändern. Alle anderen Werte werden automatisch für jeden Eintrag berechnet. Das Excelarbeitsblatt finden Sie auf den Computern im Praktikums-

raum oder auch auf der Website des Anfängerpraktikums zum Download.

Aufgabe 4: Nehmen Sie insgesamt 60 Messwerte für Steig- und Fallzeiten von verschiedenen Öltröpfchen auf.

Messen Sie nach Möglichkeit bei 5 Tröpfchen jeweils auch 5 Werte für Steig- und Fallzeit. Insgesamt sollen Sie am Ende 60 Steig- und Fallzeiten notiert haben von verschiedenen Öltröpfchen.

Aufgabe 5: Tragen Sie die 4 Werte für jedes gemessene Tröpfchen (Fallweg und Fallzeit, Steigweg und Steigzeit) in die Tabelle des Excel-Programms zur Auswertung ein.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Verifizieren Sie für ein ausgewähltes Tröpfchen die von Excel berechneten Werte, d.h. berechnen Sie für dieses Tröpfchen von Hand v_f , v_s , r_0 , $f(r_0)$ und q unter Berücksichtigung der Einheiten (r_0 ist der mit η_0 berechnete Radius).

Aufgabe 2: Zeichnen Sie (von Hand) ein Histogramm aller gemessenen Ladungen, die im Bereich von 0 As bis ca. 10^{-18} As liegen. Wählen Sie als Intervallgröße 2×10^{-20} As.

Aufgabe 3: Überprüfen Sie, ob der im Excel-Programm benutzte Wert für die obere Grenze der gemessenen Ladung eines einfach geladenen Tröpfchens vernünftig ist. Können Sie sicher sein, dass der im Excel-Programm berechnete Wert **einer** Elementarladung e entspricht (und nicht etwa $2e$ oder $3e$)?

Aufgabe 4: Schätzen Sie den systematischen Fehler $\Delta q/q$ unter Berücksichtigung der oben angegebenen Fehler einiger Eingabegrößen ab. Nehmen Sie für den Fehler der Spannungsmessung 0,5 %, für den Fehler der Viskosität (einschließlich des Korrekturfaktors) 2,0 % und für den Fehler der Öldichte 0,5 % an. Verwenden Sie dazu die folgende Formel und begründen Sie die in der Formel enthaltenen Vorfaktoren 1/2 und 3/2:

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta s}{2s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta \eta}{2\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \quad (8)$$

mit s für die zurückgelegte Strecke beim Fallen bzw. Steigen.

Aufgabe 5: Nehmen Sie an, dass der statistische Fehler im wesentlichen auf den Messfehlern beruht, die Sie bei den Geschwindigkeitsmessungen machen. Schätzen Sie aus der Verteilung der 5 Werte für q , die Sie mit Hilfe von Gleichung (6) aus den Messungen in Aufgabe 3 erhalten haben, den resultierenden Fehler einer Einzelmessung für q ab und vergleichen Sie ihn mit der von Excel bestimmten Standardabweichung einer Einzelmessung.

Aufgabe 6: Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert

Versuch 41 Temperaturmessung



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Pyrometer
- Pt100-Thermometer (Klasse B)
- Konstantstromquelle 1 mA
- Dewargefäß
- Gasthermometer

- Heizbad mit Rührvorrichtung
- Thermoelement für hohe Temperaturen (PtRh, Typ B oder Typ S) mit Eich-tabelle
- Multimeter
- Butangas-Bunsenbrenner
- Schutzbrille und Schutzhandschuhe

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Temperatur, absoluter Nullpunkt, Gasgesetze, Zustandsänderungen des idealen Gases, reale Gase, van der Waals- Gleichung, Thermoelement, Plancksches Strahlungsgesetz.

Verständnisfragen:

1. Was ist Wärme und was ist Temperatur?
2. Was für Thermometer gibt es? Auf welchen physikalischen Prinzipien beruhen sie? Welche Vor- oder Nachteile bei der Anwendung ergeben sich daraus?
3. Wie funktioniert ein Gasthermometer? Warum ist dieses Thermometer für eine absolute Temperaturmessung gut geeignet? Kann man ein beliebiges Gas nehmen? Bis zu welchen Temperaturen halten Sie ein Gasthermometer für geeignet? Welches Gas würden Sie also nehmen?

4. Als Temperaturfixpunkte werden die Temperatur des kochenden Wassers und die Schmelztemperatur des Eises (Eis-Wassermischung) genommen, die relativ leicht realisiert werden können. Von welchen äußeren Parametern hängen diese Fixpunkte ab?
5. Welche prinzipielle Möglichkeit zur Festlegung der Temperatur, unabhängig von einer Arbeitssubstanz, gibt es?
6. Wie funktioniert ein Thermoelement?
7. Wie lässt sich die Oberflächentemperatur von Sternen bestimmen? Wie unterscheiden sich die Spektren von Sirius ($T \approx 10000 \text{ K}$) und der Sonne ($T \approx 6500 \text{ K}$)?

IV Aufgaben

- Temperaturmessung mit Hilfe eines Gasthermometers und eines Platin-Widerstandsthermometers im Bereich zwischen dem Siedepunkt des Wassers und dem Siedepunkt von flüssigem Stickstoff.
- Messungen mit einem Infrarot-Thermometer im Bereich von 0°C bis 100°C .
- Als typische Anwendung eines Thermoelements wird mit dem PtRh-Element die Temperaturverteilung einer Bunsenbrennerflamme gemessen.

V Grundlagen

Der thermische Zustand eines Stoffes wird durch die Temperatur charakterisiert. Zur Messung dieser Größe benutzt man Instrumente (Thermometer), die die Temperaturabhängigkeit verschiedener physikalischer Größen ausnutzen. Dazu gehören zum Beispiel Ausdehnungsthermometer (Flüssigkeitsthermometer, Gasthermometer), deren Prinzip auf der Temperaturabhängigkeit des Volumens eines Stoffes beruht. Eine weitere große Klasse von Thermometern sind Widerstandsthermometer wie Platin-Thermometer oder Halbleiterthermometer (NTC, PTC). Bei diesen hängt der elektrische Widerstand von der Temperatur ab.

Thermolemente bestehen aus zwei unterschiedlichen, miteinander kontaktierten Metalldrähten. Zwischen den Anschlüssen entsteht eine elektrische Spannung an, die von der Temperaturdifferenz der Kontaktstelle und den Anschlüssen abhängt. In diesem Versuch werden Sie auch Messungen mit einem Pyrometer durchführen. Solch ein Thermometer misst die von einem Körper ausgehende „Wärmestrahlung“, die im Idealfall nur von der Temperatur abhängt. Weltweit gibt es verschiedene Temperaturskalen wie z.B. Celsius oder Fahrenheit, die auf zwei unterschiedlichen Fixpunkten aufbauen. Bei der Celsiusskala sind dies der Schmelz- und der Siedepunkt von Wasser. Der untere Fixpunkt der Fahrenheitskala entspricht der Temperatur einer speziellen Kältemischung, der obere Fixpunkt der „Körpertemperatur eines gesunden Menschen“. Solche Definitionen sind nicht besonders gut reproduzierbar. Aus physikalischer Sicht gibt es nur eine Temperaturskala, die sich aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableiten lässt: Die thermodynamische Temperatur- oder auch Kelvinskala.

Die derzeit gültige internationale Temperaturskala wurde 1990 (ITS-90) festgelegt. Sie definiert spezielle Temperaturfixpunkte im Bereich von $0,65 \text{ K}$ bis 2200 K . Zwischen diesen Temperaturwerten wird mittels definierter Thermometer interpoliert, die zuvor an den Fixpunkten kalibriert wurden. Zu diesen gehören insbesondere die Platin-Widerstandsthermometer (Messbereich ca. 10 K bis ca. 1200 K), das He-Gasthermometer und das He-Dampfdruckthermometer für Temperaturen kleiner als 30 K , sowie im Hochtemperaturbereich die Strahlungsthermometer.

V.1 Das Gasthermometer

Das Funktionsprinzip eines Gasthermometers lässt sich mit Hilfe der Idealen Gasgleichung beschreiben:

$$pV = NkT, \quad (1)$$

wobei p den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur, N die Teilchenzahl und k die Boltzmann-Konstante darstellen.

Befindet sich ein Gas in einem abgeschlossenen Behälter, so kann bei konstant gehaltenem Volumen die Temperatur des Gases durch eine Druckmessung bestimmt werden (Gesetz von Amontons):

$$T \propto p \quad \text{für } V = \text{konstant.} \quad (2)$$

Den Aufbau des im Praktikum eingesetzten Gasthermometers ist in Abbildung 2 dargestellt. Es besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon, der über eine Kapillare mit einem elektrischen Manometer verbunden ist. Die Genauigkeit,



Abbildung 2: Aufbau eines Gasthermometers

mit der die Temperatur gemessen werden kann, hängt von der Konstanz des Volumens und dem verwendeten Gas ab. Dabei müssen zwei systematische Fehler berücksichtigt werden. Zum einen dehnt sich der Glasballon bei Erwärmung aus, wodurch sich das Luftvolumen ändert. Dieser Fehler kann für diesen Versuch aber aufgrund des viel größeren Ausdehnungskoeffizienten von Luft gegenüber dem von Glas vernachlässigt werden. Zum anderen bleibt die in der Kapillare zwischen Glaskugel und Manometer eingeschlossene Luft annähernd auf Zimmertemperatur. Temperaturänderungen im Glasballon bewirken daher, dass dieses „schädliche Volumen“ komprimiert bzw. expandiert wird, wodurch sich ebenfalls das Luftvolumen ändert. Desweiteren ist Luft nur bedingt als ideales Gas anzusehen. Weit oberhalb des Verflüssigungspunktes und bei geringem

Druck sind die Voraussetzungen eines idealen Gases sicherlich gut erfüllt. Allerdings werden Sie auch Messungen bei Temperaturen des flüssigen Stickstoffs durchführen. Da der Druck im Glasballon bei dieser Temperatur deutlich geringer ist als Atmosphärendruck, tritt keine Verflüssigung auf und die Luft im Glasbehälter kann immer noch als ideal angesehen werden.

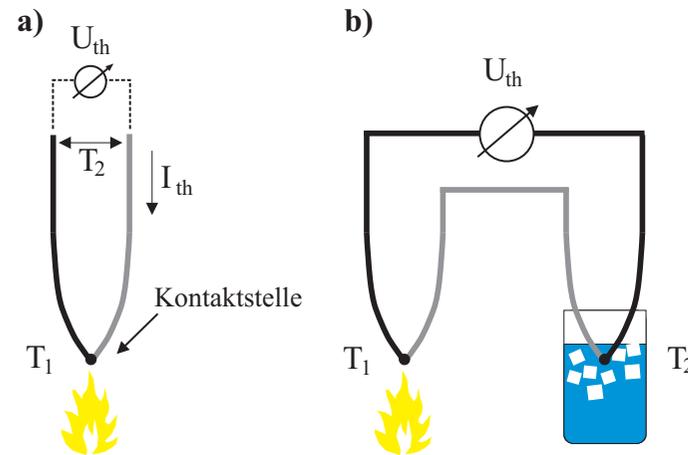


Abbildung 3: Funktionsprinzip eines Thermoelements

V.2 Das Thermoelement

Die Wirkungsweise eines Thermoelements beruht auf dem Seebeck-Effekt: Bringt man zwei unterschiedliche Metalle miteinander in Kontakt, so baut sich an der Kontaktstelle eine elektrische Spannung auf, deren Betrag von der Art des Metalls und der Temperatur abhängt (Abbildung 3 links). Aus dem Metall mit der geringeren Austrittsarbeit fließen Elektronen in das Metall mit der größeren Austrittsarbeit. Es entsteht eine Thermospannung U_{th} . Bei geschlossenem Stromkreis fließt ein Thermostrom I_{th} ; die dafür „benötigte Energie“ wird der Wärmequelle entnommen.

Beträgt die Temperatur an der Kontaktstelle T_1 und an den beiden Enden der Metalle T_2 , so folgt für die Thermospannung:

$$U_{th} = K(T_1 - T_2), \quad (3)$$

wobei K eine Konstante darstellt, die von der Kombination der verwendeten Metalle abhängt.

Thermoelemente werden in Industrie und Technik sehr häufig eingesetzt. Die Vorteile dieser Sensoren sind kleine Dimensionen, gute mechanische und chemische Stabilität, die Anwendbarkeit über einen sehr großen Temperaturbereich sowie die geringen Herstellungskosten. Allerdings besitzen Thermoelemente auch Nachteile. Es lassen sich nur relative Temperaturen messen. Soll die Temperatur T_1 absolut bestimmt werden, so muss die Vergleichstemperatur T_2 bekannt sein. Für einfache Messungen geringer Genauigkeit begnügt man sich mit der ungefähr konstanten Raumtemperatur T_2 als Vergleichstemperatur (Bei Messungen von sehr hohen Temperaturen ist auch diese Methode sehr genau). Für präzise Messungen der absoluten Temperatur wird aber eine konstante Vergleichstemperatur benötigt. Dazu verwendet man ein Thermoelement mit zwei Kontaktstellen (Abbildung 3 rechts), wobei ein Kontakt auf eine definierte Vergleichstemperatur T_2 eingestellt wird.

Die Spannung die an einem Thermoelement anliegt ist sehr gering. Bei dem hier verwendeten Platin-Rhodium Thermoelement beträgt die Spannung bei 50°C $2\ \mu\text{V}$, bei 1000°C $4,9\ \text{mV}$. Die Kennlinie (Zusammenhang Temperatur zu Thermospannung) der verwendeten Thermoelemente liegt in Form von Listen im Versuchsraum aus.

V.3 Das Platinwiderstandsthermometer

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren¹:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2), \quad (4)$$

mit den Koeffizienten

$$A = 3,9083 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$$

$$B = -5,775 \times 10^{-7} [^\circ\text{C}^{-2}].$$

R_0 ist der Nennwiderstand bei 0°C . Für ein Pt100-Thermometer gilt $R_0 = 100\ \Omega$. Damit kann aus dem gemessenen Widerstand R die Temperatur berech-

¹Die DIN IEC 751 legt für den Platin-Widerstand eigentlich zwei Temperaturbereiche fest (-200°C bis 0°C und 0°C bis 850°C), die durch unterschiedliche Polynome definiert sind. Bei diesem Versuch reicht es aber aus, stets die angegebene quadratischen Näherung zu verwenden.

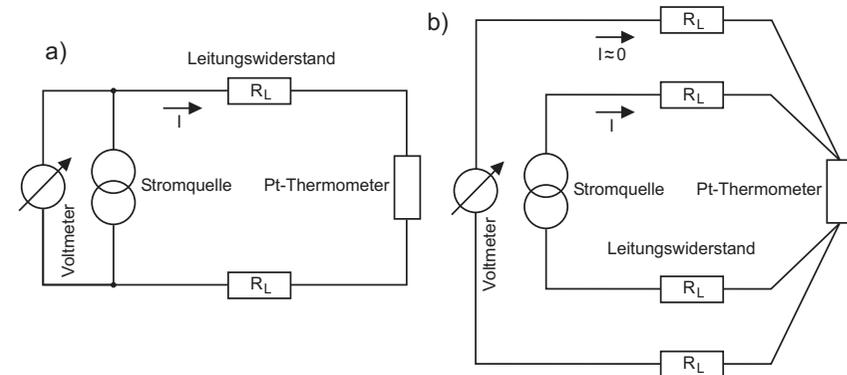


Abbildung 4: a) Zweileiterschaltung und b) Vierleiterschaltung zur Messung des Widerstands eines Pt-Thermometers.

net werden. Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0 A + \sqrt{R_0^2 A^2 - 4R_0 B(R_0 - R)}}{2R_0 B}. \quad (5)$$

Platinthermometer sind in vier Genauigkeitsklassen erhältlich. Die im Praktikum eingesetzten Thermometer sind in der Genauigkeitsklasse B eingeordnet. In dieser Klasse beträgt der Temperaturfehler:

$$\Delta T = 0,30^\circ\text{C} + 0,005 |T|. \quad (6)$$

Der Widerstand eines Pt-Thermometers kann im einfachsten Fall nach dem Ohmschen Gesetz durch zwei verschiedene Methoden bestimmt werden. Entweder wird an den Pt-Widerstand eine konstante Spannung angelegt und der Strom gemessen oder es wird ein konstanter Strom eingepreßt und der Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand gemessen. Bei beiden Messmethoden tritt stets eine Eigenerwärmung des Pt-Thermometers auf, die die eigentliche Temperaturmessung verfälscht. Es ist daher sinnvoll, die Widerstandsmessung mit einem möglichst kleinen, konstanten Messstrom durchzuführen und den Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand mit einem Voltmeter zu messen. Im Praktikum verwenden Sie hierfür eine Konstantstromquelle die einen Strom von $1\ \text{mA}$ liefert. Bei der Spannungsmessung muss berücksichtigt werden, dass der Pt-Widerstand in der Regel an mehr oder weniger langen Zuleitungen angeschlossen

ist, die wiederum selbst einen elektrischen Widerstand besitzen. Bei der Zweileiterschaltung in Abbildung 6 a) geht in die Widerstandsmessung der Widerstand der Messleitungen mit ein. Dieser Messfehler kann durch eine sogenannte Vierleiterschaltung vermieden werden. Dabei dienen zwei Leiter der Stromzufuhr und zwei weitere zur Messung des Spannungsabfalls. Da die Spannungsmessung mit hochohmigen Voltmetern (Innenwiderstand einige $M\Omega$) erfolgt, fließt nur ein sehr kleiner Strom durch die Leitungen und der Spannungsabfall an den Zuleitungen ist vernachlässigbar klein.

V.4 Das Pyrometer

Jeder Körper dessen Temperatur größer als 0 K ist sendet Wärmestrahlung aus, deren Intensität nur von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen $\epsilon = 1$. Die Intensitätsverteilung der emittierten Strahlung eines solchen Körpers wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (7)$$

wobei M_λ die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement dA im Wellenlängenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$ in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt. Die gesamte von einem Körper abgestrahlte Leistung wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben. Integration von Gleichung (7) über die gesamte strahlende Fläche A und über alle Wellenlängen ergibt

$$P = \epsilon(T)\sigma AT^4, \quad (8)$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur beschreiben. Der Faktor $\epsilon(T) \leq 1$ berücksichtigt, dass reale Körper ein kleineres Emissionsvermögen aufweisen als der idealisiert schwarze Körper. Die abgestrahlte Leistung eines Körpers hängt demnach nur von der Fläche und der Temperatur ab. Auf dieser Eigenschaft beruhen berührungslose Pyrometer und Wärmebildkameras.

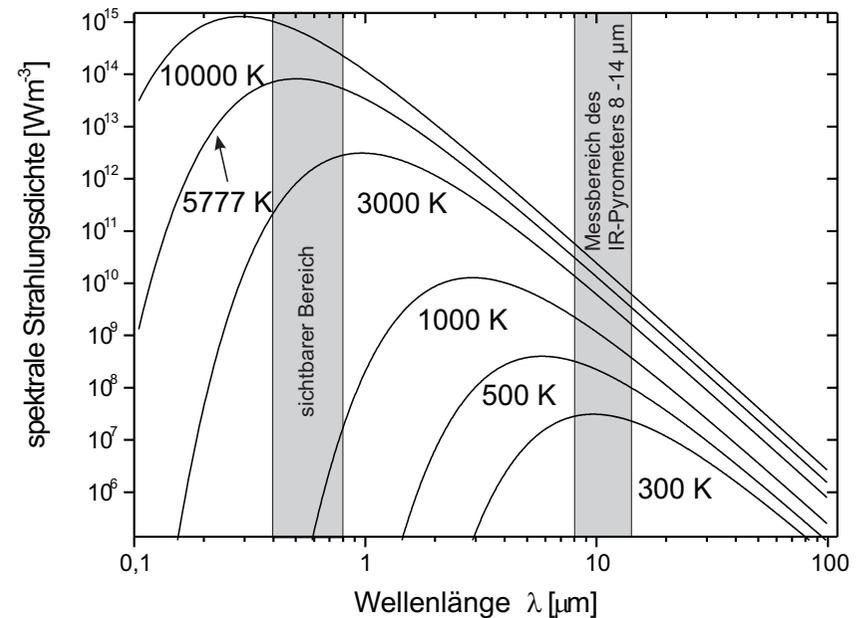


Abbildung 5: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

Bei Zimmertemperatur (≈ 300 K) liegt das Strahlungsmaximum im langwelligen Infrarotbereich bei einer Wellenlänge von etwa $10 \mu\text{m}$ (Abbildung 5). In diesem Bereich arbeiten kommerzielle IR-Pyrometer. Die im Praktikum eingesetzten Pyrometer integrieren die von einem Körper ausgehende Strahlung im Bereich von $8 \mu\text{m}$ bis $14 \mu\text{m}$.

VI Durchführung des Versuchs

Achtung:

Kontakt mit flüssigem Stickstoff bzw. mit Trockeneis verursacht schwere Erfrierungen und Augenschäden. Beim Hantieren mit Trockeneis und flüssigem Stickstoff unbedingt Handschuhe anziehen und Schutzbrille aufsetzen. Da während des Versuchs erhebliche Mengen Stickstoff und Kohlendioxid verdampfen, sollte der Raum gut belüftet werden.

Aufgabe 1: Temperaturmessungen bei erweiterten Umgebungsbedingungen

a) Eichung der Thermometer bei 0°C

Inbetriebnahme des Pt100-Thermometer: Bauen Sie eine Vierleiterschaltung auf. Stecken Sie dazu den Stecker des Pt100-Thermometers in die Adapterbox. Die vier Anschlussleitungen können Sie dann an den 4 mm-Buchsen abgreifen. Verbinden Sie als nächstes je eine weiße und eine rote Buchse mit den entsprechenden Buchsen der Stromquelle. Wenn Sie das Voltmeter an die beiden noch freien Buchsen der Stromquelle anschließen (rote Buchse an den Anschluss Com des Voltmeters), haben Sie eine Zweileiterschaltung (siehe Abbildung 6) und Sie messen den Spannungsabfall über den Kabeln mit. Um eine Vierleiterschaltung zu bekommen, müssen Sie das Voltmeter direkt an die Adapterbox anschließen. Sie sollten bei der folgenden Messung wenigstens einmal beide Schaltungen ausprobieren. Bei 0°C beträgt der Pt100-Widerstand 100 Ω . Bei einem Messstrom von 1 mA erhalten Sie bei der Vierleiterschaltung einen Spannungsabfall von 100 mV. In der Zweileiterschaltung werden Sie einen größeren Wert messen, da Sie die Zuleitungswiderstände mitmessen. Allerdings sind die Kabel relativ kurz und der Effekt daher sehr klein.

Wenn Sie möchten, können Sie beide Schaltungen mit sehr langen Kabeln aufbauen. Ein entsprechendes vieradriges Kabel liegt im Labor aus.

Benutzen Sie für die Messung bei 0°C eine Wasser-Eis-Mischung. Füllen Sie des Becherglas zur Hälfte mit klein zerstoßenem Eis Gießen Sie mit Wasser bis zur Hälfte der Höhe des Becherglases auf. Platzieren Sie anschließend den Glasballon mittig im Becherglas. Die Glaskugel muss völlig mit Wasser bedeckt sein!

Beobachten Sie gleichzeitig die Spannung am Pt100 sowie die am Pyrometer angezeigte Temperatur. Die Temperatur des schmelzenden Eises in Wasser als Fix- und Nullpunkt der später zu erstellenden Temperaturskala muss möglichst gut erreicht werden. Sie müssen dazu das Minimum des Spannungswertes des Pt100-Thermometers abwarten. Wenn sich die Spannung stabilisiert hat, protokollieren Sie die Spannung, den Druck des Gasvolumens und die Pyrometer-temperatur. Die Pyrometertemperatur wird auf der Wasseroberfläche gemessen. Sie wird sich systematisch von der „wahren“ Temperatur unterscheiden, weil das Absorptionsvermögen von Wasser nicht Eins ist. Zusätzlich steht Ihnen ein Flüssigkeitsthermometer zu Verfügung, um die Temperatur des Wasser-Eis-Gemisches zu überprüfen. Allerdings müssen Sie berücksichtigen, dass diese Thermometer nur genau sind, wenn die auf dem Thermometer angegebene Immersionstiefe angegeben ist. Manche der Thermometer müssten für eine genaue Anzeige der Temperatur vollständig in das zu messende Medium eingetaucht werden. Folglich kann damit nur die Temperatur abgeschätzt werden. **Gerade für die Ablesung höherer Temperaturwerte empfiehlt es sich, die Tabelle mit der Pt100-Kennlinie für die Temperaturbestimmung zu nutzen!**

b) Temperaturmessung bis $T = 100^\circ\text{C}$

Schalten Sie jetzt die Heizplatte ein (**Heizeinstellung max. auf 300°C stellen, sonst kann das Heizelement durchbrennen!**) an und starten zusätzlich den Rührmechanismus, sodass sich kein sichtbarer Wirbel ausbildet. Warten Sie bis das Wasser auf etwa 10°C erhitzt wurde. Registrieren Sie bei Erreichen dieses Temperaturwertes Druck, Pyrometeranzeige und Pt100-Spannung. Wiederholen Sie diese Messungen in Schritten von ungefähr 10 Grad. Welcher Wert sich letztlich einstellt, ob 10°C oder eben $11,5^\circ\text{C}$, ist völlig unerheblich. Warten sie bis sich die Wassertemperatur um ca. 10°C erhöht hat und lesen Sie dann für jeden Schritt die Spannung am Pt100, den Druck und die Pyrometeranzeige ab. Nehmen Sie als letzten Messpunkt die Temperatur des siedenden Wassers auf. Lesen Sie den Luftdruck am Barometer im Gang ab und notieren Sie diesen Wert. Achtung: Das Pyrometer nicht direkt über das Wasser halten sondern von der Seite schräg auf die Wasseroberfläche richten. Sonst kann eindringender Wasserdampf die Messwerte verfälschen.

c) Temperatur von Trockeneis und flüssigem Stickstoff am Siedepunkt

Lassen Sie den Glasballon zunächst einige Zeit abkühlen. Füllen Sie dann das Dewargefäß mit Trockeneis und Alkohol. Durch den Alkohol wird der Wärmekontakt zum Glasballon verbessert. Verwenden Sie dazu die schon fertige Trockeneis- Alkoholmischung in den beiden Dewargefäßen auf dem Waschbecken. Geben Sie wenn nötig noch etwas Trockeneis hinzu. Warten Sie zunächst bis sich die Temperatur stabilisiert hat. Dabei gut umrühren! Sobald sich die Messwerte stabilisiert haben, notieren Sie die Spannung und den Druck. Das Pyrometer ist bei diesen tiefen Temperaturen nicht mehr einsetzbar.

Schütten Sie nach Beendigung der Messung das Trockeneis-Alkohol Gemisch wieder zurück in die Dewargefäße auf dem Waschbecken.

Füllen sie jetzt das Dewargefäß schrittweise mit flüssigem Stickstoff und schieben Sie die Glaskugel **langsam** ein bis sie ganz vom Stickstoff bedeckt ist. Warten Sie bis die starke Verdampfung aufgehört hat und sich die Temperaturwerte stabilisieren. Registrieren sie PT100-Spannung und den Druck im Gasthermometer.

Nach Beendigung der Messung gießen Sie bitte den restlichen flüssigen Stickstoff zurück in das große Dewargefäß.

Aufgabe 2: Messung von sehr hohen Temperaturen mit dem PtRh-Thermoelement

Messen Sie die Temperaturverteilung in der Flamme mit dem PtRh-Thermoelement bei starker Luftzufuhr und bei schwacher Luftzufuhr des Gasbrenners. Das PtRh-Thermoelement besteht aus zwei Platindrähten, die aber unterschiedlich stark mit Rhodium legiert sind. Achtung: Beim Versuch sind verschiedene Thermoelemente vorhanden (Typ S und Typ B). Achten Sie darauf die richtige Eich-tabelle zu verwenden. Zeichnen Sie die ungefähre Gestalt der Flamme und tragen Sie für verschiedene Stellen die Thermospannung ein (fünf Messungen bei starker und schwacher Luftzufuhr). Drehen Sie nach Versuchsende das Gas ab und schütten Sie das Wasser und das Eis aus.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Tragen Sie die bei den Fixpunkten gemessenen Druckwerte gegen die Temperatur in ein Diagramm ein. Wählen Sie auf der x-Achse einen Temperaturbereich von -280°C bis 110°C . In einem ersten Diagramm eichen Sie die

Temperaturskala, indem Sie die Temperatur des Wasser-Eisgemisches als 0°C ansetzen. Tragen Sie dort den gemessenen Druck ein. Einen zweiten Eichpunkt erhalten Sie, indem Sie die den Druck p_{gem} , den Sie bei der Temperatur des kochenden Wassers gemessen haben. Dieser Messwert muss auf Normalbedingung umrechnen:

$$p_{NB} = p_{gem} \frac{1013,25 \text{ hPa}}{p_{LD}}, \quad (9)$$

Dabei beschreibt p_{LD} den gemessenen Luftdruck und p_{NB} den gemessenen Druckwert umgerechnet auf Normalbedingung. Ordnen Sie diesem Druckwert die Temperatur 100°C zu und tragen Sie den Wert in das Diagramm ein. Jetzt können sie die Eichgerade des Gasthermometers durch beide Messpunkte zeichnen. Bei welcher Temperatur wird der Druck Null? Tragen Sie jetzt den Druckmesswert bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs ein. Welchen Temperaturwert lesen sie ab? Wie vergleicht sich dieser mit dem Literaturwert $T_{N_2} = 77 \text{ K} (-195,8^{\circ}\text{C})$.

Sie können diesen Literaturwert auch als weiteren Eichpunkt in einem zweiten Diagramm benutzen um den absoluten Nullpunkt besser zu bestimmen. Bei welcher Temperatur bekommen Sie jetzt den Druck $p = 0 \text{ hPa}$? Tragen Sie schließlich auch den Druck ein, den Sie bei der Messung mit Trockeneis aufgenommen haben. Welche Temperatur erhalten Sie dafür? Ergänzen Sie das Diagramm durch eine Kelvin-Skala.

Bestimmen Sie mit Hilfe der zuvor angefertigten Eichkurve die aus den gemessenen Druckwerten resultierenden Temperaturwerte des Gasthermometers im Bereich von 0°C bis 100°C .

Tragen Sie den Widerstand des Pt100- Elements gegen die Temperatur in ein weiteres Diagramm ein. Welchen Zusammenhang finden Sie? Legen Sie durch die Messwerte im Bereich von 0°C bis 100°C eine Ausgleichsgerade. Vergleichen Sie die Steigung mit dem linearen Glied des Polynoms in Gleichung (4) und interpretieren Sie knapp das Ergebnis des Vergleichs.

Tragen Sie die Temperaturmessungen mit dem Pyrometer gegen die Temperatur des Gasthermometers in einem vierten Diagramm auf. Was beobachten Sie? Wie erklären Sie Ihre Beobachtung?

Aufgabe 2: Skizzieren Sie die Flammgestalt und tragen Sie die Temperaturen für schwache und für starke Luftzufuhr ein. Die zu den Thermospannungen

gehörigen Temperaturen sind der ausgelegten Eich-tabelle zu entnehmen.

Versuch 42 Wärmekapazität



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Kalorimeter mit Magnetrührer
- Heizplatte mit Glasbecher
- Stativ mit Drahhaken
- 3 große Versuchskörper (Graphit, Aluminium, Blei)
- 3 kleine Versuchskörper für den Versuch bei Stickstofftemperatur

- Dewargefäß für flüssigen Stickstoff
- elektronisches Thermometer
- elektronische Waage
- Stoppuhr
- Schutzbrille und Schutzhandschuhe

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Spezifische Wärmekapazität, Mischungskalorimeter, Dulong-Petit'sches Gesetz, Grundbegriffe der kinetischen Wärmetheorie (Temperatur, Äquipartitionsprinzip, Freiheitsgrade). Für Physiker: Debey- Modell der spezifischen Wärme (qualitativ).

Verständnisfragen:

1. Wie können Sie Temperatur definieren?
2. Wo können Sie im Alltag beobachten, dass Wärme eine Energieform ist? Was bedeutet Wärme auf atomarer bzw. molekularer Ebene?
3. Was für Freiheitsgrade gibt es in Gasen bzw. in Festkörpern? Was besagt das Äquipartitionsprinzip? Was versteht man unter dem „Einfrieren“ von Freiheitsgraden?

- Schildern Sie das Messprinzip eines Mischungskalorimeters und leiten Sie die entscheidenden Gleichungen her, denen man die spezifische Wärme entnehmen kann.
- Wie hängt die Wärmekapazität mit der Anzahl der Freiheitsgrade zusammen? Was versteht man genau unter „Freiheitsgrad“? Was besagt das Dulong-Petit-Gesetz? Leiten Sie es her. Gilt es für alle Festkörper? Wie sieht der Temperaturverlauf der Wärmekapazität qualitativ aus?

IV Aufgabe

- Messung der spezifischen Wärmekapazität verschiedener Festkörper mit der Mischungsmethode im Temperaturbereich zwischen 20°C und 100°C.
- Messung der spezifischen Wärmekapazitäten im Bereich von 20°C und -195°C.

V Grundlagen

Wird einem Körper die Wärmemenge Q zugeführt, so erhöht sich, sofern kein Phasenübergang stattfindet, seine Temperatur um ΔT . Die Größe

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (1)$$

heißt Wärmekapazität des entsprechenden Körpers. Sie gibt an, welche Wärmemenge einem Körper zugeführt werden muss um seine Temperatur um 1°C zu erhöhen. Die Wärmekapazität hängt von der Masse bzw. der Stoffmenge des Körpers ab. Daher unterscheidet man noch die spezifische Wärmekapazität oder einfach spezifische Wärme

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \quad (2)$$

und die molare Wärmekapazität (Molwärme)

$$c_{mol} = \frac{M}{m} \frac{Q}{\Delta T}, \quad (3)$$

wobei m die Masse des Körpers und M die molare Masse beschreiben.

V.1 Theorie der spezifischen Molwärme

Die innere Energie U eines Festkörpers ist die Summe der Schwingungsenergien aller Atomrümpfe, die um ihre Gleichgewichtslage im Festkörper schwingen. Diese Schwingungen sind in guter Näherung harmonisch, so dass im zeitlichen Mittel gleich viel Energie in der kinetischen und in der potentiellen Energie steckt. Jeder Atomrumpf hat drei Schwingungsfreiheitsgrade, ein Mol hat also insgesamt $3N_A$ Schwingungsfreiheitsgrade.

In der klassischen Physik hat nach dem Äquipartitionsprinzip jeder dieser Freiheitsgrade die mittlere Energie $\langle E \rangle = kT$ (je $1/2kT$ für die kinetische und die potentielle Energie). Damit wäre die innere Energie eines Mols $U_{Mol} = 3kTN_A = 3RT$ und damit die spezifische Molwärme $C_V = 3R$, die Vorhersage der Dulong-Petit'schen Regel. Offensichtlich ist diese Vorhersage schon bei Zimmertemperatur für leichte Elemente wie Be, C, Si, Al falsch. Dies war um 1900 gut bekannt und eine der „zwei dunklen Wolken“ über der klassischen Physik, wie es Lord Kelvin in einem berühmten Vortrag 1900 ausdrückte. (Die andere Wolke war das Ätherproblem bei der Lichtausbreitung). Die Lösung liefert die Quantenmechanik: Oszillatoren haben diskrete, gequantelte Energiezustände der Energie $E_\nu = h\nu$ und die Wahrscheinlichkeit w , dass ein Zustand bei der Temperatur T angeregt ist, ist gegeben durch die Bose-Einstein Statistik

$$w(T, E_\nu) = \frac{1}{\exp(E_\nu/kT) - 1}, \quad (4)$$

wie es Planck 1900 bei der Interpretation seiner Strahlungsformel für einen schwarzen Temperaturstrahler postuliert hatte.

Der Erste, der dies erkannte war 1906 Albert Einstein, der sich lange mit der Interpretation und den Konsequenzen der Planck'schen Strahlungsformel befasst hatte. In seinem Modell der spezifischen Wärme betrachtete er N_A unabhängige 3-dimensionale Oszillatoren pro Mol, die alle dieselbe Eigenfrequenz hatten. Damit konnte er die damaligen experimentellen Daten befriedigend beschreiben und zum ersten Mal erklären, warum die spezifische Wärme mit der Temperatur abnimmt. In den folgenden Jahren wurden dann die spezifischen Molwärmern von Festkörpern bei immer tieferen Temperaturen genauer gemessen. Dabei zeigten sich systematische Abweichungen vom Einsteinschen Modell, die 1911 von Peter Debye behoben wurden.

Die Atomrümpfe in einem Festkörper schwingen nicht unabhängig voneinander, sie sind ganz im Gegenteil stark gekoppelt. Die Schwingungsanregungen sind

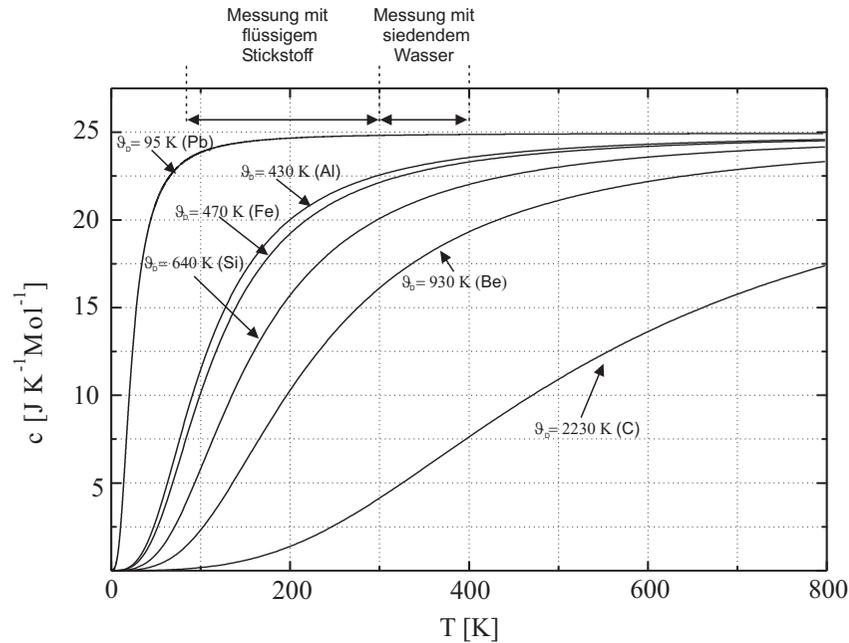


Abbildung 2: Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme nach dem Debye-Modell für verschiedene Elemente. Die Debytemperatur für Kohlenstoff ist hier für die Modifikation des Diamanten angegeben.

daher gekoppelte Schwingungsmoden, die heute Phononen heißen und ein Mol eines atomaren Festkörpers hat i.A. $3N_A$ unterschiedliche Schwingungsfrequenzen ν_i , die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $w(E_\nu, T)$ angeregt sind. Die innere Energie ist daher gegeben durch

$$U_{Mol} = \sum_{i=1}^{N_A} g(\nu_i) h\nu_i / (\exp[h\nu_i/kT] - 1) \quad (5)$$

Das Schwingungsspektrum ist im Allgemeinen nicht bekannt und schwer zu berechnen. Debye hat daher das Schwingungsspektrum in seinem Modell als quasi kontinuierlich angenommen und durch die Spektraldichte $g(\nu) \approx \nu^2$ angenähert, wobei er diese aber bei der Grenzfrequenz abschnitt, die $3N_A$ Schwingungszuständen entsprach. In seiner Theorie gibt es daher nur einen material-

abhängigen Parameter, die Debye-Temperatur Θ_D und der Verlauf der spezifischen Molwärmern mit der Temperatur hängt nur von T/Θ_D ab. Dieses einfache Modell beschreibt die experimentellen Daten recht gut und daher wird die Debye-Temperatur i.A. für die Charakterisierung der Wärmekapazität von Festkörpern genutzt. Stoffe wie Be, C, Al und Si haben hohe Debye-Temperaturen - sie haben ein „hartes“ Schwingungsspektrum, d.h. hohe Eigenfrequenzen, die erst bei sehr hohen Temperaturen angeregt werden können (siehe Abbildung 2). Im Versuch sollen am Ende die Debytemperaturen der Proben aus der gemessenen Temperaturabhängigkeit von C_V abgeschätzt werden.

V.2 Prinzip der Messung

Das Verfahren der Mischungsmethode im Wasserkalorimeter beruht darauf, dass sich verschieden warme Körper bei Berührung durch Austausch von Wärmemengen in ihrer Temperatur ausgleichen. Ein Probekörper mit der Temperatur T_1 wird in einem Kalorimetergefäß in ein Wasserbad der Temperatur T_2 gebracht. Es stellt sich eine Mischungstemperatur \bar{T} ein. Nach dem Energiesatz gilt dann für den Fall $T_1 > T_2$: Die vom Probekörper abgegebene Wärme

$$Q = m_x c_x (T_1 - \bar{T}) \quad (6)$$

ist gleich der vom Wasser und dem Kalorimeter aufgenommenen Wärmemenge

$$Q = (m_W c_W + W)(\bar{T} - T_2) \quad (7)$$

Die Größe W stellt die Wärmekapazität des Kalorimeters dar, die auch als Wasserwert bezeichnet wird. Der Hersteller gibt für die verwendeten Kalorimeter einen Wert von ca. $70 \frac{J}{K}$ an, dieser Wert ist aber stark vom Kalorimeter und dem Zustand der Wärmeisolierung ab. Der Index w bezieht sich auf Wasser, x auf den Probekörper. Daraus ergibt sich die gesuchte spezifische Wärmekapazität c_x zu

$$c_x = \frac{(m_W c_W + W)(\bar{T} - T_2)}{m_x (T_1 - \bar{T})}. \quad (8)$$

Die Wärmekapazität von Wasser beträgt im Temperaturbereich von 15°C bis ungefähr 65°C $c_w = (4,186 \pm 0,004) \text{ J}/(\text{gK})$.

Beim zweiten Versuchsteil wird ein Probekörper mit der Temperatur T_1 (Zimmertemperatur) in flüssigem Stickstoff ($T_2 = -195,8^\circ\text{C}$) abgekühlt. Aus der bekannten Verdampfungswärme Q_V und der verdampften Menge des Stickstoffes

m_V kann die abgegebene Wärme Q des Probekörpers und daraus nach

$$Q = Q_V m_v = m_x c_x (T_1 - T_2) \quad (9)$$

der Wert c_x berechnet werden.

V.3 Hinweise zur Fehlerrechnung

Überlegen Sie sich genau, welche Fehler relevant sind und welche vernachlässigt werden können. Da Sie bei diesem Versuch mit Temperaturdifferenzen arbeiten, sollten Sie sich hier ebenfalls Gedanken dazu machen, inwieweit der angegebene Fehler des Thermometers ein statistischer oder ein systematischer Fehler ist und wie Sie das entsprechend in Ihrer Auswertung berücksichtigen sollten. Schauen Sie hierzu auch gerne nochmal in die Einführung und die zwei Abschnitte zur Fehlerrechnung.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Vorbereiten des Wasserkalorimeters

Bei allen Messungen muss möglichst schnell ein Temperaturgleichgewicht erreicht werden. Dazu muss das Wasser gut durchmischt werden. Um Ihnen die Arbeit zu vereinfachen steht ein Magnetrührer zur Verfügung. Probieren Sie diesen vor Versuchsbeginn aus, indem Sie das Kalorimetergefäß zu drei Vierteln mit VE-Wasser¹ füllen und es zentrisch auf den Magnetrührer stellen. Schalten Sie den Rührer ein und beobachten Sie wie das Wasser durchmischt wird. Wenn das Gefäß richtig steht, hören Sie ein charakteristisches Ratschen des Magneten über dem Kalorimeterboden. Optimieren Sie den Rührvorgang durch Verschieben des Kalorimeters auf dem Rührer. Achten Sie bei den Versuchen- bei denen ja der Deckel geschlossen ist- darauf, dass Sie das Rührgeräusch deutlich hören. Bei der Messung mit den großen Probekörpern müssen Sie darauf achten, dass das Thermometer diese nicht berührt. Platzieren Sie die Körper daher nicht zentrisch im Kalorimeter, sondern z.B. auf der linken Seite. Wenn Sie den Deckel aufsetzen, muss das Thermometer dann auf der rechten Seite im Kalorimeter eintauchen.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Massen aller Probekörper

Aufgabe 3: Bestimmung des Wasserwertes

Bestimmen Sie zunächst die Masse des unbefüllten Kalorimeters ohne Deckel (Temperaturfühler herausnehmen). Überzeugen Sie sich vor dem Wiegen, dass das Kalorimeter sowohl innen als auch außen völlig trocken ist. Andernfalls trocknen Sie es mit einem Tuch gut ab. Stellen Sie das Kalorimetergefäß auf den Magnetrührer. Messen Sie mit dem Digitalthermometer die Zimmertemperatur. Diese entspricht der Anfangstemperatur T_2 des Kalorimeters. Mit der Heizplatte wird Wasser auf $T \approx 50^\circ\text{C}$ erhitzt. Die Heizplatte wird abgeschaltet und gewartet bis die Temperatur sich unter ständigem Umrühren nicht mehr ändert. Notieren Sie diese Temperatur als Anfangstemperatur T_1 . Starten Sie anschließend die Uhr und befüllen Sie das Kalorimeter zur **Hälfte** mit dem heißen Wasser. Legen Sie den Deckel schnell auf und schalten sie den Magnetrührer ein. Die Temperatur des Wassers im Kalorimeter wird fünf Minuten lang alle 30 Sekunden gemessen, bis sich ein linearer Abfall ergibt (siehe Abbildung 3).

¹Voll Entsalzenes Wasser

Messen Sie abschließend das Gewicht des befüllten Kalorimeters ohne Deckel.

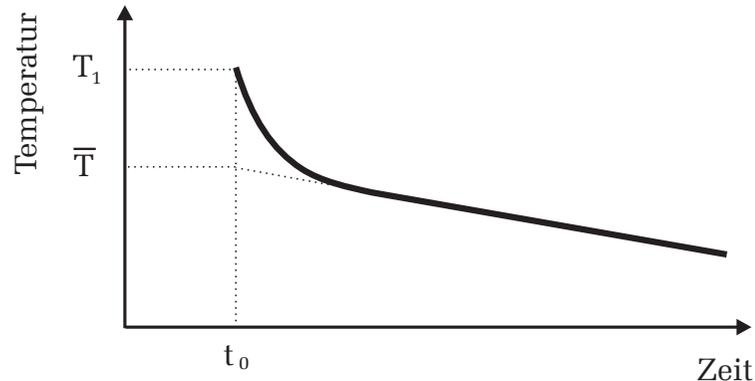


Abbildung 3: Zur Bestimmung des Wasserwertes

Hieraus können Sie die Masse des Wassers berechnen. Der Temperaturengleich im Kalorimetergefäß erfolgt so schnell, dass er mit dem Thermometer nicht verfolgt werden kann. Der Wärmeverlust an die Außenluft während des Temperaturengleichs ist vernachlässigbar. Die Mischungstemperatur \bar{T} zum Zeitpunkt t_0 des Einfüllens wird durch Extrapolation des gemessenen Temperaturverlaufs bestimmt. Der Wasserwert kann aus der Bilanz der Wärmemengen bestimmt werden:

$$W = m_W c_W \frac{T_1 - \bar{T}}{\bar{T} - T_2} \quad \text{für } T_1 > T_2. \quad (10)$$

Aufgabe 4: Messung der spezifischen Wärmekapazitäten der Probekörper mit kochendem Wasser

Hinweise zur Durchführung von Aufgabe 5

Um die benötigte Zeit zur Versuchsdurchführung zu verringern, sollten Sie für Aufgabe 5 das Wasser im Wasserkocher zum Sieden bringen und **anschließend nur soviel in das Becherglas füllen, wie nötig ist um die Probekörper komplett im Wasser unterzutauchen**. Füllen Sie mehr Wasser ein, braucht die Heizplatte deutlich länger bis das Wasser wieder siedet. Ein Richtwert sind ca. 400 ml. Achten Sie auch darauf, dass die Heizung der Heizplatte **maximal auf 300°C** eingestellt ist, da sonst das Heizelement durchbrennen könnte.

Zur Messung der spezifischen Wärmekapazität wird das Kalorimeter zu etwa

drei Vierteln mit frischem VE-Wasser gefüllt und erneut gewogen um die Wassermenge zu bestimmen. Es werden die großen Probekörper benutzt. Füllen Sie den Glasbecher zur Hälfte mit Wasser und hängen Sie einen Probekörper mit Hilfe des Stativs in das siedende Wasser. Der Körper darf nicht den Boden des Glasbechers berühren, da er sich sonst über 100°C aufheizen würde. **Der Probekörper sollte mindestens 5 Minuten lang im kochenden (sprudelnden) Wasser verbleiben.** Die Temperatur T_1 des kochenden Wassers lässt sich aus dem Luftdruck p gemäß

$$T_1 = 100^\circ\text{C} + 0,0276^\circ\text{C}/\text{hPa} (p - 1013 \text{ hPa}) \quad (11)$$

bestimmen, wobei p den Luftdruck in hPa beschreibt. Messen Sie dazu den Luftdruck. Schon vor dem Einbringen des ersten Körpers ist die Temperatur des Wassers im Kalorimeter für einige Minuten jede Minute zu messen. Vergessen Sie nicht den Magnetrührer einzuschalten. Wenn der Probekörper mit Sicherheit die Temperatur des kochenden Wassers angenommen hat, wird er aus dem Wasserbad entfernt, kurz abgetropft und so schnell wie möglich zentrisch versetzt auf das Gitter im Kalorimeter gestellt. Kalorimeter sofort verschließen und darauf achten, dass das Thermometer nicht den Probekörper berührt. Notieren Sie alle 10 Sekunden die Temperatur. Messen Sie so lange die Temperatur bis ein Temperaturmaximum erreicht wird, d.h. die Temperatur im Kalorimeter wieder zu fallen beginnt. Die Mischungstemperatur \bar{T} entspricht dann dem gemessenen Temperaturmaximum. Die Messungen mit den verschiedenen Probekörpern können hintereinander im selben Wasserbad durchgeführt werden. Bestimmen Sie jedoch vor jeder Messung erneut durch Wägung des Kalorimeters die Masse des Wassers.

Aufgabe 5: Messung der spezifischen Wärmekapazitäten der Probekörper mit flüssigem Stickstoff

Verwenden Sie für diese Messung die kleinen Probekörper. Füllen Sie den Dewar zu 3/4 mit flüssigem Stickstoff, stellen Sie ihn auf die Waage und warten Sie den Temperaturengleich ab. Notieren Sie das Anfangsgewicht. Anschließend lässt man den Probekörper langsam an einem Faden in den Stickstoff eintauchen und wartet die Beendigung des Siedens ab. Daraufhin wird der Probekörper herausgenommen und das Endgewicht bestimmt. Die Differenz von Anfangs- und Endgewicht entspricht der verdampften Menge Stickstoff. Über die Verdampfungswärme wird daraus die abgegebene Wärmemenge bestimmt. Die für die Rechnung benötigten Größen sind im Anhang zusammengefasst. Schütten Sie

den restlichen Flüssigstickstoff zurück in den großen Dewar.

VII Auswertung

Aufgabe 1: Berechnen Sie die spezifischen Wärmekapazitäten sowie die Molwärmen der jeweiligen Probekörper im Temperaturbereich 20°C bis 100°C und vergleichen Sie diese mit den Literaturwerten sowie mit dem Gesetz von Dulong-Petit.

Aufgabe 2: Es sind wieder die spezifischen Wärmekapazitäten und die Molwärmen zu berechnen. Beachten Sie dabei, dass diese eine Funktion der Temperatur sind. **Überlegen Sie, welche Größe Sie tatsächlich bestimmt haben.**

Vergleich der Ergebnisse beider Messungen: Rechnen sie für alle Proben das Verhältnis der spezifischen Molwärme bei tiefer Temperatur zu der bei hoher Temperatur mit Fehler aus. Für welche Festkörper stellen sie eine signifikante Abnahme der Molwärme mit T fest? Nutzen sie die aus der Debyetheorie bestimmte Kurve für dieses Verhältnis, um die Debyetemperatur der Stoffe zu bestimmen. Am Ende der Auswertung sollte eine Tabelle stehen, in der alle relevanten Messgrößen für Ihre Proben mit Fehlerangabe stehen.

VIII Anhang

Siedetemperatur von fl. Stickstoff	$T_S = -195,8 \text{ °C}$
Verdampfungswärme von fl. Stickstoff	$Q_V = 199 \text{ J/g}$
Rel. Atommasse von Blei	$M_{\text{Pb}} = 207,2 \text{ g/mol}$
Rel. Atommasse von Aluminium	$M_{\text{Al}} = 26,98 \text{ g/mol}$
Rel. Atommasse von Graphit	$M_C = 12,01 \text{ g/mol}$

Literaturwerte:

Spez. Wärme von Blei (300 K)	$c_{\text{PB}} = 0,129 \text{ J/(gK)}$
Spez. Wärme von Aluminium (300 K)	$c_{\text{Al}} = 0,90 \text{ J/(gK)}$
Spez. Wärme von Graphit (300 K)	$c_C = 0,709 \text{ J/(gK)}$

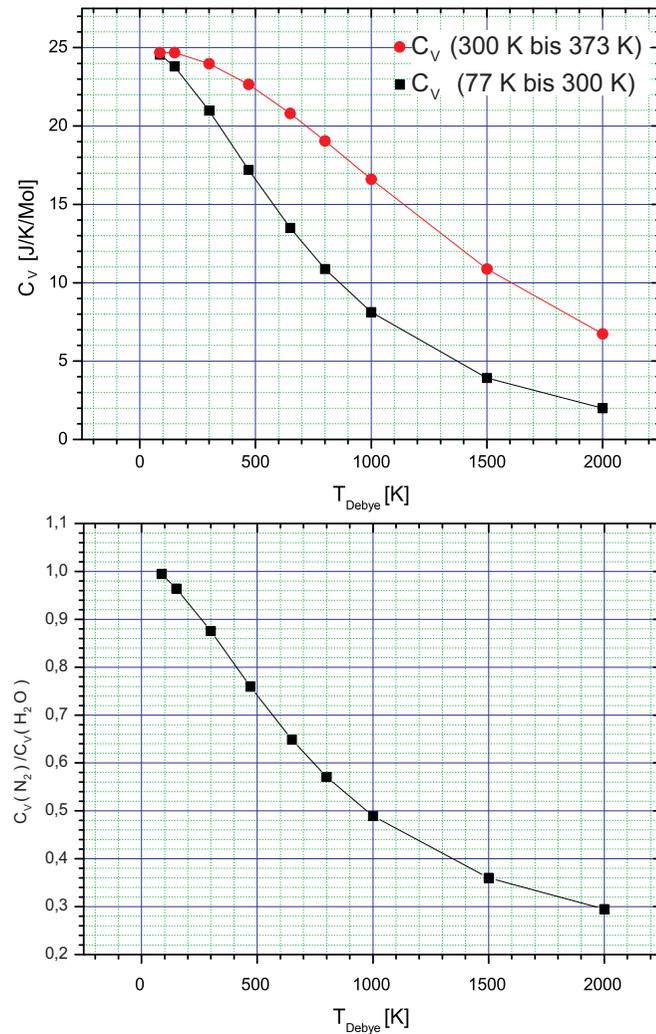


Abbildung 4: Oben: Spezifische Wärme beim Abkühlen von Zimmertemperatur auf die Temperatur des flüssigen Stickstoffs bzw. beim Abkühlen von der Temperatur des siedenden Wassers auf Zimmertemperatur als Funktion der Debye-Temperatur. Unten: Verhältnis der spezifischen Wärme beider Temperaturbereiche.

Grundlagen der Radioaktivität

I Das Geiger-Müller Zählrohr

Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Nachweisgerät für ionisierende Strahlung (α -, β -, γ und Röntgenstrahlen). Es besteht aus einem Metallzylinder und einem darin axial verlaufenden Anodendraht (Abbildung 1). Das Rohr ist an beiden Enden fest verschlossen und mit einem geeigneten Gasgemisch gefüllt, beispielsweise Argon und Alkoholdampf. Soll mit dem Zählrohr auch α -Strahlung detektiert werden, so benötigt man ein sogenanntes Fensterzählrohr. Bei diesem ist eine Stirnseite mit einem nur schwach absorbierenden Fenster (z.B. Glimmer) versehen, so dass auch α -Teilchen in das Zählrohr eindringen können. Zwischen dem Anodendraht und dem Metallzylinder liegt eine Spannung von einigen 100 bis 1000 Volt, die je nach Gasfüllung und Abmessungen des Zählrohrs eingestellt werden muss.

Das Grundprinzip eines Zählrohres beruht auf der Ionisation des Füllgases durch ionisierende Strahlung. Gelangt ein schnelles, elektrisch geladenes Teilchen, z.B. ein β -Teilchen, in das Zählrohr, so entstehen durch Ionisation des Zählgases längs der Bahn des Teilchens freie Elektronen und positiv geladene Ionen. Die Elektronen werden aufgrund des elektrischen Feldes in Richtung des Anodendrahtes beschleunigt und können durch Stöße weitere Gasmoleküle ionisieren. Diese freien Elektronen leiten eine Gasentladung ein, die jedoch bei geeigneter Wahl der Spannung und einem entsprechend dimensionierten Vorwiderstand, nach etwa 10^{-5} Sekunden selbst erlischt. Bei dieser Gasentladung fließt für kurze Zeit ein Strom im Zählrohr, der an dem Widerstand einen Spannungsimpuls verursacht. Dieser lässt sich elektronisch verstärken und mit einer Zählerschaltung registrieren.

I.1 Kennlinie eines Zählrohres

Die genauen Vorgänge im Zählrohr sind etwas komplizierter und hängen besonders von der Zählrohrspannung ab:

Dringt ionisierende Strahlung in das Zählrohr ein, so ist die Anzahl der primär erzeugten Ladungsträger stets proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. Bei kleinen Zählrohrspannungen erreicht aber nur ein Teil

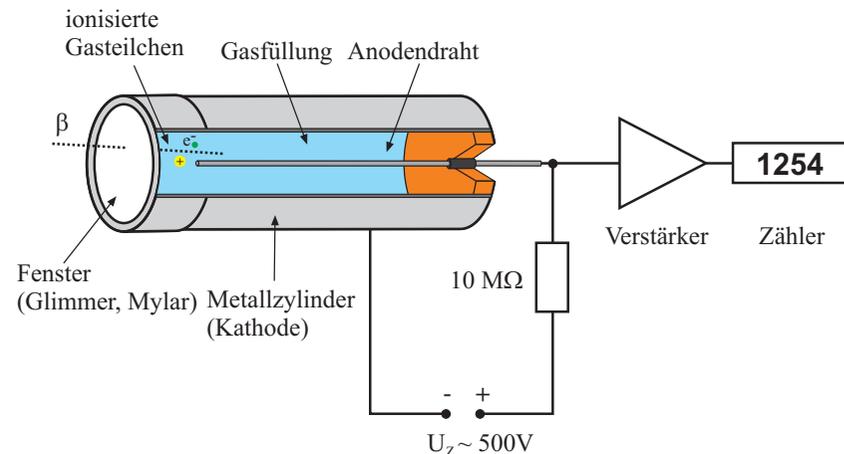


Abbildung 1: Aufbau eines Fensterzählrohrs.

der Primärelektronen den Anodendraht, der Rest geht durch Rekombinationen verloren. Mit zunehmender Spannung sinkt die Rekombinationswahrscheinlichkeit und nahezu alle Primärelektronen gelangen zur Anode. Der Strom durch das Zählrohr ist in diesem Spannungsbereich proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. In diesem Bereich arbeitet beispielsweise eine Ionisationskammer zur Messung der Primärdosisleistung. Im Versuch „Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen“ werden Sie sich mit diesem Gerät¹ noch genauer beschäftigen. Wird die Zählrohrspannung weiter erhöht, so werden die Primärelektronen irgendwann so stark beschleunigt, dass sie in der Lage sind durch Stöße weitere Gasmoleküle zu ionisieren. Es entstehen Sekundärelektronen dessen Anzahl allerdings immer noch proportional zur Zahl der Primärelektronen ist. Dieser Spannungsbereich wird als Proportionalbereich bezeichnet. Bei noch höheren Spannungen werden neben den primär erzeugten Elektronen, auch die Sekundärelektronen so stark beschleunigt, dass diese selbst das Füllgas ionisieren. Die Zahl der erzeugten Elektronen steigt derart an, dass jedes einfallende Teilchen eine Elektronenlawine längs des Anodendrahtes hervorruft. Damit die Gasentladung nach kurzer Zeit wieder abklingt, ist dem Zählrohr ein Löschgas (z.B. Alkoholdampf) beigemischt. Dadurch erlischt die

¹Bei diesem Versuch wird allerdings kein Zählrohr eingesetzt, sondern ein Aufbau mit einer anderen Geometrie. Das Grundprinzip entspricht aber den Erläuterungen im Text.

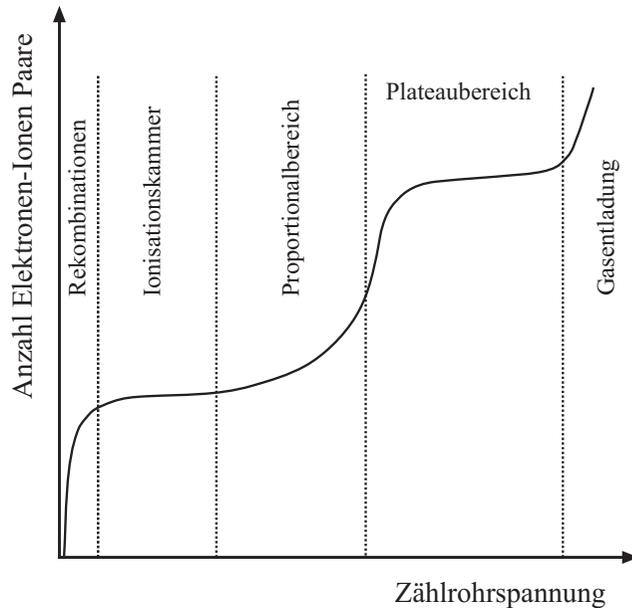


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Charakteristik eines Zählrohrs.

Entladung nach einigen 10^{-5} s von selbst. **In diesem sogenannten Plateaubereich (bzw. Geiger-Müller-Bereich oder Auslösebereich) erzeugt jedes einfallende Teilchen, unabhängig von seiner Energie, ein gleich großes Entladungssignal.** Allerdings geht dabei auch jegliche Information der Energie der einfallenden Strahlung verloren. Ein im Auslösebereich betriebenes Zählrohr eignet sich daher nur zur Detektion von ionisierender Strahlung und wird speziell für Zählverfahren verwendet. Daher der Name Zählrohr. Eine weitere Erhöhung der Zählrohrspannung bewirkt zunächst keine Erhöhung der Zahl der erzeugten freien Elektronen. Jede einfallende ionisierende Strahlung bewirkt ja bereits, dass das Zählrohr von einer Elektronenlawine durchsetzt wird. Die Zählrohrkennlinie verläuft in diesem Bereich daher sehr flach, d.h. plateauartig. Wird die Zählrohrspannung weiter erhöht, so kommt man irgendwann in den Bereich, in dem eine Dauerentladung gezündet wird. Diese klingt nicht mehr selbstständig ab und führt in der Regel zur Zerstörung des Zählrohrs.

I.2 Der Plateaubereich

Bei vielen Experimenten zur Radioaktivität ist man nur daran interessiert, bestimmte Ereignisse nachzuweisen. Ein Beispiel ist der radioaktive Zerfall eines instabilen Elements, bei dem man die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenen Atome messen möchte. Ein anderes Beispiel sind Absorptionsmessungen von radioaktiver Strahlung. Hierbei möchte man untersuchen, welcher Bruchteil der einfallenden Strahlung einen Absorber durchdringen kann. All dies sind reine Zählaufgaben, die mit einem Zählrohr im Plateaubereich durchgeführt werden. In diesem Bereich ist der im Zählrohr erzeugte Stromimpuls unabhängig von der Energie der Strahlung. Jedes einfallende ionisierende Teilchen liefert das gleiche Ausgangssignal, welches der nachgeschalteten Elektronik als Triggersignal eines elektronischen Zählers dient und den Zählerstand um Eins erhöht. Trägt man

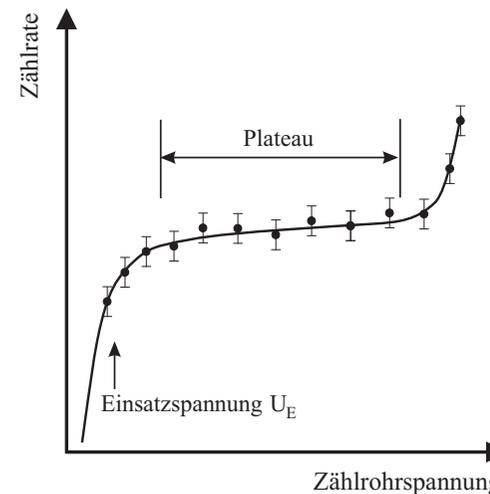


Abbildung 3: Gemessener Plateaubereich eines Geiger-Müller-Zählrohrs.

die gemessene Zählrate eines radioaktiven Präparates konstanter Aktivität als Funktion der Zählrohrspannung auf, so erhält man einen Verlauf, wie er in Abbildung 3 dargestellt ist. Im Idealfall würde man erwarten, dass die Zählrate mit zunehmender Spannung im Plateaubereich überhaupt nicht steigt. In der Praxis ist dennoch ein gewisser Anstieg zu beobachten. Die Ursachen hierfür sind zum einen auf Inhomogenitäten des elektrischen Feldes zurückzuführen, die zu einer

unregelmäßigen Ladungsverteilung längs des Anodendrahtes führen. Zum anderen tragen auch Nachentladungen zum Plateauanstieg bei. Bei guten Zählrohren sollte der Plateaubereich länger als 100 V sein und nur eine geringe Steigung von wenigen Prozent pro 100 V aufweisen.

Beim Betrieb eines Geiger-Müller-Zählrohres im Auslösebereich, muss die Zählrohrspannung so gewählt werden, dass bei zufälligen Spannungsschwankungen, die Einsatzspannung U_E nicht unterschritten wird. Dazu muss zunächst der Plateaubereich gemäß Abbildung 3 ausgemessen werden. Anschließend wird die Betriebsspannung so eingestellt, dass diese ca. 50 bis 100 V größer ist als die Einsatzspannung.

I.3 Totzeit eines Zählrohres

Nach jedem Entladungsimpuls ist das Zählrohr für eine gewisse Zeit lang unempfindlich gegen neu eintretende Strahlung. Erst nach Ablauf dieser Totzeit (typischerweise 10^{-4} s) ist das Zählrohr zum Nachweis eines Teilchens erneut bereit. Der Hauptgrund hierfür liegt bei den positiv geladenen Ionen des Zählgases, die das Feld der Anode abschirmen und aufgrund ihrer großen Masse nur langsam driften. Erst wenn die Ionen zur Kathode gedriftet sind und hier entladen werden, ist das Zählrohr wieder einsatzbereit.

Sollen bei einem bestimmten Experiment die Ereignisse nicht nur detektiert sondern auch quantitativ ausgewertet werden, so müssen bereits bei wenigen hundert Ereignissen pro Sekunde Totzeitkorrekturen vorgenommen werden. Dies ist auch der Grund dafür, dass bei dem Versuch „Statistik des radioaktiven Zerfalls“ die Messzeit nicht beliebig klein gewählt werden darf. Bei diesem Versuch messen Sie viele Male hintereinander die Anzahl der Zerfälle eines radioaktiven Präparates innerhalb eines bestimmten Zeitraums und werten diese mit Hilfe statistischer Methoden aus. Um eine gute Statistik zu bekommen, benötigt man in der Regel viele Messwerte, was eine lange Experimentierzeit mit sich bringt. Nun könnte man vermuten, dass die Anzahl der Messwerte in der Weise erhöht werden kann, indem die Messzeit einer Einzelmessung verkleinert und dafür die Ereignisrate erhöht (z.B. das Präparat näher an das Zählrohr bringen) wird. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Zählrate nicht zu groß wird. Bereits bei 200 Impulse/s hat die Totzeit bei diesem Versuch einen solch großen Einfluss, dass die experimentellen Werte erheblich von den theoretischen abweichen.

I.4 Statistische Schwankungen

Die Zahl der Teilchen, die aus einem Präparat in das Zählrohr eindringen, ist statistischen Schwankungen unterworfen. Daher streuen wiederholte Messungen derselben Zählrate um einen Mittelwert. **Der mittlere statistische Fehler einer Zählung von n Teilchen ist gegeben durch \sqrt{n} , der mittlere relative Fehler also $\sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n}$.** Werden beispielsweise 1000 Ereignisse gezählt, so beträgt der absolute Fehler 32 Ereignisse bzw. der relative Fehler 3%. Bei 10000 Ereignissen beträgt der relative Fehler nur noch 1%. Bei allen graphischen Darstellungen werden die Messpunkte mit Fehlerbalken entsprechend dem mittleren Fehler versehen. Eine detaillierte Einführung in die Statistik des radioaktiven Zerfalls, erhalten Sie in der Versuchsbeschreibung „Statistik des radioaktiven Zerfalls“ und in dem Aufsatz „Wir wollen richtige Fehler“ zu Beginn dieser Anleitung.

I.5 Nulleffekt

Auch ohne Präparat zählt das Zählrohr eine gewisse Zählrate (ca. 50 Ereignisse pro Minute). Dieser Nulleffekt wird durch die überall in geringer Konzentration vorhandene natürliche Radioaktivität und die Höhenstrahlung verursacht. Falls der Nulleffekt nicht klein gegen den statistischen Fehler des Messwertes ist, muss dieser bei Messungen an einem radioaktiven Präparat abgezogen werden.

II Betriebsanleitung des Zählgerätes BF-SG 11

Inbetriebnahme des Zählgerätes - Einstellung der Einsatzspannung

1. Kontrollieren Sie, ob die Hochspannung **ausgeschaltet** ist!
2. Falls das Zählrohr noch nicht angeschlossen ist, schließen Sie dieses an die Buchse GM (Geiger-Müller) an. Der Kippschalter daneben, muss in der Stellung GM sein. Im Bedienfeld daneben, lässt sich die Triggerschwelle einstellen. Da wir diese Funktion nicht benötigen, drehen Sie den Regler „Untere Schwelle“ ganz nach links und den Regler „Obere Schwelle“ ganz nach rechts. Anschließend können Sie das Gerät einschalten. Der Netzschalter befindet sich unten rechts.

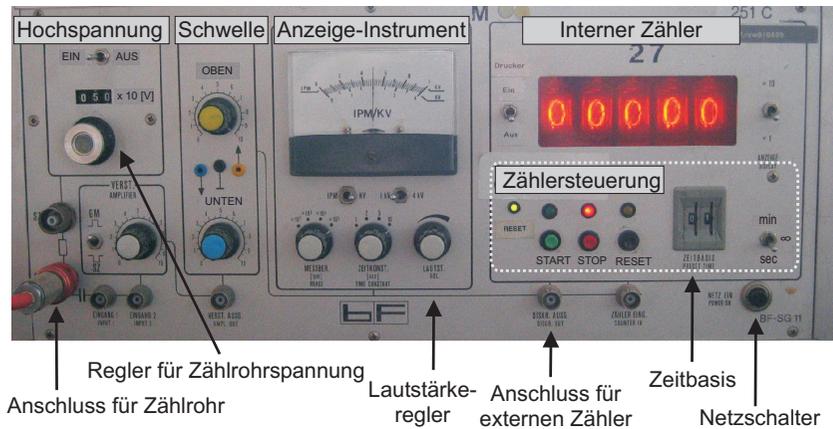


Abbildung 4: Frontplatte des Zählgerätes BF-SG 11

3. Ziehen Sie den Regler für die Hochspannungseinstellung leicht heraus und stellen Sie diesen auf ca. 40 (entspricht 400 V) ein. Durch Drücken kann dieser Knopf später gegen Verdrehen gesichert werden.
4. Schalten Sie nun die Hochspannung ein. Den genauen Wert können Sie auf dem Anzeige-Instrument ablesen. Dazu müssen die Schalter unter dem Instrument auf „HV“ (**H**igh **V**oltage) und „1 kV“ gestellt werden.
5. Schrauben Sie das Präparat in die Halterung vor dem Zählrohr.
6. Das Zählgerät besitzt einen integrierten Lautsprecher, mit dem Sie die registrierten Ereignisse akustisch verfolgen können. Drehen Sie dazu den Lautstärkereglers etwa eine halbe Umdrehung nach rechts.
7. Erhöhen Sie nun **langsam** die Zählrohrspannung bis Sie ein sprunghaft einsetzendes akustisches Signal hören. Dieser Spannungswert entspricht der Einsatzspannung V_E .

Bedienung des Internen Zählers

1. Um die Anzahl der registrierten Ereigniss quantitativ festzuhalten, besitzt das Zählgerät einen internen Zähler. Die Zählung wird automatisch nach

einer vorgegebenen Zeit (Zeitbasis, Torzeit) gestoppt, die Sie an den beiden Digitalschaltern und dem Umschalter „sec/∞/min“ einstellen können. Dabei steht „sec“ für Sekunden, „∞“ für eine Dauermessung ohne Stoppfunktion und „min“ für Minuten.

2. Die Ausgabe des Zählerstandes kann entweder nur an die Anzeige erfolgen oder zusätzlich an einen externen Drucker. Für den Druckerbetrieb muss der Schalter „Drucker“ auf „EIN“ gestellt werden.
3. Drücken Sie die „Start“-Taste um den Zähler zu starten. Der Zählvorgang wird automatisch nach der eingestellten Torzeit gestoppt oder manuell durch Drücken der „Stop“-Taste. Um den Zählerstand auf Null zu setzen, müssen Sie die „Reset“-Taste drücken. Wenn die linke Reset-LED leuchtet (dauert ca. 2 Sekunden) können Sie den Zähler erneut starten.
4. Den Schalter „×1“ bzw. „×10“ neben der Zähleranzeige, sollten Sie stets in der Position „×1“ stehen haben. In der Stellung „×10“ wird nur jeder zehnte Impuls gezählt!

III Strahlenschutz im Physikalischen Anfängerpraktikum

Für die Durchführung der Versuche 251, 252, 253, 254, 255 und 256 müssen Sie mit verschiedenen Präparaten und Geräten arbeiten, die ionisierende Strahlung emittieren oder erzeugen. Sie werden dabei mit radioaktiven Präparaten arbeiten, die γ - und β -Strahlung emittieren. Grundsätzlich hat ionisierende Strahlung die Eigenschaft Ionisation in Materie und damit auch menschlichem Gewebe zu verursachen. Man unterscheidet hier zwischen dicht- und locker ionisierender Strahlung. Dicht ionisierende Strahlung ist beispielsweise α -Strahlung, locker ionisierende Strahlung ist beispielsweise β - und γ -Strahlung. Die genauen physikalischen Prozesse der Wechselwirkung mit Materie werden Sie in Versuch 253 genauer untersuchen.

III.1 Dosisbegriffe

Die Grundeinheit für die an Gewebe übertragene Energie ist die Energiedosis:

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m} \left[\frac{J}{kg} = 1 Gy \right], \quad (1)$$

wobei ΔW die an das Gewebe übertragene Energie ist und Δm die Masse des betroffenen Gewebes. Die Einheit der Gewebeenergiedosis D ist das Gray. Da die oben erwähnten, unterschiedlichen Arten der ionisierenden Strahlung Rechnung zu tragen, führt man die Äquivalentdosis ein. Diese berücksichtigt die unterschiedliche Wirkung von dicht und locker ionisierender Strahlung auf das Gewebe. Dafür wird jeder Strahlungsart ein Qualitätsfaktor zugeordnet, der multipliziert mit der Gewebeenergiedosis D die Äquivalentdosis H ergibt.

$$H = Q * D \quad (2)$$

Die Einheit der Äquivalentdosis ist das Sivert (Sv) und ein Maß für die Schädigung.

III.2 Biologische Wirkung ionisierender Strahlung

Die biologische Wirkung ionisierender Strahlung beginnt mit der Ionisation von Molekülen im Gewebe. Dadurch können freie Radikale gebildet werden und es

kann zu Molekülveränderungen kommen, die beide chemische Reaktionen in der Zelle auslösen. Werden DNA-Moleküle dabei geschädigt, kann es zum Zelltod, der korrekten Reparatur der entsprechenden Moleküle oder der fehlerhaften Reparatur führen. In letzterem Fall ist die Zelle weiter lebensfähig, kann aber Folgeschäden verursachen.

Die Auswirkungen dieser Schädigungen kann in die deterministischen und die stochastischen Schäden unterteilt werden. Deterministische Schäden treten dann auf, wenn durch eine Exposition eine Vielzahl von Zellen geschädigt oder zerstört wurde. Für diese Art von Schaden muss für ein Organ oder den ganzen Körper eine gewisse Mindestdosis überschritten werden. Der Schwellenwert für deterministische Strahlenschäden liegt bei 250 mSv. Ab einer Körperdosis von 5 Sv endet die verursachte Strahlenkrankheit oft tödlich, wobei dieser Wert von Mensch zu Mensch unterschiedlich ist.

Bei geringeren Dosen erhöht sich das Risiko für strahleninduzierte Schädigungen, wie beispielsweise die Bildung von Krebs oder Gendefekten. Gemäß der Internationalen Strahlenschutzkommission gestaltet sich das Krebsrisiko wie folgt: Erhalten eine Million Menschen eine Strahlendosis von 1 mSv, werden statistisch 50 Personen eine tödliche Krebserkrankung entwickeln. Zusätzlich können bei Schwangeren Schäden für das noch ungeborenen Kind entstehen.

III.3 Maßnahmen zum Schutz vor ionisierender Strahlung

Grundsätzlich muss bei jeder Tätigkeit abgewogen und begründet werden, ob der Einsatz ionisierender Strahlung notwendig ist. Ist dies gegeben, gelten die vier wichtigsten Grundsätze des Strahlenschutzes:

- Aufenthaltszeit so gering wie möglich halten: Je kürzer man sich im Strahlungsfeld aufhält, desto geringer ist die erhaltene Dosis.
- Abstand so groß wie möglich halten: Da sich die Dosisleistung mit umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der Quelle verhält, minimiert sich durch einen möglichst großen Abstand zur Quelle die erhaltene Dosis.
- Abschirmungen nutzen: Durch geeignete Abschirmmaterialien wird ein Teil der Strahlungsenergie absorbiert. Dadurch reduziert sich bei gleichem Abstand zur Quelle die erhaltene Dosis.

- Abschalten, wenn das Gerät nicht mehr benötigt wird: Dieser Grundsatz gilt für alle Geräte, die ionisierende Strahlung erzeugen. Sobald der Anwendungszweck der ionisierenden Strahlung erfüllt ist, muss das Gerät abgeschaltet werden!

Wenn Sie diese Grundsätze verinnerlichen und anwenden, reduzieren Sie Ihre erhaltene Dosis .

III.4 Bestimmungen des Strahlenschutzes

Der Strahlenschutz wird in Deutschland vom Strahlenschutzgesetz (StrlSchG) und der Strahlenschutzverordnung (StrlSchV) geregelt. Diese gesetzlichen Bestimmungen liegen in jedem Versuchsraum aus und können dort eingesehen werden. Zusätzlich gilt die aktuelle Fassung der Strahlenschutzanweisung der Universität Heidelberg. Diese liegt ebenfalls in den Versuchsräumen aus.

Grundsätzlich wird zwischen beruflich strahlenexponierten Personen und der restlichen Bevölkerung unterschieden. Beruflich strahlenexponierte Person ist wer durch Ausübung seiner Tätigkeit über ein Jahr eine effektive Dosis von 1 mSv oder mehr erhalten kann. Während der Durchführung der Versuche im Praktikum ist es nicht möglich eine solche effektive Dosis zu erhalten. Folglich fallen Sie für die Durchführung der Versuche nicht in die Kategorie der beruflich strahlenexponierten Personen.

Die Organisation des Strahlenschutzes sieht für jede genehmigungsbedürftige Tätigkeit im Umgang mit ionisierender Strahlung Strahlenschutzbeauftragte vor. Strahlenschutzbeauftragte sind für die Einhaltung der Strahlenschutzanweisungen und des Strahlenschutzgesetzes und der Strahlenschutzverordnung zuständig. Sie sind bzgl. der genehmigungsbedürftigen Tätigkeiten weisungsbehaftet.

Während der Versuche arbeiten Sie mit fest umschlossenen Quellen und Vollschutzröntengeräten. Die Quellen werden jährlich auf Dichtigkeit geprüft, sodass eine Kontamination und Inkorporation der radioaktiven Stoffe ausgeschlossen ist. Dies ist jedoch nur gewährleistet, wenn an den Quellen keine mechanischen Beschädigungen vorhanden sind. Sollte Ihnen eine Beschädigung auffallen oder Ihnen eine Quelle herunterfallen, melden Sie das sofort der Praktikumsleitung und Ihrem Tutor! Sie müssen keine Angst haben, dass Ihnen dadurch ein Nachteil entsteht. Es geht um den Schutz vor Kontamination und Inkorporation!



Abbildung 5: Die im Praktikum verwendeten Co-60- und Cs-137-Quellen

Die Vollschutzröntengeräte sind typgeprüft und so geschirmt, dass in 10 cm Abstand eine maximale effektive Dosisleistung von $0,1 \mu\text{Sv/h}$ messbar sind. Die Röntgeneinrichtung kann erst gestartet werden, wenn die Tür verriegelt ist, sodass eine Exposition von Personen ausgeschlossen ist. Sollten am Verriegelungsmechanismus oder am Gehäuse mechanische Beschädigungen auffallen oder entstehen, schalten Sie das Gerät sofort aus und melden es der Praktikumsleitung und Ihrem Tutor!

Zusätzlich gelten besondere Regelungen für minderjährige, schwangere und stillende Personen. Diesen ist die Durchführung der Praktikumsversuche mit radioaktiven Quellen und Röntengeräten nicht gestattet. Sollte das auf Sie zutreffen, sind Sie gesetzlich verpflichtet, dass dem Strahlenschutzbeauftragten mitzuteilen.

III.5 Lokale Strahlenschutzanweisungen und Bestimmungen

Grundsätzlich können Sie mit einer effektiven Dosis von kleiner $2 \mu\text{Sv}$ durch die Durchführung der fünf Versuche rechnen. Um dieses Risiko einzuordnen: Während eines zweistündigen Fluges erhalten Sie je nach Sonnenaktivität eine

ähnliche bis doppelte so hohe effektive Dosis.

Diese geringe Dosis wird dadurch erreicht, dass für die Versuchsdurchführung passende Abschirmungen für alle Messungen mit den Co-60-, Sr-90- und Cs-137-Quellen vorhanden sind. Um die Grundsätze des Strahlenschutzes direkt auf die Versuchsdurchführung anzuwenden, bedeutet das für Sie Folgendes:

- Holen Sie die benötigten Quellen erst zu sich an den Arbeitsplatz, sobald Sie diese wirklich brauchen und bringen Sie die Quellen sofort nach der letzten Messung zurück in den Quellenschrank!
- Schrauben Sie die Stabquellen direkt aus der Aufbewahrungsabschirmung in die Abschirmung des Versuchsaufbaus und nach Ende der Messung direkt wieder zurück in die Aufbewahrungsabschirmung.

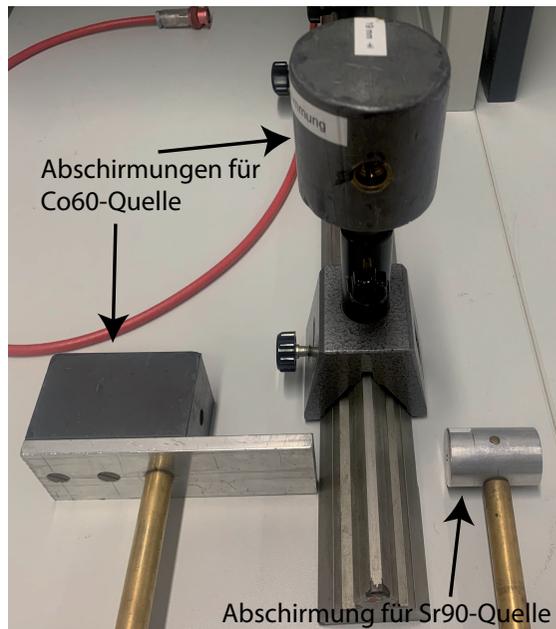


Abbildung 6: Verwendete Abschirmung für die Versuche 251 und 253

- Setzen Sie sich so an den Versuchsaufbau, dass Sie die Quelle nicht direkt neben Ihnen befindet.

- Fallen Ihnen mechanische Beschädigungen an den Quellen auf (zum Beispiel ein beschädigtes Austrittsfenster der Sr-90-Quelle), melden Sie das sofort der Praktikumsleitung und dem Tutor. Die Arbeiten im Raum sind sofort einzustellen und nichts (auch keine eigenen Gegenstände - Kontaminationsgefahr!) darf weggeräumt werden! Gleiches gilt, wenn Ihnen eine Quelle herunterfällt oder anderweitig durch einen Vorgang mechanische Beschädigungen entstanden sein könnten!



Abbildung 7: Das Betaaustrittsfenster der Sr₉₀-Quelle

- Entfernen Sie nur für die Entnahme der aktivierten Indium- und Silberproben den Deckel der Neutronenquelle und legen Sie diesen anschließend

direkt wieder auf die Quelle. In 10 cm Abstand beträgt die effektive Dosisleistung $2,2 \mu\text{Sv/h}$.

- Das Essen und Trinken ist in den Laborräumen mit Versuchen zur Radioaktivität nicht gestattet!

Deckel und Umhüllung der Neutronenquelle



Metalpräparate in der Neutronenquelle zur Aktivierung

Abbildung 8: Die im Praktikum verwendete Neutronenquellen

- Verschieben Sie den Wagen, auf dem sich die Neutronenquelle befindet, nicht!
- Sollte Ihnen an den Röntengeräten etwas Ungewöhnliches auffallen (zum Beispiel ein nicht funktionierender Schließmechanismus oder mechanische Beschädigungen am Gerät oder den Bleiglasscheiben), schalten Sie das Gerät sofort aus und informieren Sie sofort die Praktikumsleitung und Ihren Tutor.

Versuch 251 Statistik und Halbwertszeit des radioaktiven Zerfalls

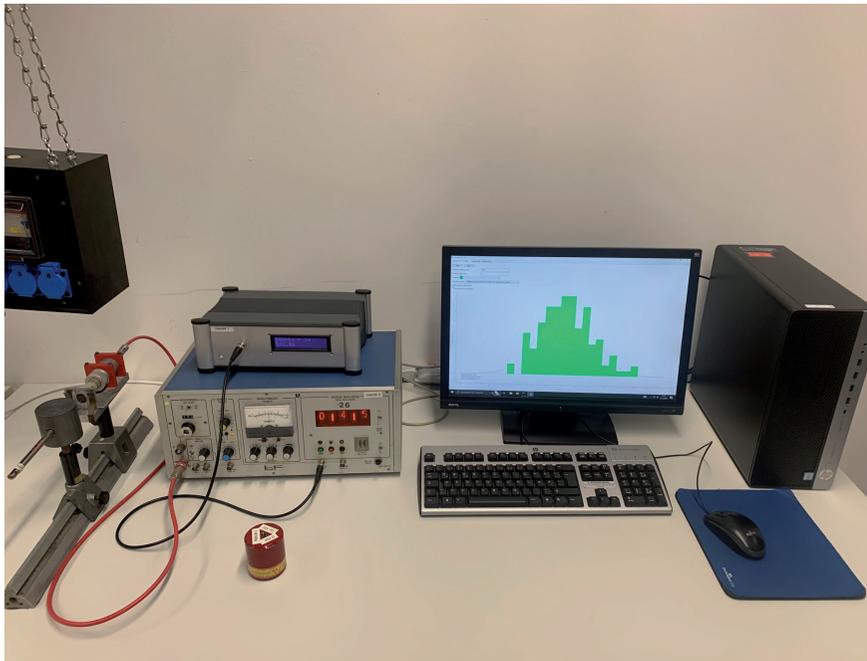


Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
- Externer Impulszähler
- PC
- Neutronenquelle

- Präparatehalterung
- Radioaktives Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs , Indium)

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- J. Stiewe, *Wir wollen richtige Fehler*, der Praktikumsanleitung beigelegt.
- Homepage des Praktikums:
<https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Radioaktiver Zerfall, Geiger-Müller-Zählrohr.

Verständnisfragen:

1. Was ist Radioaktivität?
2. Wie lautet das Zerfallsgesetz?
3. Was ist ein Isotop?
4. In welcher Beziehung stehen die Binomial-, Poisson- und Gauß-Verteilung?
5. Wodurch wird die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate bestimmt? Warum muss die Messung im Plateaubereich durchgeführt werden?
6. An einer Probe eines langlebigen radioaktiven Materials werde als Mittel einer Reihe von 20 Messungen eine Rate von 23,5 Zerfällen pro 10 s gemessen.
 - a) Wie groß ist die Varianz dieser Verteilung?
 - b) Wie groß ist der Fehler des Mittelwertes?

7. Die Größe von 4402 Studenten sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 185 cm und einer Standardabweichung von 3 cm.
 - a) Wie viele dieser Studenten haben eine Größe zwischen 179 cm und 188 cm?
 - b) Wie viele sind größer als 191 cm?

IV Aufgaben

1. Messen Sie ausgehend von der Einsatzspannung bis 150 V darüber die Zählrohrcharakteristik.
2. Untersuchen Sie den Anstieg der Zählrate im Plateau des Zählrohrs unter Berücksichtigung der statistischen Schwankungen.
3.
 - a) Anhand einer langen Messreihe sind die Schwankungen der Zählrate experimentell zu untersuchen und damit die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls zu bestätigen.
 - b) Berechnen Sie anhand der Tabelle des Messprotokolls, wie viele Messungen um mehr als $\pm\sigma_{exp}$, $\pm 2\sigma_{exp}$ und $\pm 3\sigma_{exp}$ vom Mittelwert abweichen und vergleichen Sie dies mit den theoretischen Erwartungen.
4. Bestimmung der Halbwertszeit von ^{116}In

V Motivation

Radioaktive Atome tragen in sich eine geheimnisvolle innere Statistikk-Uhr Ein Atom ist zwar bekanntlich nicht unteilbar, doch alles in allem sehr stabil. Die allermeisten Atome in unserer Welt existieren bereits seit Milliarden von Jahren. Sie wurden irgendwann im Inneren eines Sterns erbrütet. Doch es gibt auch instabile Atome, die nicht für die Ewigkeit gemacht sind. Ohne jeden äußeren Einfluss können sie ganz spontan zerfallen. Solche Atome nennt man radioaktiv. Beim Zerfall senden sie Strahlung aus - Heliumatomkerne (Alpha-Strahlung), Elektronen (Beta-Strahlung) oder energiereiche elektromagnetische Wellen (Gamma-Strahlung). Betrachtet man ein einzelnes radioaktives Atom, so kann niemand vorhersagen, auch der beste Physiker nicht, wann dieses Atom zerfallen wird. Das kann in der nächsten Sekunde geschehen, in einem Monat

oder in tausend Jahren. Die „innere Uhr“ eines radioaktiven Atoms kennen wir nicht. Und doch gehorcht der Zerfall radioaktiver Atome präzisen Gesetzen der Statistik. So lässt sich genau vorhersagen, wie sich Kollektive aus vielen Atomen verhalten werden, auch wenn das Schicksal jedes Einzelatoms nicht vorhersehbar ist. Nach einer ganz bestimmten Zeit, der so genannten Halbwertszeit, ist stets die Hälfte aller zunächst vorhandenen Atome zerfallen. Die Halbwertszeit ist dabei ein für jede Sorte radioaktiver Atome charakteristischer Wert. Das Isotop Jod-131 besitzt zum Beispiel immer eine Halbwertszeit von 8,02 Tagen. Manche Atome sind so instabil, dass ihre Halbwertszeit nur Bruchteile von Sekunden beträgt. Nach nur 1,05 Millionstel Sekunden sind beispielsweise 50 Prozent der Thorium-219-Atome zerfallen. Auch das andere Extrem gibt es. Uran-235, das zum Bau von Atombomben verwendet wird, hat eine Halbwertszeit von mehr als 700 Millionen Jahren.“¹

VI Grundlagen

VI.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Misst man mit einem Zählrohr die von einem radioaktiven Präparat emittierten Teilchen unter unveränderten Versuchsbedingungen, so wird man in der Regel bei jeder Messung eine etwas andere Teilchenzahl erhalten. Der Grund hierfür ist, dass jeweils während der Messzeit nur ein kleiner Bruchteil der radioaktiven Atome zerfällt, und dass die einzelnen Zerfallsprozesse völlig **unabhängig** voneinander stattfinden. Die genaue Anzahl der innerhalb der Messzeit zerfallenden Atome bleibt daher dem Zufall überlassen.

Allerdings lässt sich mit dem Zufall hervorragend experimentieren und rechnen. Der Zufall zeigt Gesetzmäßigkeiten! Zwar ist es unmöglich den Zerfallszeitpunkt eines **einzelnen** Atomkernes vorherzusagen - über **eine große Anzahl** von Kernen lassen sich dagegen durchaus Vorhersagen treffen. Trägt man beispielsweise die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate in ein Histogramm ein und wiederholt dieses viele Male, so wird man unter bestimmten Voraussetzungen² stets dieselbe Verteilung erhalten (Vergleiche Abbildung 2). In den folgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, welche statistische Verteilungen geeignet sind den radioaktiven Zerfall zu beschreiben.

¹Norbert Lossau, Artikel vom 18. August 2004 in der Zeitung „Die Welt“

²Die Halbwertszeit des Isotops muss groß gegenüber der Beobachtungszeit sein.

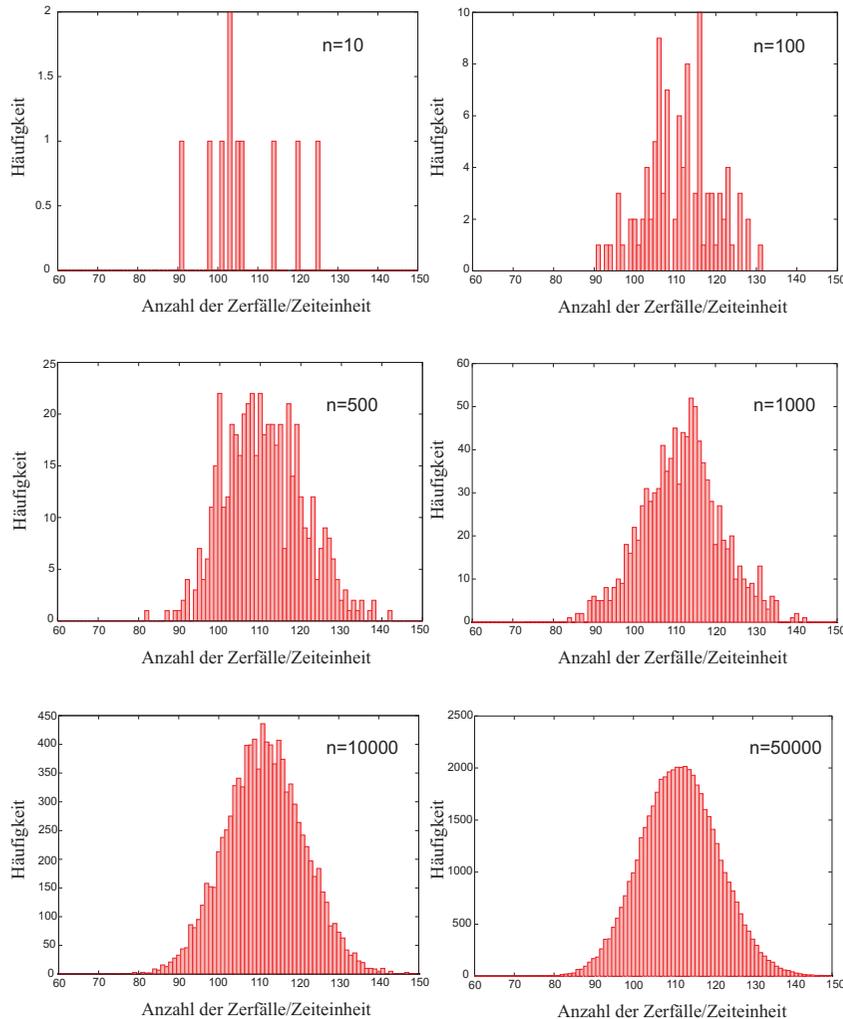


Abbildung 2: Trägt man die pro Zeiteinheit gemessenen radioaktive Zerfälle einer großen Anzahl von Atomen in ein Histogramm ein, so erhält man nach vielen Messungen stets dieselbe Verteilung. n bezeichnet die Anzahl der Messungen.

„Alle Dinge umfaßt eine bestimmte Ordnung und was den ihm angewiesenen Platz verläßt, das tritt damit zwar in den Bereich einer andern Ordnung ein, aber niemals fällt es völlig aus aller Ordnung heraus, denn Willkür und Zufall sind unbekannt im Reiche der Vorsehung!“³

VI.1.1 Die Binomial-Verteilung

Die Binomial-Verteilung ergibt sich aus folgender Fragestellung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A bei n voneinander unabhängigen Versuchen genau k -mal eintritt, wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A bei einem Versuch ist und $(1 - p)$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten dieses Ereignisses darstellt?

Nehmen wir zunächst an, dass das Ereignis A gerade bei den ersten k Versuchen eintritt, bei den folgenden $n - k$ dagegen nicht. Da die Versuche voneinander statistisch unabhängig sein sollen, müssen die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versuche multipliziert werden. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit W dieses konkreten Beispiels:

$$W = p^k (1 - p)^{n-k}. \tag{1}$$

Das Ereignis A muss aber nicht unbedingt bei den ersten k Versuchen auftreten. Es muss nur innerhalb von n Versuchen genau k -mal vorkommen. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k herauszugreifen. Unter Beachtung aller möglichen Permutationen $\binom{n}{k}$ erhalten wir schließlich die Binominal-Verteilung:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \tag{2}$$

Dazu folgendes Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zehnmaligem Würfeln genau dreimal die Zahl „4“ fällt?

aus $p = 1/6$, $n = 10$ und $k = 3$ folgt:

$$B(3; 10, 1/6) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} = 15,5\%$$

³Boethius Anicius Manlius Severinus: Die Tröstungen der Philosophie

Die Binomial-Verteilung ist eine diskrete⁴, zweiparametrische Verteilung mit den Parametern n und p . Als Notation verwenden wir die Bezeichnung $B(k; n, p)$. Dabei kennzeichnet das Kürzel B , dass es sich um eine Binomial-Verteilung handelt. In der Klammer wird zunächst die Variable angegeben, anschließend - getrennt durch ein Semikolon - die Parameter.

Eigenschaften der Binomial-Verteilung:

$$\text{Normierung:} \quad \sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Mittelwert:} \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k B(k; n, p) = np \quad (4)$$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p) \quad (5)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (6)$$

Unsere bisherigen Überlegungen zur Binomial-Verteilung lassen sich nun einfach auf den radioaktiven Zerfall übertragen. Auch hier handelt es sich um ein Ereignis mit zwei möglichen Ausgängen: Entweder ein radioaktiver Atomkern zerfällt innerhalb eines gewissen Beobachtungszeitraums oder eben nicht. Stellt p die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Atomkerns dar, so beschreibt die Binomial-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass von n Atomkernen, genau k innerhalb eines bestimmten Zeitraums t zerfallen. Die Zerfallswahrscheinlichkeit p hängt natürlich vom Beobachtungszeitraum ab. Je länger Sie warten, desto mehr Zerfälle werden Sie beobachten. Es lässt sich leicht zeigen, dass für p gilt:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (7)$$

wobei die Zerfallskonstante λ eine für das Isotop charakterische Größe darstellt. Sie werden diesen Sachverhalt in dem nächsten Praktikumsversuch, „Aktivierung von Indium und Silber mit langsamen Neutronen“, noch genauer untersuchen. Ist die Zerfallskonstante sehr klein, wie es bei den in diesem Versuch verwendeten radioaktiven Präparaten der Fall ist, so kann die Zerfallswahrscheinlichkeit p für einen festen Beobachtungszeitraum als konstant angenommen werden.

⁴d.h. $n, k \in \mathbb{N}$

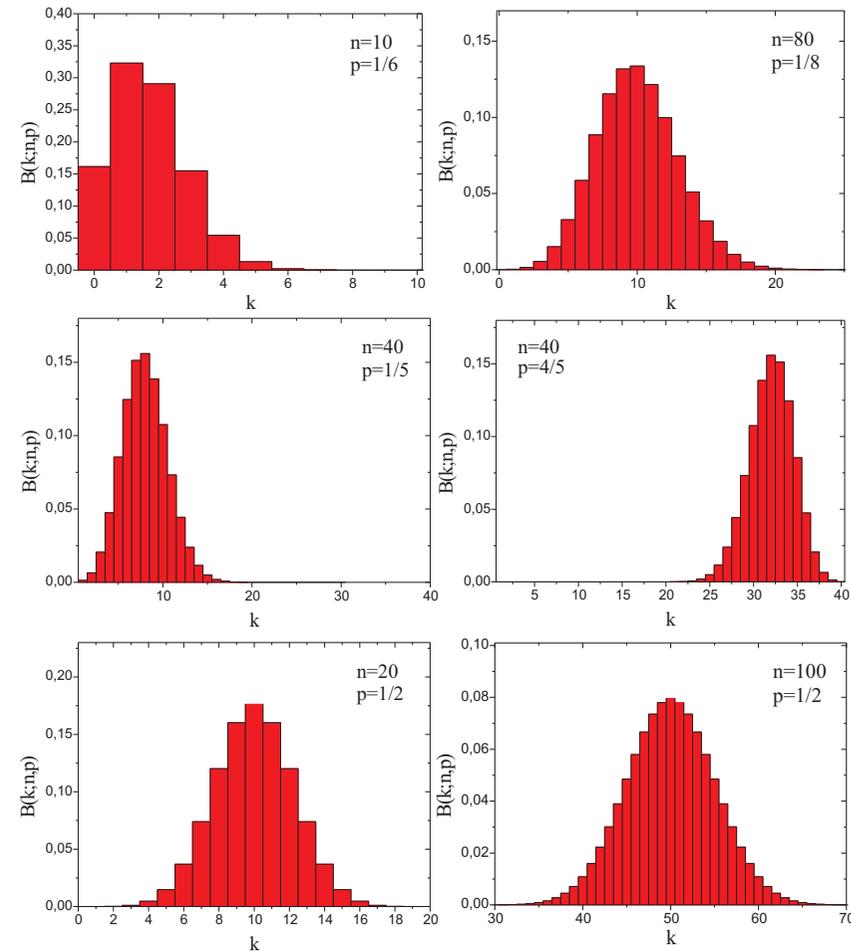


Abbildung 3: Binomial-Verteilung für unterschiedliche Werte von n und p .

Obwohl die Binomial-Verteilung die Statistik des radioaktiven Zerfalls sehr gut beschreibt, ist sie in der Praxis nur schwer handzuhaben. Stellen sie sich vor, sie müssten die Fakultät von $n \approx 10^{23}$ ausrechnen! In vielen Fällen ist aber die Zerfallswahrscheinlichkeit p sehr klein und die Anzahl der Atome n sehr groß. Sofern dies gilt, lassen sich einige mathematische Näherungen anwenden und wir erhalten schließlich aus der Binomial-Verteilung die Poisson-Verteilung.

VI.1.2 Die Poisson-Verteilung

Für kleine Zerfallswahrscheinlichkeiten ($p \rightarrow 0$) und eine große Anzahl von radioaktiven Atome ($n \rightarrow \infty$) kann die Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung angenähert werden. Allerdings müssen wir fordern, dass der Mittelwert $\mu \equiv \langle k \rangle = np$ endlich bleibt. Die Poisson-Verteilung ist also dann gültig, wenn die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse (d.h. der Mittelwert) das Ergebnis einer sehr großen Zahl von Ereignismöglichkeiten und einer sehr kleinen Ereigniswahrscheinlichkeit ist. Die mathematische Herleitung dieser Verteilung finden Sie im Anhang. Wir wollen an dieser Stelle nur das Ergebnis angeben:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}. \tag{8}$$

Die Poisson-Verteilung ist wie die Binomial-Verteilung eine diskrete Verteilung ($k \in \mathbb{N}$). Sie ist eine einparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ vollständig beschrieben wird.

Eigenschaften der Poisson-Verteilung:

Normierung:
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \tag{9}$$

Mittelwert:
$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \mu) = \mu \tag{10}$$

Varianz:
$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \tag{11}$$

Standardabweichung:
$$\sigma = \sqrt{\mu} \tag{12}$$

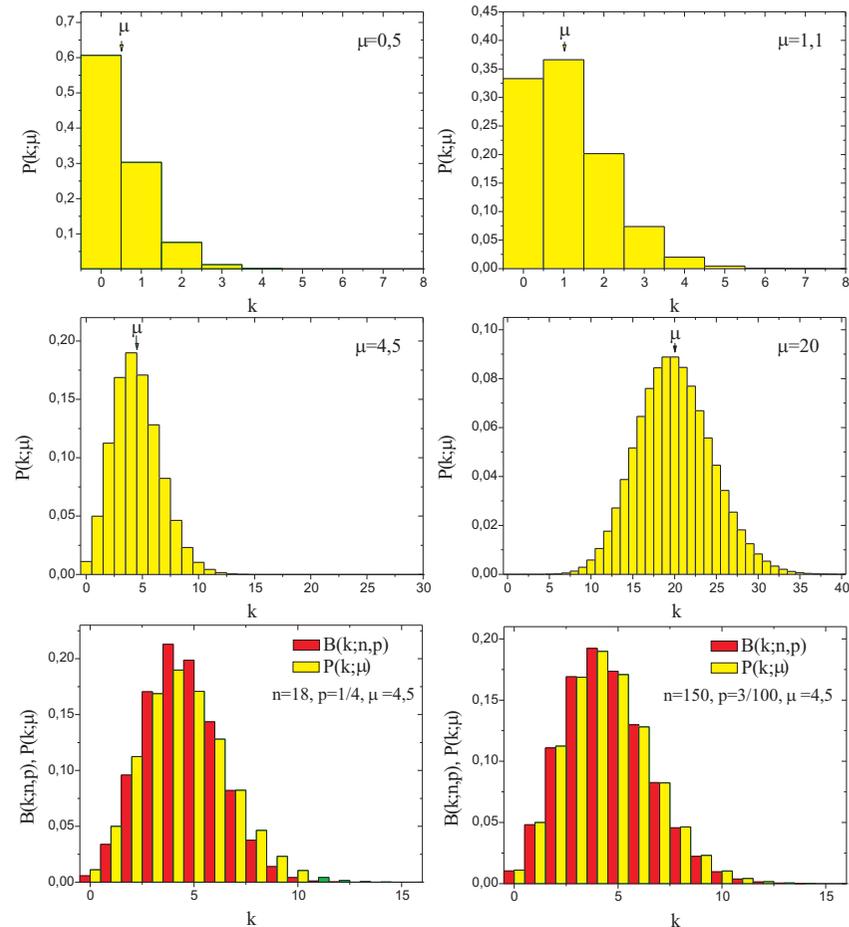


Abbildung 4: Poisson-Verteilung für unterschiedliche Werte von μ . Untere Reihe: Vergleich der Binomial-Verteilung mit der Poisson-Verteilung. Für große Werte von n und kleine Wahrscheinlichkeiten p nähert sich die Binomial-Verteilung der Poisson-Verteilung.

Beachten Sie, dass der Parameter μ zugleich den Mittelwert als auch die Varianz darstellt. Die Standardabweichung berechnet sich demnach aus der Wurzel des Mittelwertes. Hierauf beruht das \sqrt{N} -Gesetz bei der Fehlerbestimmung von gezählten Größen. Wir werden an späterer Stelle noch darauf zurückkommen.

In Abbildung 4 ist die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte von μ dargestellt. Für $\mu < 1$ ist der wahrscheinlichste Wert stets Null. Die Verteilung besitzt in diesem Fall kein Maximum und nimmt monoton mit zunehmendem k ab. Für $\mu > 1$ besitzt die Verteilung ein Maximum, dessen Breite allerdings bei gleichem Mittelwert größer ist als die der Binomial-Verteilung (Die Varianz der Poisson-Verteilung entspricht dem Mittelwert $\sigma_P^2 = \mu \equiv np$, während sie bei der Binomial-Verteilung gegeben ist durch $\sigma_B^2 = np(1-p) < \sigma_P^2$). Weiterhin fällt auf, dass die Verteilungen für kleine Mittelwerte stark asymmetrisch sind und für größer werdende Mittelwerte immer symmetrischer werden. In der Tat geht die Poisson-Verteilung für große μ in die symmetrische Gauß-Verteilung über.

VI.1.3 Die Gauß-Verteilung

Für einen großen Mittelwert ($\mu > 30$) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gauß-Verteilung approximieren (Die Herleitung finden Sie wieder im Anhang):

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \tag{13}$$

Gleichung (13) stellt ein Spezialfall der Gauß-Verteilung dar, bei der die Varianz dem Mittelwert entspricht. Die allgemeine Form lautet:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}}. \tag{14}$$

Eigenschaften der Gauß-Verteilung:

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1$ (15)

Mittelwert: $\int_{-\infty}^{\infty} k G(k; \mu, \sigma) dk = \mu$ (16)

Varianz: $\int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2$ (17)

Für den Spezialfall einer Zählstatistik (Gleichung (13)) ergibt sich, wie bei der Poissonverteilung, für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mu}. \tag{18}$$

Im Gegensatz zur Binomial- und Poissonverteilung, deren Variable k nur diskrete

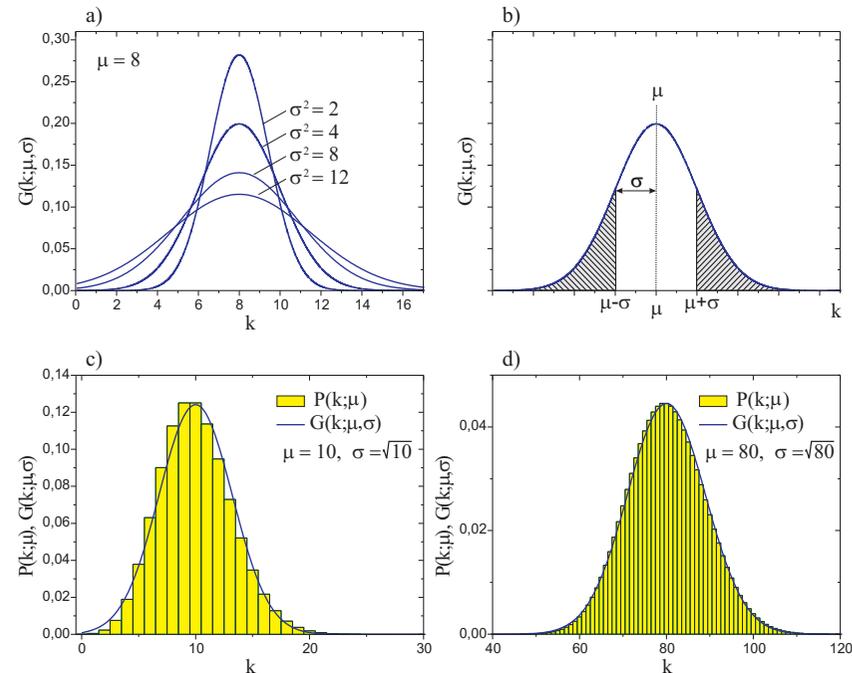


Abbildung 5: a) Gauß-Verteilung für $\mu = 8$ und verschiedene Werte von σ . b) Grafische Darstellung von σ . c) und d) Vergleich der Poisson-Verteilung mit der Gauß-Verteilung.

te Werte annehmen kann, ist die Gauß-Verteilung kontinuierlich, d.h. $k \in \mathbb{R}$. Sie ist eine zweiparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ eindeutig bestimmt ist. In Abbildung 5a) sind einige Verteilungen mit unterschiedlichen Standardabweichungen dargestellt. Je größer die Standardabweichung σ , desto breiter ist die Verteilung. Die Bilder c) und d) vergleichen die Gauß-Verteilung mit der Poissonverteilung für zwei unterschiedliche Mittelwerte. In Abbildung 5b) ist eine Gauß-Verteilung abgebildet, bei der

Eine Abweichung von μ um mehr als	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
hat die Wahrscheinlichkeit	31,73%	4,55%	0,27%

 Tabelle 4: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .*

die Flächen unter der Kurve im Bereich $k > \mu + \sigma$ und $k < \mu - \sigma$ schraffiert dargestellt ist. Diese Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit P_σ an, dass k um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert μ abweicht. P_σ lässt sich gemäß

$$P_\sigma = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \quad (19)$$

berechnen und beträgt etwa 30 %. Analog erhält man die Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen von μ um mehr als $\pm 2\sigma$ und $\pm 3\sigma$ (Tabelle 4). Um auf einfacher Weise die Standardabweichung aus einer Gaußkurve abzuschätzen, sollten Sie sich folgende Beziehung merken:

$$FWHM \approx 2,36\sigma, \quad (20)$$

wobei *FWHM* für *full width at half maximum* steht, d.h. für die volle Breite der Kurve auf halber Höhe.

VI.2 Statistik und Messfehler

In der Praxis ist der Mittelwert μ einer sehr langen Messreihe meist nicht gegeben, sondern nur das Resultat k einer einzigen Messung. In diesem Fall kann man das Ergebnis als Schätzung des Mittelwertes interpretieren:

$G(\mu; k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert μ ergeben würde, wobei das Resultat k einer einzigen Messung gegeben ist.

Da k und μ nicht stark voneinander abweichen, können wir aufgrund einer einzigen Messung auch einen Näherungswert für die Standardabweichung angeben:

$$\sigma = \sqrt{k}. \quad (21)$$

Es ist üblich, das Resultat einer solchen Zählung in der Form

$$k \pm \sqrt{k} \quad (22)$$

anzugeben. Dies ist eine Abkürzung für die Sätze: „Ich habe k Ereignisse gezählt. Daraus schließe ich, wegen Abbildung 5b) und Tabelle 4, dass der Mittelwert einer sehr langen Messung mit 68% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm \sqrt{k}$ liegt, mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm 2\sqrt{k}$ und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3% außerhalb des Bereichs $k \pm 3\sqrt{k}$ “.

Die Betrachtung der statistischen Fehler ist besonders wichtig, wenn man herausfinden will, ob die Differenz zweier Zählergebnisse k_1 und k_2 , allein durch statistische Schwankungen erklärt werden kann oder auf eine Änderung der Versuchsbedingungen zurückzuführen ist. Viele Experimente laufen auf diese Fragestellung hinaus.

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz erhält man den mittleren statistischen Fehler einer Differenz durch quadratisches Addieren der Einzelfehler.

Es sei

$$\Delta = k_1 - k_2; \quad \sigma_1 = \sqrt{k_1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{k_2}.$$

Dann ist

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2}.$$

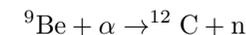
Man schreibt dies meist in der Form :

$$\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass Δ allein aufgrund von statistischen Schwankungen von Null um mehr als eine, zwei oder drei Standardabweichungen ($\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2}$) abweicht, gilt wieder Tabelle 4. In der Regel hält man den Einfluss einer Änderung der Versuchsbedingungen für erwiesen, wenn Δ um mehr als drei Standardabweichungen von Null abweicht. In diesem Fall bezeichnet man die Differenz Δ als **signifikant**.

VI.3 Aktivierung mit thermischen Neutronen

Bei diesem Teilversuch wird das Isotop ^{115}In mit Hilfe thermischer Neutronen aktiviert. Die Neutronenquelle besteht aus einem Präparat, das Berylliumspäne und einen α -Strahler (^{241}Am) enthält. Durch die Kernreaktion



entstehen Neutronen mit einer Energie von 1 - 10 MeV. Diese schnellen Neutronen werden in dem die Neutronenquelle umgebenden Paraffinblock durch

elastische Stöße mit den Wasserstoffkernen abgebremst, bis sie nahezu thermische Energie erreicht haben. Stöße gegen die Kohlenstoffkerne bremsen die Neutronen nur wenig ab. Bei einem elastischen Stoß gegen eine gleich schwere Masse (nämlich gegen ein Proton) verliert dagegen das Neutron im Mittel die Hälfte der Energie. Viele Atomkerne haben einen großen Wirkungsquerschnitt für den Einfang langsamer Neutronen. Dabei entsteht ein Isotop des bestrahlten Elements mit einer um eins erhöhten Massenzahl. Wenn dieser Kern radioaktiv ist, stellt die Aktivierung durch langsame Neutronen die bequemste Möglichkeit zur Erzeugung dieses radioaktiven Isotops dar, aber auch zum empfindlichen analytischen Nachweis des Grundisotops in einer Probe. Bei Bestrahlung von Indium wird aus dem stabilen Isotop ^{115}In der β -Strahler ^{116}In gebildet.

Bei der Aktivierung wird pro Sekunde eine bestimmte Zahl von radioaktiven Kernen erzeugt. Die Zahl der pro Sekunde zerfallenden Kerne ist aber der Anzahl der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne proportional (Zerfallsgesetz). Daher nimmt die Aktivität A (d.h. die Zahl der Zerfälle pro Sekunde) als Funktion der Bestrahlungsdauer t nach dem Gesetz

$$A(t) = A(\infty)(1 - \exp\{-\lambda t\}) \quad (23)$$

zu, bis ein Gleichgewicht eintritt, bei dem pro Sekunde gleichviel Kerne des radioaktiven Isotops neu gebildet werden wie pro Sekunde zerfallen. Nach Ende der Aktivierung tritt dann nur noch der Zerfall nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (24)$$

auf. Für die Halbwertszeit gilt

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (25)$$

VII Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Das Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs) erhalten Sie vom Versuchsbetreuer. Folgen Sie für die korrekte Einstellung des Zählgerätes den Anweisungen im Abschnitt „Inbetriebnahme des Zählgerätes - Einstellung der Einsatzspannung“ in der Beschreibung *Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität*. Stellen Sie die Zählrohrspannung so ein, dass Sie 50 V über der Einsatzspannung liegt.

In dieser Aufgabe werden Sie viele Male (mindestens 1500 Mal) die Zerfälle eines radioaktiven Präparats innerhalb eines festen Zeitraums (Torzeit) messen und in ein Histogramm darstellen. Falls sich der radioaktive Zerfall völlig statistisch verhält, sollte das gemessene Histogramm durch eine Poisson-Verteilung, bzw. bei einem großen Mittelwert, durch eine Gauß-Verteilung beschrieben werden können. Überprüfen Sie dies zunächst für einen großen Mittelwert:

Nähern Sie das Präparat durch Verschieben des Reiters dem Zählrohr an, bis etwa 100 Zerfälle/Sekunde gezählt werden. Schalten Sie den Computer und das externe Zählgerät ein und starten Sie das Messprogramm Versuch.251.252 auf dem Desktop. Wählen Sie im Programm den Tab für Versuch 251 aus und wählen bei Messung die passende Option aus. Stellen Sie im Programm die Torzeit auf 1 s. Starten Sie die Messung durch Drücken des Pfeilsymbols in der linken oberen Ecke. Die registrierten Zerfälle/Torzeit werden in einem Histogramm dargestellt. Wenn Sie die Option „Gaußkurve“ einschalten, wird aus dem gemessenen Mittelwert und der Standardabweichung die dazugehörige Gauß-Verteilung berechnet und im Histogramm mitangezeigt. Beachten Sie, dass die angezeigte Gaußkurve nicht angefitet wird, sondern aus den Messdaten berechnet wird! Zusätzlich wird aus den Messdaten der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet und unterhalb der x-Achse angezeigt.

Den Abszissenbereich kann durch Zoomen mit dem Mausrad oder durch Ziehen verschoben werden. Durch den Klick auf das A im unteren linken Bildschirmckehren Sie zur ursprünglichen Ansicht zurück.

Insgesamt sind mindestens 1500 Messungen durchzuführen. Während dieser Zeit können Sie mit der Auswertung der Aufgabe 2 beginnen. Tragen Sie einfach den gewünschten Wert der durchzuführenden Messungen im entsprechenden Feld des Programms ein. Die Messung wird automatisch als .txt Datei im Ordner mit Ihrem gewählten Gruppennamen gespeichert.

Aufgabe 2: Messen der Halbwertszeit von Indium

Messen Sie für zwei mal zwei Minuten (oder 4 Minuten) ohne Präparat den Nulleffekt. Überzeugen Sie sich durch eine Testmessung, dass die Kobalt-Quelle die Untergrundmessung nicht mehr beeinflusst. Wechseln Sie den Tab zu Versuch 252, wählen Sie bei der Art der Messung Indium aus und stellen Sie die Torzeit auf 120 Sekunden. Tragen Sie die gewünschte Anzahl an Messungen ein, sodass sich insgesamt ca. 50 Minuten Messzeit ergibt. Nehmen Sie nun das Indiumpräparat (grüne oder rote Markierungen) aus der Neutronenquelle. Das Indiumpräparat wird mit der Indiumseite zum Zählrohr hin in die vorgesehene Aussparung gesteckt und mit einem 1 mm Aluminiumblech dahinter fixiert. Starten Sie sofort das Messprogramm durch einen Mausklick auf den Pfeil im linken oberen Bereich des Programmfensters. Die Messdaten werden wieder automatisch in Ihrem Gruppenordner gespeichert.

VIII Auswertung

Aufgabe 1: Werten Sie die Differenzen $(n(U_0 + 50V) - n(U_0))$ und $(n(U_0 + 100V) - n(U_0))$ getrennt aus. Geben Sie den Plateauanstieg in %/100 Volt mit statistischem Fehler an (Jeweils für die Messung mit einer Minute und mit drei Minuten). Sind die Differenzen signifikant?

Aufgabe 2: Berechnen Sie anhand der Tabelle des Messprotokolls, wie viele Messungen um mehr als $\pm\sigma_{exp}$, $\pm 2\sigma_{exp}$, $\pm 3\sigma_{exp}$ und $\pm 4\sigma_{exp}$ vom Mittelwert abweichen und vergleichen Sie dies mit den theoretischen Erwartungen.

Aufgabe 3: Von den gemessenen Zerfällen wird der Nulleffekt abgezogen. Die korrigierten Messwerte werden mit den entsprechenden statistischen Fehlern in einfach logarithmisches Papier (1 Dekade) eingetragen. Durch die Messpunkte wird eine Ausgleichs- und Fehlergerade gelegt, an der die Halbwertszeit und dessen Fehler abgelesen wird. Berechnen Sie die Zerfallskonstante des ^{116}In .

IX Anhang**IX.1 Die Poisson-Verteilung als Grenzfall der Binomial-Verteilung**

Bezeichnen wir den Mittelwert von k mit $\mu \equiv np$, so lässt sich die Binomial-Verteilung

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (26)$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (27)$$

wie folgt umformen. Mit $p = \mu/n$ ergibt sich

$$B(k; n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\mu^k}{n^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \quad (28)$$

$$= \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \right\} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \frac{\mu^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n. \quad (29)$$

Führen wir nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ durch, mit der Forderung das $\mu = np$ endlich bleibt, so konvergieren die ersten beiden Faktoren gegen Eins. Für den zweiten Faktor ist dies sofort einzusehen. Für den ersten Ausdruck in der geschweiften Klammer gilt für $n \gg k$:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \approx n^k \quad (30)$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \right\} = 1. \quad (31)$$

Der letzte Faktor in Gleichung (29) konvergiert gegen die Exponentialfunktion mit dem Argument $-\mu$. Somit erhalten wir schließlich die Poisson-Verteilung:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}. \quad (32)$$

IX.2 Die Gauß-Verteilung als Grenzfall der Poisson-Verteilung

Für große Mittelwerte ($\mu > 30$) geht die Poisson-Verteilung in eine Gauß-Verteilung über. Ersetzen wir die Fakultät in der Poisson-Verteilung durch die Stirling'sche Näherungsformel

$$k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}, \quad (33)$$

so ergibt sich

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \rightarrow \frac{\mu^k e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} = \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{\mu}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(1 + \frac{\mu-k}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mu-k}{k}\right)\right\} \quad (36)$$

Entwickeln wir den Logarithmus nach Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (37)$$

und brechen nach dem quadratischen Glied ab, so erhalten wir

$$P(k; \mu) \rightarrow \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\mu-k}{k} - \frac{1}{2} \frac{(\mu-k)^2}{k^2}\right)\right\}. \quad (38)$$

Bei hinreichend großem k können wir $k + 1/2$ durch k ersetzen und erhalten damit

$$P(k; \mu) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2k}}. \quad (39)$$

Da $(\mu-k)/k \ll 1$ können wir im Nenner des Exponenten k durch μ ersetzen und erhalten schließlich einen Spezialfall der Gauß-Verteilung mit $\sigma = \sqrt{\mu}$:

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \quad (40)$$

Versuch 254 Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen



Abbildung 1: Versuchsaufbau

I Messaufbau

- Röntgenerät mit Röntgenröhre
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF-Kristall
- Computer

- Filterrad mit Aluminiumfiltern verschiedener Dicke

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Röntgenröhre, Bragg-Reflexion, Röntgenspektren (Bremsstrahlung, charakteristische Röntgenstrahlung), Moseley'sches Gesetz, Absorption von Röntgenstrahlung.

Verständnisfragen:

1. Erklären Sie den Aufbau und das Funktionsprinzip einer Röntgenröhre. In welchem Bereich liegt die Beschleunigungsspannung? Welche Größe bestimmt die Intensität der Röntgenstrahlung?
2. Das Spektrum einer Röntgenröhre ist eine Überlagerung aus einem Bremspektrum und einem charakteristischen Spektrum. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser beiden Spektren. Wovon hängt das charakteristische Spektrum ab?
3. Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 30 kV durchlaufen hat?
4. Was besagt das Moseley'sche Gesetz?
5. Wie lautet das Braggsche Gesetz? Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Röntgenbeugung das Spektrum einer Röntgenquelle messen kann.
6. Geben Sie für folgende Größen den Zusammenhang zwischen dem messbaren Zählraten vor und hinter einem Absorber der Dicke d an: Energie, Intensität, Anzahl der Röntgenquanten.

7. Der Absorptionskoeffizient des menschlichen Körpers (Weichteile) entspricht dem von Wasser (Massenabsorptionskoeffizient bei 50 keV: $\mu/\rho=0,2 \text{ cm}^2/\text{g}$). Berechnen Sie für monoenergetische Röntgenstrahlung von 50 keV jeweils für $d = 1 \text{ cm}$, 5 cm, 10 cm, 20 cm und 30 cm den Energieanteil der Strahlung, der an den Körper abgegeben wird.

IV Aufgaben

- Nehmen Sie bei einer Röhrenspannung von 35 kV das Röntgenspektrum der eingebauten Röntgenröhre auf.
- Messen Sie den Reflexionswinkel der L_{α} - Linie in der ersten Beugungsordnung und bestimmen Sie daraus die Wellenlängen und Energie dieser Linie.
- Röntgenabsorption: Messen Sie die Intensität der L_{α} - Linie in Abhängigkeit unterschiedlich dicker Absorberfolien.

V Grundlagen

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden. An der Kathode werden durch Glühemission freie Elektronen erzeugt. Zwischen Kathode und Anode liegt eine Beschleunigungsspannung von typischerweise 10 kV bis 100 kV an. Dadurch werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt und beim Aufprall durch das Coulombfeld der Atomkerne des Anodenmaterials abgebremst. Die dabei verlorene Energie wird teilweise in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Da der Energieverlust der Elektronen beim Abbremsen unterschiedlich groß ist, entsteht ein kontinuierliches Spektrum, welches als Bremsspektrum bezeichnet wird (Abbildung 3). Auf der kurzwelligen Seite setzt das Bremsspektrum erst oberhalb einer Grenzwellenlänge λ_{gr} ein. Dies folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung: Haben die Elektronen die Spannung U durchlaufen, so besitzen sie eine Energie $E = eU$. Wird nun ein Elektron in einem einzigen Prozess abgebremst, so wird diese Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie $h\nu$ umgewandelt. Für die Grenzwellenlänge λ_{gr} ergibt sich dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h\frac{c}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU}, \quad (1)$$

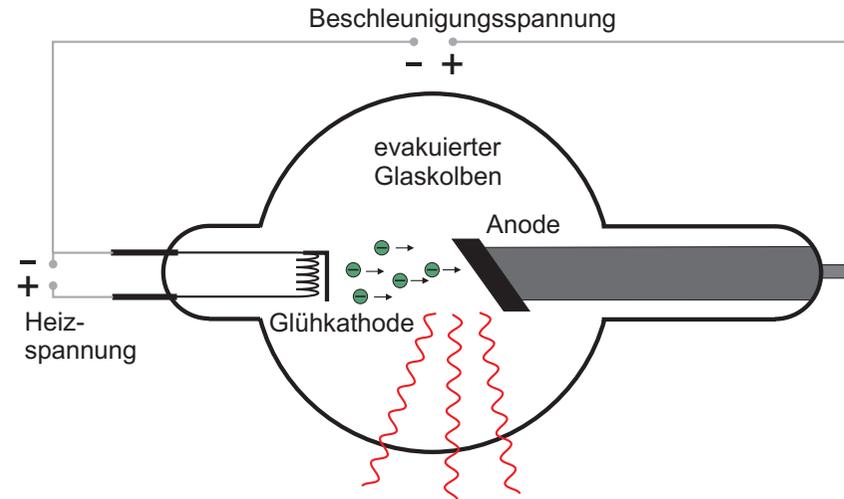


Abbildung 2: Aufbau einer Röntgenröhre.

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen. Bei entsprechend hohen Beschleunigungsspannungen ist dem kontinuierlichen Bremsspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert. Da dieses vom Anodenmaterial der Röntgenröhre abhängt wird es auch als charakteristisches Spektrum bezeichnet. Die in der Röntgenröhre beschleunigten Elektronen können ihre Energie auch durch Ionisation des Anodenmaterials verlieren. Wird ein Elektron aus den innersten Elektronenschalen herausgeschlagen, so kann die entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer höher liegenden Schale gefüllt werden. Dabei wird die freiwerdende Bindungsenergie in Form eines Röntgenquants abgestrahlt. Je nachdem von welcher auf welche Schale der Elektronenübergang stattfindet, gibt es mehrere mögliche Übergänge die sich zu Serien zusammenfassen lassen können. Erfolgt der Übergang stets auf die innerste Schale, die K-Schale, so spricht man von Übergängen der K-Serie: Beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale wird K_{α} -Strahlung emittiert, beim Übergang von der M-Schale auf K-Schale handelt es sich um K_{β} -Strahlung. In Abbildung 4 links, sind mögliche Übergänge anhand des Termschemas von Molybdän dargestellt.

Die Energie der charakteristischen Linien, lässt sich mit Hilfe des Moseley'schen

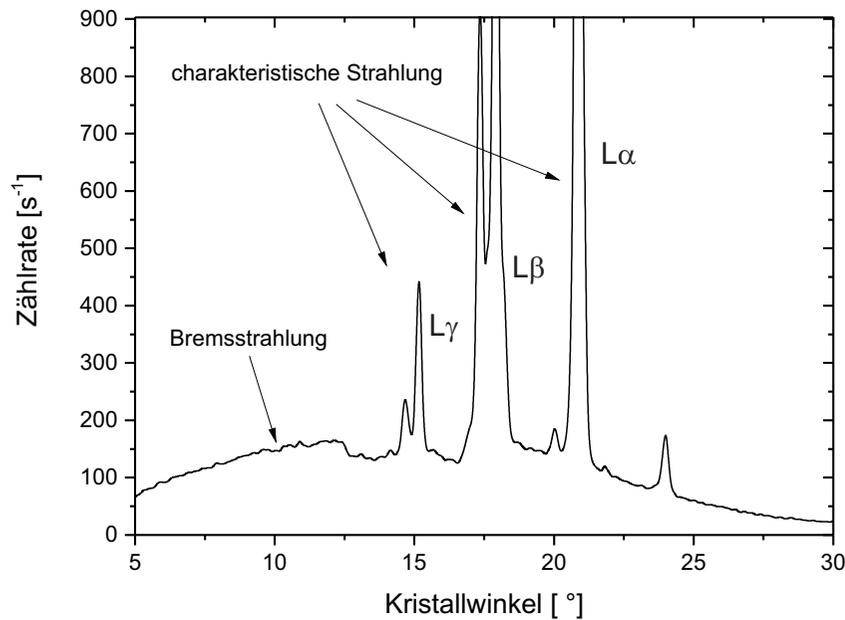


Abbildung 3: Röntgenspektrum

Gesetz abschätzen. Für den Übergang von der n -ten auf die m -te Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = h c R_{\infty} (Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, R_{∞} die Rydbergkonstante ($R_{\infty} = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$), Z die Kernladungszahl und n bzw. m die jeweiligen Hauptquantenzahlen darstellen. Bei der Größe A handelt es sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung der Kernladung durch Elektronen berücksichtigt. Bei der K_{α} -Strahlung wird der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt. Hierfür gilt in guter Näherung $A \approx 1$:

$$K_{\alpha}\text{-Strahlung: } E_{2 \rightarrow 1} = h c R_{\infty} (Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} h c R_{\infty} (Z - 1)^2. \quad (3)$$

Für die Energie der K_{α} -Strahlung von Molybdän erhält man aus dem Mose-

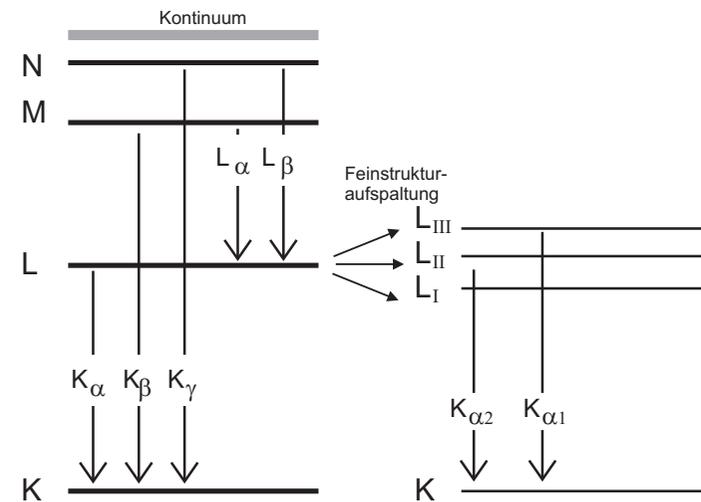


Abbildung 4: Vereinfachtes Termschema eines Atoms

ley'schen Gesetz $E = 17,2 \text{ keV}$. Dies ist eine gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert von $E = 17,4 \text{ keV}$.

Das Moseley'schen Gesetz liefert nur eine Abschätzung der Energie der charakteristischen Strahlung. Tatsächlich besitzen alle Energieniveaus bis auf das K-Niveau noch eine Feinstruktur dessen Energie neben der Hauptquantenzahl auch von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt (Abbildung 4 rechts). So ist beispielsweise das L-Niveau dreifach entartet. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene K_{α} -Übergänge. Der Übergang $L_{III} \mapsto K$ wird als $K_{\alpha 1}$ und $L_{II} \mapsto K$ als $K_{\alpha 2}$ bezeichnet. Der Übergang $L_I \mapsto K$ ist unter Berücksichtigung von Erhaltungssätzen nicht möglich. Diese zusätzlichen Niveaus führen dazu, dass die K_{α} -Linie eine Doppellinie darstellt. Diese Doppellinien sind mit den im Praktikum verwendeten Geräten nicht messbar, da deren Energieauflösung dafür zu gering ist.

Die meisten im Praktikum verwendete Röntgengerät besitzt eine Wolframanode. Die Energien der K-Linien liegen bei 59 keV bzw. 67 keV . Da die maximale Energie des Röntgengeräts nur 35 keV beträgt, können diese nicht angeregt werden. Im Spektrum sind daher nur die L-Linien sichtbar. Bei denjenigen Geräten, die eine Molybdänanode eingebaut haben, werden Sie die vorher genannten K_{α}

und K_β -Linien beobachten.

V.1 Bragg-Reflexion

Zur Untersuchung des Spektrums einer Strahlungsquelle greift man in der Regel auf zwei verschiedene physikalische Prinzipien zurück: Die Dispersion und die Beugung, die im sichtbaren Bereich Anwendung im Prismenspektrometer bzw. im Gitterspektrometer finden. Für Röntgenstrahlung kann die Dispersion nicht ausgenutzt werden, da der Brechungsindex von Materie in diesem Wellenlängenbereich kaum von Eins abweicht. Auch die Ausnutzung von Beugungseffekten ist für Röntgenstrahlung komplizierter. Da Beugungserscheinung nur dann auftreten, wenn die Größe des beugenden Objekts etwa der Größenordnung der Wellenlänge ($\lambda \approx 0,1 \text{ pm bis } 10 \text{ nm}$) entspricht, benötigt man ein Gitter mit äußerst kleinen Strukturen. Solche Dimensionen sind technisch kaum realisierbar.

1912 hat Max von Laue einen Kristall mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Dabei beobachtete er ein gleichförmiges Beugungsmuster, woraus er schloss, dass die Atome im Kristall regelmäßig angeordnet sind. Da die Atomabstände im Kristall von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, eignen sich solche Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen. 1913 gelang es schließlich William Henry Bragg und seinem Sohn William Lawrence Bragg den Zusammenhang zwischen der Kristallstruktur und den entstehenden Beugungsmustern zu erklären. Die Röntgenbeugung an Kristallen wird daher auch als Bragg-Reflexion bezeichnet. Trifft Röntgenstrahlung unter dem Winkel ϑ (Abbildung 5a) auf die Oberfläche eines Kristalls, so wird dieser gemäß des Reflexionsgesetzes reflektiert. Da die Strahlung tief in den Kristall eindringen kann, finden zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt. Die Intensität der reflektierten Gesamtstrahlung hängt vom Gangunterschied Δs der teilreflektierten Strahlung ab. Beträgt dieser für zwei benachbarte Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so interferieren diese konstruktiv. Ist dies nicht der Fall, so löschen die teilreflektierten Strahlen aus (Vielstrahlinterferenz). Ist d der Netzebenenabstand, so folgt aus Abbildung 5a) für den Gangunterschied Δs :

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \quad (4)$$

und damit das Bragg'sche Gesetz:

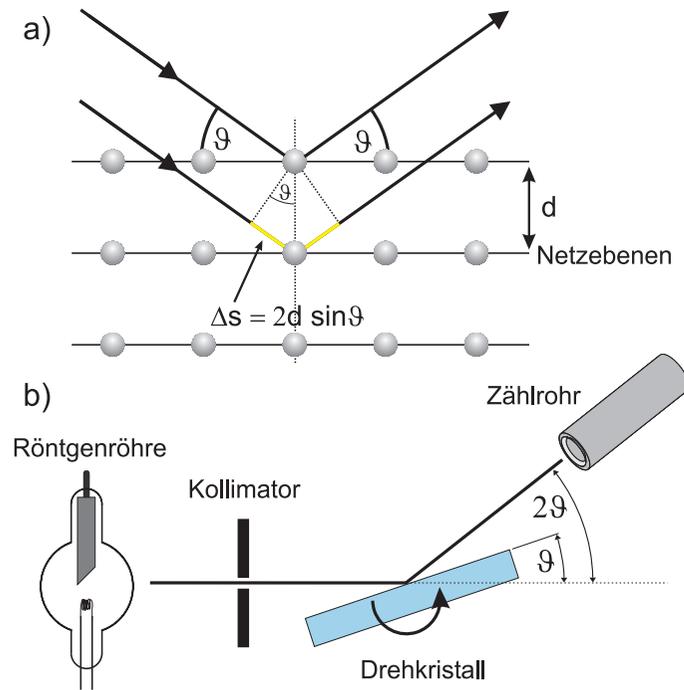


Abbildung 5: a) Bragg- Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Drehkristallmethode zur Messung des Spektrums einer Röntgenröhre.

$$2d \sin \vartheta = n \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz.} \quad (5)$$

Die unter dem Winkel ϑ reflektierte und konstruktiv interferierende Strahlung hängt demnach von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie von der Kristallstruktur (Netzebenenabstand) ab. Somit eignet sich die Bragg- Reflexion zur Monochromatisierung von Röntgenstrahlung und damit zur Messung des Spektrums einer Röntgenquelle. Bei der Drehkristallmethode (Abbildung 5b) wird der Einfallswinkel ϑ variiert, in dem der Kristall um eine Achse senkrecht zur einfallenden Strahlung gedreht wird. Bei jeder Winkelstellung besitzt die reflektierte Röntgenstrahlung eine bestimmte Wellenlänge dessen Intensität z.B. mit

einem Zählrohr gemessen werden kann. Das Spektrum in Abbildung 3 wurde nach diesem Verfahren gemessen.

V.2 Wechselwirkung mit Materie

Die Schwächung von Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie hängt im wesentlichen von zwei Mechanismen ab (Abbildung 6):

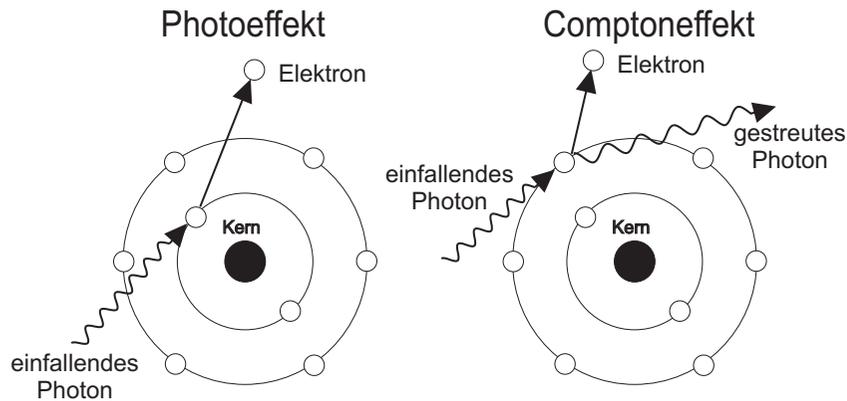


Abbildung 6: Absorption von Röntgenstrahlung durch Photoeffekt und Comptoneffekt.

1. Photoeffekt: Ein Röntgenquant gibt seine Energie an ein Elektron in der Atomhülle ab und schlägt dieses aus der Hülle. Durch Nachrücken äußerer Elektronen, kommt es zu charakteristischer Strahlung. Jedesmal wenn die Energie der Röntgenquanten ausreicht, um eine tiefer gelegene Schale zu ionisieren, steigt die Absorption schlagartig an. Diese charakteristischen Linien sitzen auf einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum (Abbildung 7).
2. Comptonstreuung: Ein Röntgenquant wird inelastisch an einem Hüllenelektron gestreut und verliert dadurch einen Teil seiner Energie. Der Energieverlust wächst für höhere Energien an.

Für kleine Energien dominiert der Photoeffekt, welcher mit steigender Energie rasch abnimmt bis die Comptonstreuung dominiert. Bei sehr großen Energien tritt ein weiterer Effekt auf (Paarbildung).

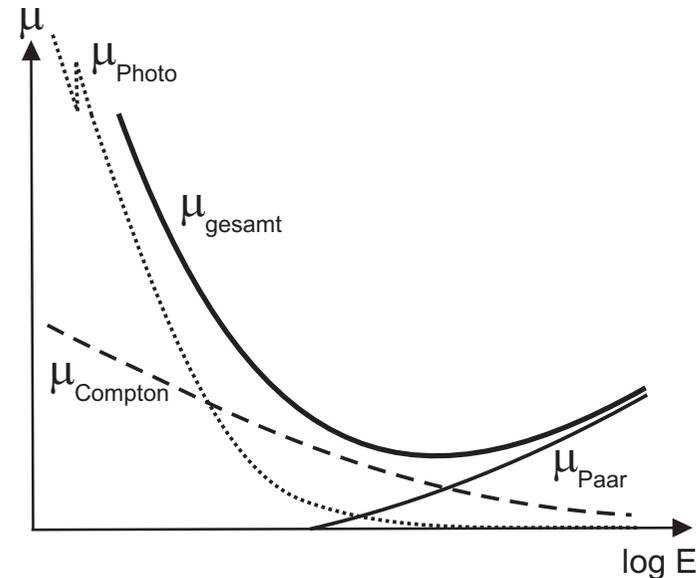


Abbildung 7: Beitrag des Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung zum Schwächungskoeffizient für Röntgen- bzw. γ -Strahlung.

Für monoenergetische Strahlen kann die Intensität der Röntgenstrahlung aufgefasst werden als die Zahl der Photonen, die pro Zeit durch eine Flächeneinheit tritt. Einheit = $1/(\text{m}^2 \text{ s})$

Für die Intensität gilt das Absorptionsgesetz.

$$I_d = I_0 e^{-\mu d}$$

- I_d = Intensität hinter der absorbierenden Schicht der Schichtdicke d
- I_0 = Intensität vor der absorbierenden Schicht
- μ = Absorptionskoeffizient (Einheit $1/\text{cm}$)
- d = Schichtdicke (Einheit cm)

Statt der Schichtdicke führt man oft die Masse pro Fläche (Flächendichte) ein: ρd (ρ = Dichte)

Dann ist

$$I = I_0 e^{-(\mu/\rho)\rho d}$$

Die Größe μ/ρ bezeichnet man als Massenabsorptionskoeffizient.

Wie der radioaktive Zerfall ist die Absorption von Röntgenstrahlen ein statistischer Prozess. Das Absorptionsgesetz beschreibt die nach der Dicke d noch vorhandenen Röntgenquanten, liefert jedoch keine Aussage über ein einzelnes Quant. Analog zum radioaktiven Gesetz können wir hier die Halbwertsdicke einführen, d.h. die Dicke, nach der noch die Hälfte der ursprünglichen Quanten vorhanden ist.

$$H_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Die Halbwertsdicke hängt von der spektralen Zusammensetzung der Röntgenstrahlen ab. Langwellige, d.h. energieärmere ("weiche") Röntgenstrahlung wird stärker absorbiert als kurzwellige ("harte") Strahlung.

Für *monoenergetische* Strahlung gilt:

$$I_d = I_0(d=0) e^{-\mu d}$$

d = Dicke des Absorbers

μ = linearer Absorptionskoeffizient, gemessen in m^{-1} .

Der lineare Absorptionskoeffizient μ ist um so größer, je "dichter gepackt" die Atome im Absorber liegen, d.h. μ ist der Atomdichte proportional. Zur physikalischen Charakterisierung eines Absorbermaterials zieht man daher besser den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ heran. (ρ = Dichte des Materials; μ/ρ wird gemessen in cm^2/g). Der Massenabsorptionskoeffizient hängt von der Energie $h\nu$ der Strahlung, der Ordnungszahl Z und der Massenzahl A des Absorbers ab.

Für die Absorption durch Photoeffekt gilt näherungsweise:

$$\text{Photoeffekt } (\gamma + \text{Atom} \rightarrow \text{Ion}^+ + e^-) \quad \frac{\mu_{\text{Photo}}}{\rho} \sim \frac{Z^4}{\nu^3} \frac{1}{A} \approx \lambda^3 Z^3$$

Die Absorption bei Streuung spielt vor allem für Elemente mit kleinem Z und für hochenergetische Röntgenstrahlung eine Rolle.

Anwendungen der Z - und ν - Abhängigkeit des Photoeffekts:

- Kontrast in Röntgenaufnahmen (höheres Z in Knochen, Kontrastmittel)
- Filterung von Röntgenstrahlung durch Absorber, um weiche Komponenten (ν klein) zu beseitigen. (Härtung von Röntgenstrahlen)

V.3 Gerätebeschreibung

Das im Praktikum eingesetzte Röntgengerät ist als Zählrohr-Goniometer (Abbildung 8) ausgeführt, mit schwenkbarem Messarm und einem Probenträger in der Drehachse. Die Röntgenröhre (Wolframanode, maximal 35 kV, 1 mA) ist in einem separaten Röhrenraum untergebracht, der zur Abschirmung - wie auch der Experimentierraum mit dem Goniometer - mit einer Bleiglas-Schiebetür verschlossen wird. Am Übergang zum Experimentierraum ist ein Kollimator eingesetzt. Der Kristall ist fest an der Drehachse des Goniometers fixiert. Die Drehwinkel von Messarm und Probenträger können im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden, so dass beim Nachweis der Bragg-Reflexe und bei der Aufnahme von Röntgenspektren das auf dem Messarm befestigte Zählrohr immer die richtige Position zum Auffangen der Reflexe hat, d.h. die Probennormale halbiert stets den Winkel zwischen Primärstrahlrichtung und der Richtung der reflektierten Strahlung. Dieser Modus ist für die Messungen der Bragg-Reflexion zu wählen. Die reflektierte Strahlung wird mit einem am Messarm befestigten Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen. Die Spannungsversorgung des Zählrohrs und der Impulszähler sind, genau wie die Steuerung des Goniometers, in das Röntgengerät integriert und über das Bedienfeld rechts von der Röntgenröhre zu steuern. Über das dort platzierte Display lassen sich die Messwerte anzeigen. Die Einstellung des Gerätes kann auch rechnergesteuert mit einem PC erfolgen. Starten Sie dazu die Software **measure** vom Desktop aus. Sollte es Probleme mit der Erkennung des Röntgengerätes geben, schließen Sie das Programm und starten das Röntgengerät neu. Sobald das Röntgengerät wieder betriebsbereit ist, sollte die Software das Gerät erkennen. Im Programm ist eine Symboldarstellung des Röntgengerätes dargestellt. Zum Einstellen der Parameter müssen Sie auf die entsprechenden Bereiche der Symboldarstellung doppelklicken. Soll z.B. die Beschleunigungsspannung eingestellt werden, müssen Sie auf die Röntgenröhre klicken- soll der Winkelbereich modifiziert werden, müssen Sie auf das Goniometer doppelklicken (siehe gelbe Markierungen in Abbildung 9). Für die Messung der Absorption von Röntgenstrahlung befindet sich im Gerät direkt hinter dem Kollimator, eine drehbar gelagerte Scheibe mit 9 verschiedenen Aluminiumabsorbern (Abbildung 10). Die Dicke variiert von 0,02 mm bis 0,18 mm in Schritten

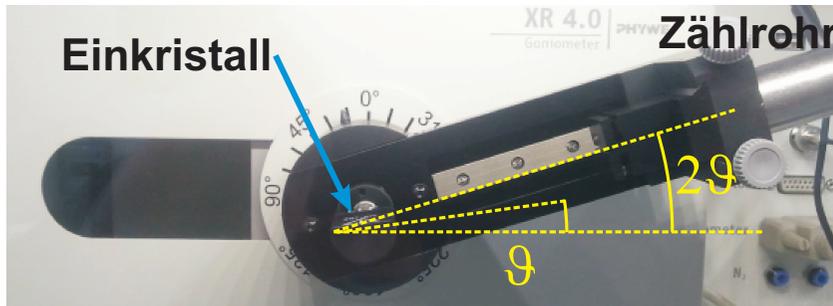


Abbildung 8: Aufbau des Goniometers.

von 0,02 mm. Der jeweilige Absorber kann mit den Pfeiltasten am Steuergerät, das sich außerhalb des Röntgengeräts befindet, ausgewählt werden. Mit der rechten Pfeiltaste wird der Absorber in die Nullposition gestellt. Die gewählte Absorberdicke wird durch Leuchtdioden angezeigt.

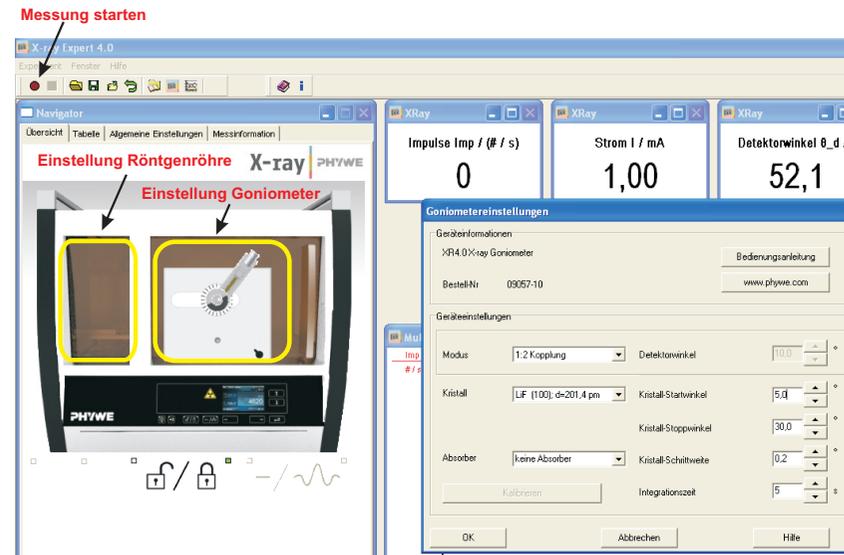


Abbildung 9: Einstellung der Geräteparameter.

VI Durchführung des Versuchs

Aufgabe 1: Messen des Röntgenspektrum der eingebauten Röntgenröhre

Überzeugen Sie sich, dass die Absorberscheibe auf Null steht (Leuchtdiode leuchtet beim Wert 0 μm). Schalten Sie das Röntgengerät auf der Rückseite neben dem Netzstecker ein. Starten Sie das Programm **measure** vom Desktop aus. Klicken Sie doppelt in der Symboldarstellung auf die Röntgenröhre (Abbildung 9) und wählen Sie für die Röhrenspannung 35 kV und für den Emissionsstrom 1 mA. Stellen Sie anschließend den Scanbereich ein indem Sie doppelt auf das Goniometer klicken. Wählen Sie folgende Einstellungen:

- Modus: 1:2 Kopplung
- Kristall: LiF
- Kristall Startwinkel: 5°

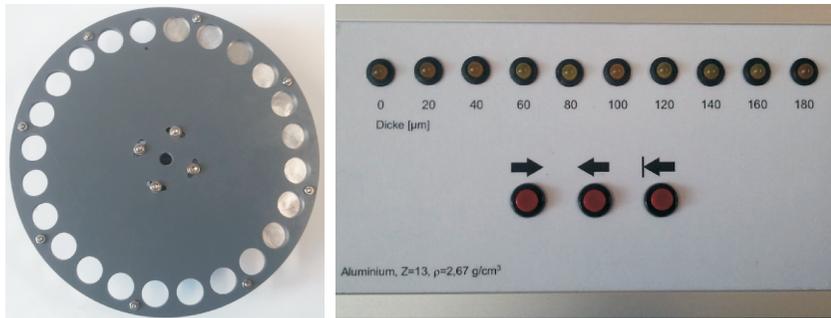


Abbildung 10: Absorberscheibe mit Steuergerät.

- Kristall Stoppwinkel: 30°
- Kristall Schrittweite: $0,1^\circ$
- Integrationszeit: 5 s.

Verriegeln Sie die Tür des Röntgenapparates mit dem Taster unter dem Schlosssymbol auf der Frontplatte des Röntgenapparates. Das verriegelte Schloss muss leuchten. Falls dies nicht möglich ist, müssen Sie die Tür des Röntgenapparates von Hand öffnen, wieder schließen und erneut auf den Taster drücken. Starten Sie im Programm die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol in der linken Ecke der Menüleiste (Abbildung 9).

Die Messung dauert nun etwa 20 Minuten. Danach stoppt der Messvorgang automatisch und es erscheint ein Hinweifenster. Wählen Sie die Option **alle Messungen an measure uebertragen** aus. Dadurch startet ein neues Programm in dem Sie die Daten auswerten und ausdrucken können. Vermessen Sie die Lage der charakteristischen Linien. Am einfachsten geht dies mit der Option **Peakanalyse** im Menü **Messauswertung**. Aktivieren Sie im folgenden Fenster die Option **Ergebnisse einzeichnen** und klicken Sie auf **Berechne**. Speichern Sie das Diagramm ab.

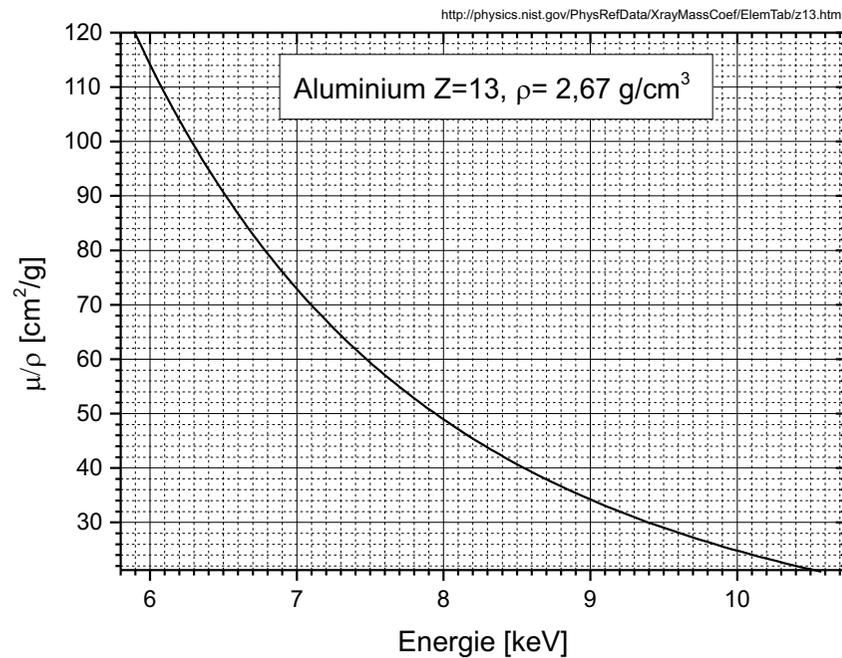
Aufgabe 2: Messen der stärksten Emissionslinie

Lesen Sie aus Ihrer Messung die Lage der L_α Linie ab (stärkste Linie). Gehen Sie zurück zum Messprogramm indem Sie auf das Icon ganz rechts in der Symbolleiste klicken. Wiederholen Sie die Messung aus Aufgabe 2 in einem schmalen Bereich

($1^\circ - 2^\circ$) um die L_α Linie mit einer Integrationszeit von 20 s. Speichern Sie das Diagramm ab.

Aufgabe 3: Messen der Absorption von monochromatischer Röntgenstrahlung

Die Messung soll mit Röntgenquanten gleicher Energie erfolgen. Da die L_α Linie die höchste Intensität im Spektrum besitzt, wird das Goniometer auf diesen Winkel eingestellt. Klicken Sie wieder doppelt auf das Goniometer und wählen Sie für die Option **Kristall Startwinkel** den von Ihnen bestimmten Wert der L_α Linie. **Kristall Stoppwinkel** müssen Sie auf einen etwas größeren Wert stellen. Die Integrationszeit stellen Sie auf 30 s ein. Starten Sie die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol und beenden Sie diese Messung sofort wieder durch einen Klick auf das Symbol mit dem Quadrat. Der Winkel ist jetzt fest eingestellt. Schalten Sie die Röntgenröhre am Bedienfeld des Röntgenapparates ein. Das Wellensymbol muss leuchten. Die Intensität wird nun am Display angezeigt und nach Ablauf der Integrationszeit fortlaufend aktualisiert. Wählen Sie am Steuergerät für die Absorberscheibe den Wert Null und lesen Sie die Intensität am Display ab. Notieren Sie nicht den ersten aktualisierten Wert auf dem Display sondern warten Sie ab bis der Wert auf dem Display erneut aktualisiert wurde. Wiederholen Sie dies für alle weiteren Absorberdicken. Auch hier ist es wichtig, dass Sie nicht direkt den Wert nach der Aktualisierung aufschreiben sondern einen weiteren Messzyklus abwarten. Sie müssen immer sicher sein, dass Sie mit jeder Einstellung tatsächlich genau 30 Sekunden gemessen haben. Notieren Sie bei jeder Messung die Absorberdicke und die gemessene Intensität. Tragen Sie die Messwerte sofort auf ein- bzw. zweidekadesches einfachlogarithmisches Papier auf (x-Achse: linear die Absorberdicke und y-Achse: logarithmisch die Intensität). Falls hier „Ausreißer“ auftreten, haben Sie die Möglichkeit einen einzelnen Wert nochmals nachzumessen.



mit dem Literaturwert aus Abbildung 11.

Abbildung 11: Massenabsorptionskoeffizient von Aluminium

VII Auswertung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie aus dem Diagramm der L_α - Linie die Lage des Peakmaximums sowie die Halbwertsbreite (Breite der Linie in halber Höhe). Mit Hilfe der Bragg- Gleichung und dem Netzebenenabstand von Lithiumfluorid (LiF) mit $d=201,4 \text{ pm}$, können Sie die Wellenlänge und damit die Energie der L_α -Linie berechnen. Den Fehler der Energie berechnen Sie analog aus der Halbwertsbreite. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert $E \approx 8,4 \text{ keV}$.

Aufgabe 2: Tragen Sie im Diagramm der Absorptionsmessung noch Fehlerbalken ein und zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade und eine Fehlergerade mit ein. Bestimmen Sie hieraus die Halbwertsdicke und berechnen Sie den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ in der Einheit cm^2/g . Die Dichte von Aluminium beträgt $2,67 \text{ g/cm}^3$. Schätzen Sie den Fehler ab. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis