

Universität Heidelberg  
Physikalisches Praktikum I für  
Studierende der Molekularen Biotechnologie  
Ausgabe 28. Februar 2024



## Inhaltsverzeichnis

Grundlagen . . . . .	2
Versuch 11 Einführung . . . . .	13
Versuch 31 Optische Abbildung . . . . .	19
Versuch 41 Temperaturmessung . . . . .	29
Versuch 254 Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen . . . . .	36

# Grundlagen

## I Vorbemerkung

Dieses Praktikum verfolgt hauptsächlich drei Ziele:

1. Sie lernen den Umgang mit physikalischen Messgeräten und Messapparaturen.
2. Kenntnisse, die Sie bereits erworben haben (oder noch erwerben werden) sollen durch die Überprüfung im Experiment gesichert werden.
3. Das Führen eines Protokolls.

Zu diesem Zweck enthält das Praktikum Versuche mit überschaubarer Theorie und einfachen Messapparaturen, deren Funktionsweise leicht einzusehen ist. Natürlich ist damit nicht die Messgenauigkeit aufwendiger Apparaturen, wie sie in der Forschung verwendet werden, erreichbar. Das Ziel des Praktikums sind weniger präzise Ergebnisse, sondern Sie sollen lernen, die Einflüsse, die die Messgenauigkeit begrenzen, zu erkennen und einzuschätzen. Aus diesem Grund sollen bei der Auswertung die Ergebnisse stets mit einer Fehlerabschätzung angegeben werden.

Lesen Sie bei der Versuchsvorbereitung die Versuchsanleitung genau durch und überlegen Sie, was bei der Versuchsdurchführung und Auswertung gemacht werden soll, welche Messwerte Sie brauchen, usw. Nur so können Sie zügig messen und vermeiden unnötige Mehrarbeit durch Fehler beim Auswerten.

Gestalten Sie die Auswertung übersichtlich und kennzeichnen Sie alle Angaben so, dass man sofort erkennen kann, worum es sich handelt (z.B.: „aus der Zeichnung abgelesen:“, „Literaturwert:“, „Mittelwert der Messreihe:“). Endergebnisse werden stets zusammen mit ihrem Fehler angegeben und besonders kenntlich gemacht, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Es ist unsinnig, den Fehler mit mehr als zwei Stellen anzugeben; das Ergebnis soll bis auf maximal zwei ungenaue Stellen angegeben werden (s.u.).

Bei graphischen Darstellungen von Messwerten ist folgendes zu beachten:

- Die graphische Darstellung erfolgt grundsätzlich auf Millimeterpapier bzw. Logarithmenpapier.
- Richtige Größe wählen. Nutzen Sie wenn möglich den vollen Bereich des mm-Papiers bzw. Logarithmenpapiers.

- Bei jeder Achse Messgröße und Maßeinheit angeben (Bsp.: T in °C, T [°C], T/°C).
- Um sich das Eintragen der Messpunkte zu erleichtern, empfiehlt es sich eine sinnvolle Achseneinteilung zu wählen (z.B. 1 °C=0,5 cm oder 1 cm oder 2 cm zu wählen und nicht 1 °C=0,4 cm oder 2,5 cm)
- Verbinden Sie beim Zeichnen von Kurven nicht einfach die Punkte miteinander („Malen nach Zahlen“), sondern versuchen Sie die Streuung der Messwerte auszugleichen.
- Befinden sich mehrere Kurven in einem Diagramm, so sind die einzelnen Kurven und Messwerte zu kennzeichnen (Legende hinzufügen).
- Jede Zeichnung, Tabelle und Diagramm muss mit einer Text-Überschrift versehen werden.

## II Vorbereitung

Um das Praktikum effizient durchzuführen, ist eine gründliche Vorbereitung notwendig. Es ist nicht in Ihrem Interesse die Versuche „starr“ nach Anleitung abzuarbeiten, ohne zu verstehen was Sie überhaupt praktizieren. Die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum setzt voraus, dass Sie ein entsprechendes Kenntnisniveau der mit den Versuchen verknüpften Physik besitzen. Ob diese Kenntnisse aus Ihrem Fundus oder aus Ihrer Vorbereitung stammen, ist natürlich belanglos. Informieren Sie sich vor Beginn der Versuchsdurchführung, über die Stichpunkte, die bei den jeweiligen Versuchen unter dem Kapitel „Vorbereitung“ aufgelistet sind. Dabei reicht das alleinige Studium der Praktikumsanleitung keinesfalls aus. **Die Praktikumsanleitung ist kein Lehrbuch!** Zu jedem Versuch sind daher zusätzlich Literaturempfehlungen angegeben. Bei den meisten Versuchen ist es vollkommen ausreichend, wenn Sie sich mit Hilfe der Standardwerke (Walcher, Gerthsen, Bergmann-Schäfer, etc.) auf die Versuche vorbereiten.

Um Ihnen die Vorbereitung zu erleichtern, sind neben den Stichpunkten zusätzlich noch Fragen in der Praktikumsanleitung aufgelistet.

Eine Versuchsdurchführung ohne ausreichende Vorbereitung ist klarerweise ohne Lerneffekt und nicht sinnvoll. Die Praktikantin oder der Praktikant muss in diesem Fall damit rechnen, nach Hause geschickt zu werden und den Versuch zu einem späteren Zeitpunkt zu wiederholen.

Die folgenden Punkte fassen das Basiswissen zusammen, über das Sie bei den Versuchen verfügen sollten:

1. Mathematische Voraussetzungen - elementare Funktionen: Polynome, trigonometrische Funktionen, Logarithmus- und Exponential-Funktion - elementares Differenzieren und Integrieren - gewöhnliche Differentialgleichungen: Schwingungsgleichung/Kraftgesetz, Gleichung des natürlichen Wachstums.
2. Statistik und Fehler - Mittelwert, Standardabweichung, statistische und systematische Fehler, Fehler des Mittelwertes, Fehlerfortpflanzung, Gauß-Verteilung.
3. Die 7 Basiseinheiten des SI-Systems : m, kg, s, A, K, mol, Cd.
4. Mechanik - Newtonschen Gesetze; Kräfteparallelogramm - Erhaltungssätze für Translation und Rotation (Energie, Impuls, Drehimpuls) - Drehmoment, Trägheitsmoment u. Steinerscher Satz - Hooksches Gesetz - Resonanzkurve - Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators und typische Lösungen - Schallgeschwindigkeit, longitudinale und transversale Schwingungen.
5. Elektrizitätslehre - Elementarladung und Ladungserhaltung; Faraday-Konstante, Avogadrokonstante, Stoffmenge - Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln, spezifischer Widerstand - Messbereichserweiterung von Messinstrumenten - Kondensator, Kapazität - Herleitung Kondensatorentladung, Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld.
6. Optik - Reflexions- und Brechungsgesetz - Abbildung mit Linsen (geometrische Bildkonstruktion, Linsengleichung, Abbildungsmaßstab) - kontinuierliche und Linienspektren (qualitatives Verständnis) - Auflösungsvermögen optischer Instrumente.
7. Wärmelehre - Wärme, Zustandsgrößen (Temperatur, innere Energie,...), Zustandsgleichung des idealen Gases - 1. und 2. Hauptsatz, Wärmebilanz, spezifische Wärme, Phasendiagramm, Dampfdruck - Van-der-Waals-Gleichung realer Gase, Verlauf der Isothermen im  $p(V)$ -Diagramm, Gesetz von Dulong-Petit, Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz, Clausius-Clapeyron Gleichung.

Die Kenntnis dieses Basiswissens erspart natürlich nicht das sorgfältige Durcharbeiten der Anleitung und die Vorbereitung der anderen Kapitel im Skript.

Insbesondere sollten Sie sich bei der Vorbereitung auch schon über die Versuchsdurchführung, die Messmethoden und über die Auswertung Gedanken machen. Machen Sie sich bewusst, was und wie Sie messen werden und schätzen Sie ab, welchen Einfluss die Fehler der Einzelmessungen auf den Gesamtfehler haben (Bsp.: eine quadratische Größe geht mit doppeltem Gewicht ein als eine lineare).

### III Durchführung der Versuche

Sehen Sie sich die Apparatur gründlich an und machen Sie sich mit der Funktion aller Einzelteile vertraut. Spielen Sie die Messprozedur nach Möglichkeit zunächst qualitativ durch. Wenn Sie eine elektrische Schaltung herzustellen haben, kontrollieren Sie zunächst selbst sorgfältig, ob Sie keine Schaltfehler gemacht haben. **Vor Anlegen der Spannung muss die Schaltung vom Assistenten abgenommen werden.** Das Protokoll wird auch während der Messungen lückenlos geführt, d.h. man soll keine großen Zwischenräume für spätere Eintragungen lassen. Lassen Sie sich Zeit zum Führen eines ordentlichen Protokolls.

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsaufbaus: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung. Im Einzelnen soll das Protokoll enthalten:

1. Überschrift und Versuchsnummer.
2. Einleitung: Formulierung der theoretischen Grundlagen, sowie physikalischer Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis des Versuchs erforderlich sind.
3. Das Protokoll muss so ausgelegt sein, dass Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann, dann die für den Versuch nötigen Umformungen. Damit man den Einfluss der Fehler der gemessenen Größen auf das Versuchsergebnis leichter übersehen kann, ist es zweckmäßig, die Formeln auf die Form

*Versuchsergebnis = Funktion der direkt gemessenen Größen*

zu bringen. Alle Abkürzungen, die in den Formeln vorkommen, müssen erklärt sein, evtl. mit Hilfe der Skizze der Apparatur. Diesen Teil des Protokolls schreiben Sie am besten schon zu Hause bei der Vorbereitung.

4. Skizze und Beschreibung der Versuchsanordnung (schematisch, Schaltplan bei elektrischen Schaltungen).
5. Knappe aber vollständige Angaben über das Messverfahren, soweit dies nicht völlig selbstverständlich ist. Das Protokoll muss selbsterklärend sein!
6. Präsentieren Sie Ihre Messergebnisse in Form von Tabellen und Diagrammen, die klar und ausreichend beschriftet sein müssen. Kommentieren Sie diese mit einigen einleitenden Sätzen.
7. Führen Sie nach Möglichkeit eine vorläufige Auswertung unmittelbar nach der Messung durch.
8. Bei der Auswertung müssen alle Zwischenrechnungen im Protokollheft ausgeführt werden. Vergleichen Sie, soweit vorhanden, Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten. Bei der Fehlerabschätzung berücksichtigen Sie nur die Faktoren, die Sie quantitativ kennen, also im allgemeinen die zufälligen Fehler und die mutmaßliche Genauigkeit der Eichung der Instrumente. **Es genügt vollständig, sich auf die Faktoren zu beschränken, die die Messgenauigkeit hauptsächlich begrenzen.** Wenn Sie glauben, dass bei dem Versuch systematische Fehler auftreten, die Sie nicht quantitativ erfassen können, machen Sie hierüber eine kurze Bemerkung. Achten Sie darauf, dass Sie alle zur Auswertung nötigen Angaben aufgeschrieben haben (z.B. Barometerstand, Zimmertemperatur, etc.).
9. Zusammenfassung und kritische Diskussion. Fassen Sie am Schluss der Auswertung den gesamten Versuch mit einigen kurzen Sätzen zusammen. Gehen Sie dabei auf die physikalische Fragestellung ein, das Messprinzip, die Messergebnisse und Fehler. Setzen Sie sich kritisch mit dem Versuch auseinander. Gibt es Möglichkeiten den Versuchsaufbau oder das Messprinzip zu verbessern? Gibt es Möglichkeiten die Fehler zu minimieren?

## IV Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung

Jede Messung kann nur mit einer begrenzten Genauigkeit durchgeführt werden. Zwei unabhängige Messungen werden daher unterschiedliche Ergebnisse liefern. Damit das Resultat einer Messung aussagekräftig ist, reicht es nicht aus nur den Zahlenwert des Messergebnisses anzugeben, sondern es muss auch eine Aussage über die Messgenauigkeit gemacht werden. Dies geschieht z.B durch die Angabe eines Intervalls  $[x - \Delta x, x + \Delta x]$  bzw.

$$x \pm \Delta x, \quad (1)$$

innerhalb dessen der „wahre Wert“ mit einer bestimmten, anzugebenden Wahrscheinlichkeit liegt.

Beispiel:

Die Bestimmung der Erdbeschleunigung mit einem Fadenpendel ergab folgendes Resultat:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Die erste Zahlenangabe entspricht der besten Schätzung des „wahren Wertes“. Die zweite Zahl ist die Messgenauigkeit, die man häufig auch den „Fehler“ des Messergebnisses nennt. Das Wort „Fehler“ darf nicht falsch interpretiert werden. Diese Angabe gibt nicht etwa den Betrag an, um den das Messergebnis falsch ist, sondern stellt ein Unsicherheitsbereich dar, in dem der „wahre Wert“ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, werden wir an späterer Stelle diskutieren. Das Resultat der Messung ist dann wie folgt zu interpretieren:

*Als beste Schätzung für die Erdbeschleunigung wurde ein Wert von  $9,81 \text{ m/s}^2$  bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im Intervall  $9,78 \text{ m/s}^2 \dots 9,84 \text{ m/s}^2$ .*

Beachten Sie, dass es bei der Angabe des Messergebnisses und der Messunsicherheit keinen Sinn macht beliebig viele Nachkommastellen anzugeben (Taschenrechnerergebnis). Die Angabe

$$g = (9,8114587 \pm 0,0298682) \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

ist sinnlos. Die Messgenauigkeit soll auf eine oder höchstens zwei signifikante Stellen gerundet werden und die letzte signifikante Stelle des Messergebnisses

soll der selben Größenordnung entsprechen wie die Messgenauigkeit:

$$g = (9,81 \pm 0,03) \text{ m/s}^2. \quad (4)$$

## IV.1 Systematische und Statistische Fehler

Bei einer Messung können zwei Arten von Fehlern auftreten: Systematische Fehler und statistische (zufällige) Fehler. Systematische Fehler führen dazu, dass das Messergebnis einseitig vom wahren Wert abweicht. Eine Wiederholung der Messung zeigt immer die gleiche Abweichung. Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“. Im Gegensatz dazu schwanken bei zugrundeliegenden statistischen Fehlern, die Messwerte zufällig. Mal sind sie größer, das andere mal kleiner als der „wahre Wert“.

### IV.1.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler werden zunächst durch die begrenzte Genauigkeit der Eichung der Instrumente verursacht. Bei Maßstäben und Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit. An vielen Analogmessinstrumenten ist zusätzlich noch eine Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt den relativen Fehler des Messbereichsendwertes an. Wird z.B. mit einem Voltmeter der Klasse 1,5 innerhalb eines Messbereiches von 200 V eine Messung durchgeführt, so beträgt der Fehler 1,5% von 200 V, d.h. 3 V. Bei digitalen Instrumenten wird der Fehler in der Regel durch zwei Größen angegeben. Einen prozentualen Fehler, der sich entweder auf dem Messwert (Angabe *v.M.* = vom Messwert) oder auf den Messbereich (Angabe *v.E.* = vom Endwert) bezieht, sowie eine Fehlerangabe in der Form:  $\pm x$  Digits. Die letztere Angabe bedeutet, dass der Messwert um  $\pm x$  Einheiten der hintersten Stelle der Anzeige schwanken kann.

Beispiel: Mit einem digitalen Voltmeter mit der Genauigkeitsangabe

$$\pm 1,5\% \text{ v.M.}, \pm 3 \text{ Digits}$$

wird ein Spannung von 12,00 V gemessen. Der absolute Fehler berechnet sich aus 1,5% vom Messwert sowie drei Einheiten der letzten Stelle: 1,5% von 12,00 V und  $3 \times 10 \text{ mV} = 180 \text{ mV} + 30 \text{ mV} = 210 \text{ mV}$ .

Desweiteren können systematische Fehler auch durch Umwelteinflüsse wie Temperaturdriften, Einkopplung elektrischer Felder (z.B. Netzbrummen) etc. oder aber auch durch grundsätzliche Mängel des Messverfahrens verursacht werden.

Nr.	$x$ [V]						
1	5,070	6	5,039	11	5,053	16	5,038
2	5,073	7	5,043	12	5,054	17	5,058
3	5,031	8	5,034	13	5,078	18	5,040
4	5,024	9	5,034	14	5,071	19	5,071
5	5,034	10	5,079	15	5,050	20	5,051

Tabelle 1: *Ergebnisse einer 20-maligen Spannungsmessung.*

Z.B. muss bei der Messung an einer hochohmigen Spannungsquelle der Innenwiderstand des Voltmeters berücksichtigt werden (wichtig in Versuch 41 *Temperaturmessung*). Geschieht dies nicht, treten systematische Abweichungen auf. Für die Abschätzung von systematischen Fehlern lassen sich keine allgemeinen Regeln aufstellen. Es kommt im Einzelfall auf den Scharfsinn und die physikalischen Kenntnisse des Experimentators an. Allerdings können systematische Fehler auch noch nach einer Messung berücksichtigt werden. Sind die Ursachen bekannt, kann das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.

### IV.1.2 Statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch zufällige Prozesse während des Messprozesses. Ursachen hierfür sind z.B. das Rauschen eines Sensors oder thermodynamische Prozesse. Auch der Experimentator selbst kann eine statistische Fehlerquelle darstellen, da dieser stets die Messwerte aufnehmen, ablesen und interpretieren muss. All dies kann statistischen Schwankungen unterliegen. Z.B. wird man bei einer mehrmaligen Zeitmessung mit einer Stoppuhr aufgrund schwankender Reaktionszeiten verschiedene Ergebnisse erhalten.

Statistische Fehler haben die Eigenschaft, dass die Messergebnisse zufällig um den „wahren Wert“ schwanken. Falls es möglich ist eine Messung mehrmals zu wiederholen, können solche Fehler mit Mitteln der Statistik aus der Streuung der Messwerte ermittelt werden.

Tabelle 1 zeigt ein Beispiel, bei dem eine elektrische Spannung  $x$  20-mal gemessen wurde. Die Messwerte sind in Abbildung 1 eingetragen.

Gesucht ist ein Wert der die beste Schätzung des wahren Wertes darstellt. Mit Hilfe statistischer Überlegungen lässt sich zeigen, dass dieser Bestwert dem arith-

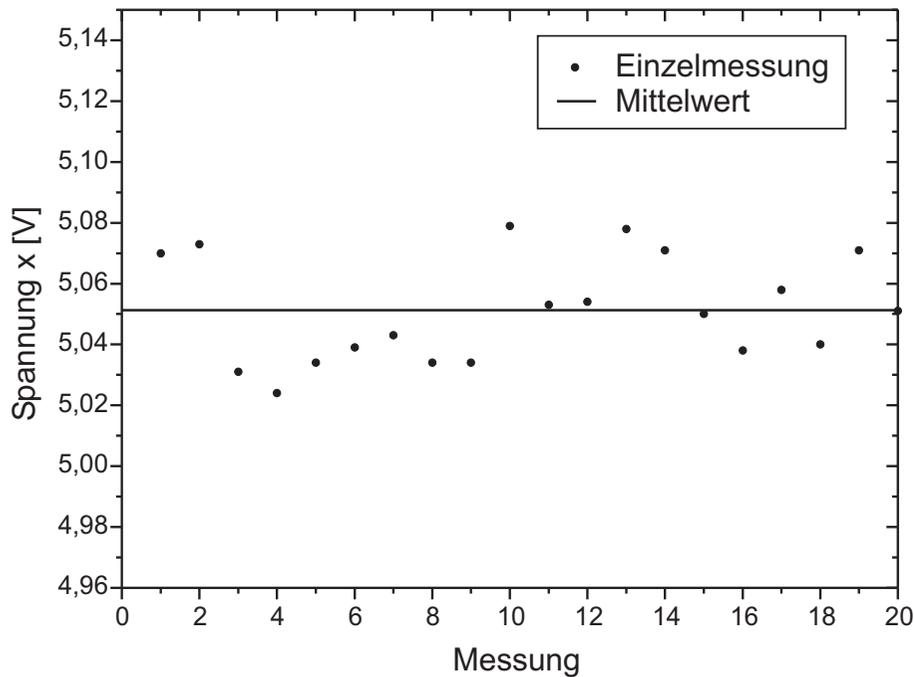


Abbildung 1: Darstellung von 20 unabhängigen Messungen einer elektrischen Spannung  $x$ . Die waagrechte Linie entspricht dem Mittelwert.

metischen Mittelwert entspricht:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (5)$$

Dieser Wert ist in Abbildung 1 als waagrechte Linie eingezeichnet. Neben der besten Schätzung des „wahren Werts“ (Mittelwert) müssen wir zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung machen. Dazu wiederholen wir die Messung nicht nur 20-mal sondern viele Male mehr. In Abbildung 2 sind z.B. 3500 Einzelmessungen aufgetragen. Hier ist noch deutlicher zu erkennen, dass die Messwerte symmetrisch um einen mittleren Wert streuen. Die meisten Messwerte liegen in der Nähe des Mittelwertes. Aber es

gibt auch einzelne „Ausreißer“, die weiter weg vom Mittelwert liegen. Um dies zu quantifizieren empfiehlt sich eine andere grafische Darstellung der Messwerte in Form eines Histogramms. Dabei wird gezählt, wieviele Einzelmessungen innerhalb eines bestimmten Intervalls aufgetreten sind und die entsprechende Häufigkeit in Form eines Säulendiagramms dargestellt. Solch ein Histogramm ist in Abbildung 3 dargestellt. Für sehr viele Messungen, streng genommen für unendlich viele, nähert sich das Histogramm einer bekannten Verteilung, die als Normal- bzw. Gaußverteilung bezeichnet wird und durch

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

dargestellt wird. Die Gaußverteilung beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte,

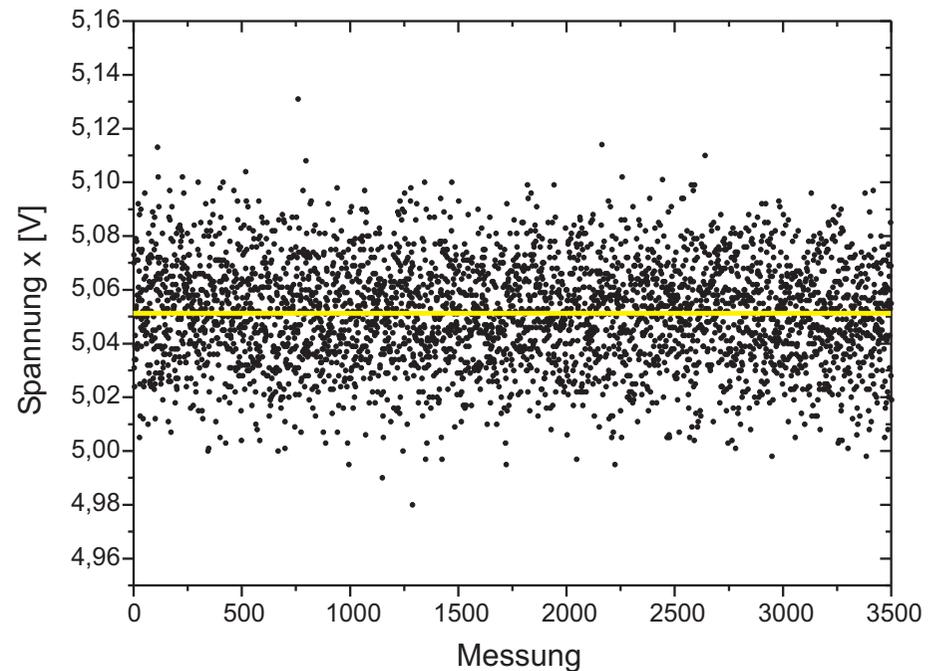


Abbildung 2: Darstellung von 3500 Messungen.

d.h.

$$\int_a^b P(x) dx \quad (7)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert  $x_i$  gemessen wird, der im Intervall  $a \leq x_i \leq b$  liegt. Durch den Vorfaktor  $1/\sqrt{2\pi}\sigma$  ist die Verteilung normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1. \quad (8)$$

Dies ist sofort einsichtig, da mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit irgendein Wert gemessen wird.

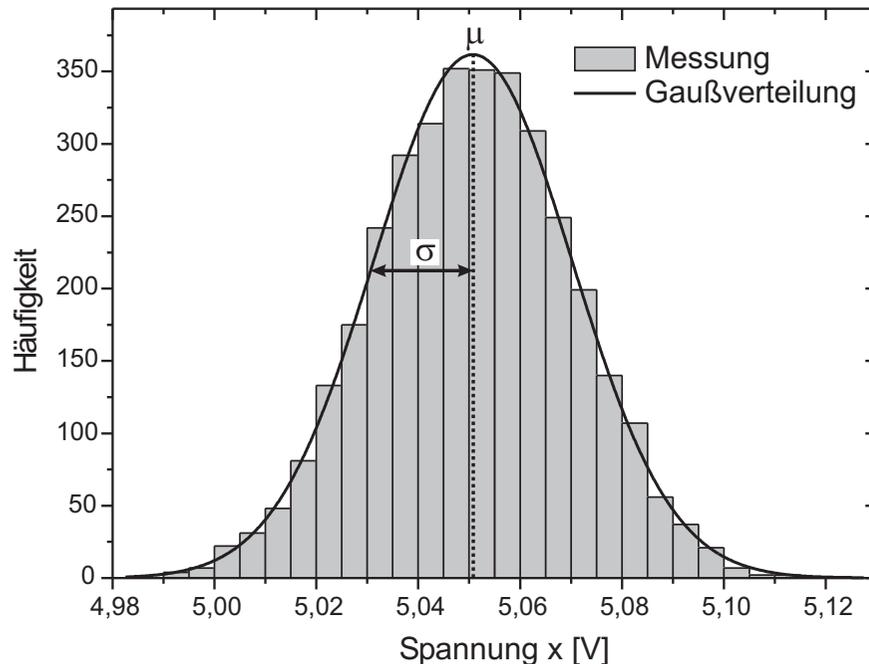


Abbildung 3: Histogramm von 3500 Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie zeigt die dazugehörige Gaußverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ . Die Gaußverteilung ist hier nicht auf Eins normiert, sondern auf die Fläche des Histogramms.

Eine Gaußverteilung besitzt zwei Parameter. Die Lage des Maximums der Verteilung wird durch die Größe  $\mu$  bestimmt und entspricht dem wahrscheinlichsten Wert. Die Breite der Verteilung ist durch die Größe  $\sigma$  (Abbildung 3) gegeben. Falls die Messwerte tatsächlich gaußverteilt sind - und das ist sehr häufig der Fall - können wir annehmen, dass wir das Messergebnis einer großen Anzahl von Einzelmessungen, ebenfalls durch die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  beschreiben können. Wie sich zeigen lässt, konvergiert der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  für eine große Anzahl von Einzelmessungen, gegen den wahrscheinlichsten Wert  $\mu$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \mu. \quad (9)$$

Der Mittelwert stellt somit, wie wir bereits zuvor erwähnt haben, die beste Schätzung des „wahren Werts“ dar.

Die Breite der Gaußverteilung wird durch  $\sigma$  bestimmt. Je größer  $\sigma$ , desto breiter ist die Verteilung und umso größer ist die Streuung der Messwerte um den wahrscheinlichsten Wert  $\mu$ . Wir können daher  $\sigma$  als ein Maß für die Messgenauigkeit interpretieren.

Für eine große Anzahl von Einzelmessungen lässt sich zeigen, dass die Reihe (Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert)

$$S'_E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (10)$$

gegen  $\sigma$  konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_E = \sigma. \quad (11)$$

$S'_E$  wird als **Standardabweichung** einer Messreihe bezeichnet. Allerdings ist hier Vorsicht geboten.  $S'_E$  ist nur dann ein guter Schätzwert für die Streuung der Messwerte, wenn viele Einzelmessungen durchgeführt werden. Bei nur wenigen Messungen wird die Streuung um den Mittelwert überschätzt. Eine genauere Überlegung zeigt, dass es besser ist als Maß für die Streuung die Größe

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \quad (12)$$

zu verwenden.  $S_E$  wird auch als der **mittlere Fehler einer Einzelmessung** bezeichnet.

Intervall	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
Wahrscheinlichkeit	68,3%	95,5%	99,7%

Tabelle 2: *Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von  $\sigma$ .*

Wird eine Messung viele male wiederholt und als beste Schätzung des „wahren Wertes“ der Mittelwert  $\bar{x}$  angegeben, so ist dieser natürlich genauer als der Messwert einer Einzelmessung und zwar um den Faktor  $1/\sqrt{N}$ :

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (13)$$

$S_M$  wird auch als **mittlerer Fehler des Mittelwerts** oder einfach als **Standardfehler** bezeichnet.

Mit Hilfe von Gleichung (7) lässt sich berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Messwert  $x_i$  im Bereich von  $\pm\sigma$  um den wahrscheinlichsten Wert  $\mu$  schwankt:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} P(x) dx = 68,3 \%. \quad (14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung ein Wert im Bereich  $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$  auftritt beträgt 68,3 %. Analog lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für den  $2\sigma$  bzw.  $3\sigma$ -Bereich bestimmen.

Für das Endergebnis einer Messung gibt man in der Regel den  $1\sigma$ -Fehler  $S_E$  bzw.  $S_M$  an. Wird ein größerer Fehlerbereich angegeben (z.B.  $3\sigma$ -Fehler) ist dies gesondert zu vermerken.

Beispiel:

Für die in Tabelle 1 angegebenen Messdaten errechnen sich die Ergebnisse wie folgt:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{5,070 \text{ V} + \dots + 5,051 \text{ V}}{20} = 5,051 \text{ V}. \quad (15)$$

Fehler einer Einzelmessung: 
$$S_E = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0173 \text{ V}. \quad (16)$$

Fehler des Mittelwerts: 
$$S_M = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 19} \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} = 0,0039 \text{ V}. \quad (17)$$

Das Endergebnis wird in der Form

$$\bar{x} \pm S_M \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm \Delta x \quad (18)$$

angegeben. Anstatt  $S_M$  schreibt man auch häufig für den Fehler einfach  $\Delta x$ . In unserem Beispiel erhalten wir

$$x = (5,051 \pm 0,004) \text{ V}. \quad (19)$$

## IV.2 Fehlerfortpflanzung

Bei vielen Praktikumsversuchen reicht es nicht aus nur eine physikalisch Größe zu messen und dessen Fehler abzuschätzen. In der Regel sollen aus dem Messergebnis weitere Größen und dessen Genauigkeiten bestimmt werden.

Beispiel:

Es soll die Verlustleistung  $P$  eines ohmschen Widerstands  $R$ , an dem die Spannung  $U$  anliegt, bestimmt werden. Dazu wird der Widerstand  $R$  und die Spannung  $U$  gemessen und gemäß

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (20)$$

die Verlustleistung berechnet. Da sowohl  $R$  als auch  $U$  nur mit einer bestimmten Genauigkeit bestimmt wurden, besitzt auch die daraus abgeleitete Größe  $P$  eine endliche Genauigkeit.

Die Bestimmung dieser Genauigkeit geschieht mit Hilfe der Differentialrechnung. Wenn die direkt gemessenen Größen  $x$  und  $y$  um kleine Beträge  $dx$  und  $dy$  geändert werden, verändert sich der Wert einer Funktion  $f = f(x, y)$  um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (\text{vollständiges Differential}) \quad (21)$$

Hier bedeutet  $\partial f/\partial x$  die partielle Differentiation der Funktion  $f$  nach  $x$ , d.h. die Ableitung von  $f$  nach  $x$ , wobei die Variable  $y$  als Konstante behandelt wird.

Wenn wir in dieser Gleichung die Differentiale  $dx$  und  $dy$  durch die Fehler  $\Delta x$  und  $\Delta y$  der direkt gemessenen Größen ersetzen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich die Fehler im Mittel teilweise kompensieren werden, wenn sie voneinander unabhängig sind. Daher berechnet man den mittleren Fehler  $\Delta f$  durch „quadratische Addition“ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (22)$$

Hier und im Folgenden wird unter  $\Delta x$  bei zufälligen Fehlern, der mittlere Fehler  $S_M$  nach Gleichung (13), bei systematischen Fehlern die oben diskutierten Überlegungen verstanden.

Für das oben angeführte Beispiel (20) berechnet sich der Fehler wie folgt:

$$P = P(U, R) \quad (23)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (24)$$

$$= \sqrt{\left(2\frac{U}{R} \Delta U\right)^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2} \Delta R\right)^2} \quad (25)$$

Die funktionale Abhängigkeit der zu ermittelnden Größe von den direkt gemessenen hat häufig eine einfache Form. Es lohnt sich, die folgenden Formeln zu merken, die aus der allgemeinen Gleichung (22) folgen:

$$f = ax \quad \Delta f = a\Delta x \quad (26)$$

$$f = x + y \quad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (27)$$

$$f = xy, \quad f = x/y \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \quad (28)$$

$$f = x^{\pm b} \quad \frac{\Delta f}{f} = |b| \frac{\Delta x}{x}, \quad b = \text{const.} \quad (29)$$

Merken Sie sich:

Farbe	Frequenz [THz]	$U_S$ [V]	$\Delta U_S$ [V]
gelb	518,7	-0,59	0,05
grün	549,0	-0,72	0,05
blau	687,9	-1,28	0,05
UV	821,3	-1,88	0,05

Tabelle 3: Messdaten aus dem Versuch Fotoeffekt.

1. „Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der absoluten Fehler der Summanden“.
2. „Der relative Fehler des Produkts oder des Quotienten zweier Größen ist gleich der quadratischen Summe der einzelnen relativen Fehler“.

Für eine Fehlerabschätzung kann man statt den Gleichungen (27) und (28) auch die einfacheren Formeln  $\Delta f = \Delta x + \Delta y$  bzw.  $\Delta f/f = \Delta x/x + \Delta y/y$  verwenden. Bevor man mit der Messung beginnt, sollte man sich mit Hilfe der Gleichungen (26) bis (29) überlegen, durch welche Fehler die Genauigkeit der Messung hauptsächlich begrenzt wird. Man kann dann versuchen, die empfindlich in das Resultat eingehenden Fehler klein zu halten.

## V Ausgleichsrechnung

Bei vielen Praktikumsversuchen kommt es häufig vor, dass die Steigung  $m$  einer linearen Funktion bestimmt werden muss. Hier im Praktikum können Sie dies auf zwei verschiedene Arten machen. Eine grafische Methode die hier erläutert werden soll und eine rechnerische Methode die im nächsten Abschnitt *Lineare Regression* diskutiert wird.

Wir wollen die Bestimmung einer Geradensteigung anhand eines Beispiels mit Daten des Versuchs 35, *Fotoeffekt* erläutern. Bei diesem Versuch wird mit Hilfe einer Fotozelle das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden. Dazu wird die Fotozelle mit Licht unterschiedlicher Frequenz (Farbe) beleuchtet und gemessen, bei welcher Sperrspannung  $U_S$  der Fotostrom verschwindet. Die Messdaten sind in Tabelle 3 zusammengefasst und in Abbildung 4 dargestellt. Das Planck'sche Wirkungsquantum lässt sich aus der Steigung  $\Delta U_S/\Delta f$  des Graphen gemäß

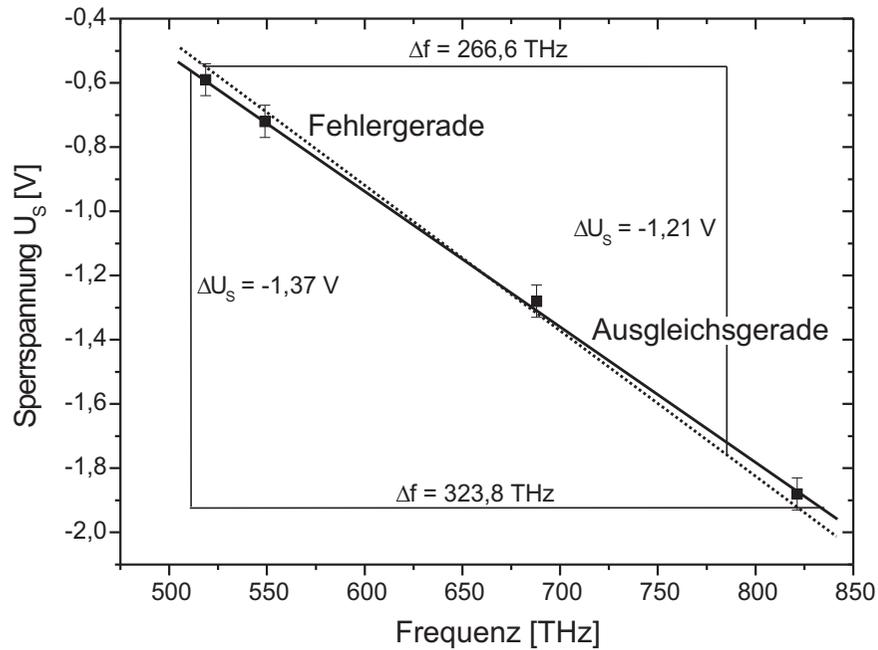


Abbildung 4: Bestimmung der Steigung und dessen Fehler mit Hilfe einer Ausgleichsgerade (durchgezogen) und Fehlergerade (punktiert).

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f}, \quad (30)$$

bestimmen, wobei  $e$  die Elementarladung darstellt. Um die Steigung zu berechnen legen wir zunächst durch alle Messpunkte unter Berücksichtigung der Messfehler eine Ausgleichsgerade. Dabei soll die Gerade so platziert werden, dass die Abweichung der einzelnen Messpunkte von der Gerade im Mittel minimal wird. Für das Planck'sche Wirkungsquantum berechnen wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,37 \text{ V}}{323,8 \text{ THz}} = 6,78 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (31)$$

Um den Messfehler abzuschätzen, legen wir durch die Messwerte eine zweite Gerade (Fehlergerade). Diese sollte maximal steil (oder maximal flach) sein aber

noch innerhalb der Fehler der einzelnen Messungen liegen. Hieraus erhalten wir:

$$h = e \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = e \frac{1,21 \text{ V}}{266,6 \text{ THz}} = 7,27 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (32)$$

Den Fehler schätzen wir aus der Differenz der beiden Steigungen ab. Somit lautet das Ergebnis dieser Messung:

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (33)$$

## VI Lineare Regression

Sofern bei einer Messung keine systematischen Fehler auftreten und die Messdaten normalverteilt sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, für  $x_i$  den Wert  $y_i$  zu messen:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}, \quad (34)$$

wobei  $\Delta y_i$  den Fehler von  $y_i$  bezeichnet. Die Gesamtwahrscheinlichkeit  $P$  alle  $N$  Messwerte zu messen, berechnet sich aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten  $P_i$ :

$$P = \prod_i P_i \quad (35)$$

$$= \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta y_i^2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2\right\}. \quad (36)$$

Gesucht werden nun die Funktionsparameter von  $f(x)$ , für die die Wahrscheinlichkeit  $P$  maximal wird. Der erste Term in (36) stellt eine Konstante dar, die nicht von den Funktionsparametern abhängt. Somit wird die Wahrscheinlichkeit maximal, wenn die Summe in der Exponentialfunktion minimal wird. Diese Summe wird auch als  $\chi^2$ -Summe bezeichnet.

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\Delta y_i}\right)^2. \quad (37)$$

Wir wollen uns im Folgenden auf lineare Funktionen beschränken, d.h.

$$f(x) = mx + n. \quad (38)$$

Für die Berechnung der Parameter  $m$  und  $n$  folgt dann:

$$\chi^2(m, n) = \sum_i \left( \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i} \right)^2 = \text{Minimum} \quad (39)$$

Durch diese Methode wird eine Gerade mit den Parametern  $m$  und  $n$  bestimmt, für die die quadratischen Abstände der Messwerte  $y_i$  von der Geraden minimal wird. Durch den Faktor  $1/\Delta y_i^2$  werden zusätzlich Messwerte mit einem kleinen Fehler  $\Delta y_i$  stärker gewichtet als Messwerte mit einem großen Fehler (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, engl.: least square method).

Für die Berechnung von  $m$  und  $n$  müssen wir die Nullstellen der partiellen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = -2 \sum_i x_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial n} = -2 \sum_i \frac{y_i - (mx_i + n)}{\Delta y_i^2} = 0. \quad (41)$$

Auflösen nach den Funktionsparametern liefert:

$$m = \frac{1}{\xi} \left( \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \quad (42)$$

$$n = \frac{1}{\xi} \left( \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right), \quad (43)$$

mit

$$\xi = \sum \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left( \sum \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2. \quad (44)$$

Für den Fall, dass alle Fehler gleich groß sind, d.h.  $\Delta y_i \equiv \Delta y$ , vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (45)$$

$$n = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (46)$$

Da die Messwerte  $y_i$  fehlerbehaftet sind, besitzen auch die Funktionsparameter einen Fehler den wir mit  $\Delta m$  bzw. mit  $\Delta n$  bezeichnen. Die Fehler berechnen sich nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta m^2 = \sum_i \left( \frac{\partial m}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \quad (47)$$

$$\Delta n^2 = \sum_i \left( \frac{\partial n}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \quad (48)$$

Mit Hilfe von Gleichung (42) und (43) erhalten wir:

$$\Delta m^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \quad (49)$$

$$\Delta n^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}, \quad (50)$$

wobei  $\xi$  in Gleichung (44) definiert wurde. Sind wiederum alle  $\Delta y_i \equiv \Delta y$  gleich groß, so vereinfachen sich diese Berechnungen zu

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{1}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (51)$$

$$\Delta n^2 = \frac{\Delta y^2}{N} \frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (52)$$

Die hier ausgeführten Überlegungen gelten nicht nur für lineare Funktionen, sondern lassen sich auch auf andere Funktionen übertragen.

Wir wollen wieder eine Beispielrechnung mit den Daten des Versuchs Fotoeffekt (Tabelle 3) durchführen. Hier entspricht  $x = \text{Frequenz}$ ,  $U_S = y$  und  $\Delta U_S = \Delta y$ . Da die Fehler der einzelnen Messungen alle gleich groß sind, müssen wir nur die Mittelwerte in Gleichung (45) berechnen:

$$\bar{x} = 6,442 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (53)$$

$$\bar{y} = -1,118 \text{ V} \quad (54)$$

$$\overline{xy} = -7,815 \times 10^{14} \text{ VHz} \quad (55)$$

$$\overline{x^2} = 4,295 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (56)$$

$$\bar{x}^2 = 4,150 \times 10^{29} \text{ Hz}^2 \quad (57)$$

Für die Steigung folgt:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz}. \quad (58)$$

Das Plank'sche Wirkungsquantum erhalten wir durch Multiplikation mit der Elementarladung:

$$h = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,238 \times 10^{-15} \text{ V Hz} = 6,79 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (59)$$

Den Fehler berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (51):

$$\Delta m^2 = \frac{\Delta y^2}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}, \quad (60)$$

wobei nach Tabelle 3 für  $\Delta y = 0,05 \text{ V}$  und für  $N = 4$  zu wählen ist. Wir erhalten für den Fehler von  $h$ :

$$\Delta h = e \Delta m = 0,33 \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (61)$$

Das Messergebnis lautet somit

$$h = (6,8 \pm 0,3) \times 10^{-34} \text{ Js}. \quad (62)$$

## Versuch 11 Einführung

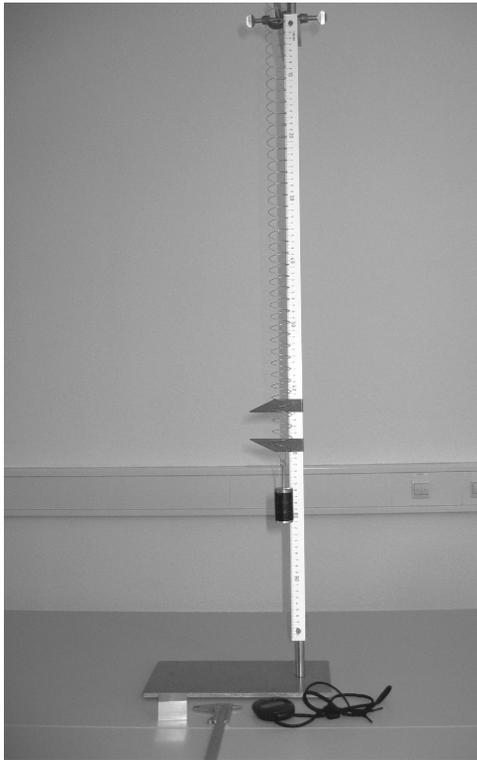


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

### I Vorbemerkung

Ziel des Einführungsveruches ist es Sie mit grundlegenden Techniken des Experimentierens und der Auswertung der Messdaten vertraut zu machen. Diese Grundkenntnisse sind für eine erfolgreiche Durchführung des Praktikums notwendig.

Bei diesem Versuch werden Sie Messungen am Federpendel durchführen. Zunächst wird die Federkonstante gemessen. Das Ergebnis dieser Messung wird verwendet um in einer zweiten Messung die Erdbeschleunigung zu bestimmen. Sie werden in diesem Versuchsteil den statistischen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Federpendels kennen lernen. Es soll auch gezeigt werden, dass zwei scheinbar identische Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer unterschiedliche Messgenauigkeiten besitzen. Um aus den Messdaten die Federkonstante und die Erdbeschleunigung zu extrahieren ist es notwendig die Ergebnisse graphisch darzustellen. Aus den Diagrammen die erstellt werden, kann man die zu bestimmenden Größen einschließlich des Messfehlers ablesen.

### II Messmethode:

Die Differentialgleichung für ein Federpendel lautet:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (1)$$

Wenn man das Federpendel zur Zeit  $t = 0$  um  $x_0$  auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (3)$$

Die Periodendauer  $T$  ist mit  $\omega$  wie folgt verknüpft:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Somit ergibt sich für die Periodendauer zu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5)$$

Misst man die Periodendauer  $T$  als Funktion der Masse  $m$  so kann man hieraus die Federkonstante  $D$  bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse  $m$  belastet, so gilt:

$$mg = Dx \quad (6)$$

Da der Wert der Federkonstante  $D$  aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

### III Durchführung

#### Aufgabe 1: Fehlerbestimmung zweier Messmethoden

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse von 200g. Messen Sie dann je 10 mal 3 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen. Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalauschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 10 mal 3 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes<sup>1</sup>. Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden Methoden.

#### Aufgabe 2: Messen der Schwingungsdauer als Funktion der Masse

Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit Massen zwischen 50 g und 250 g in Schritten von 50 g. Für jede Masse werden dreimal drei Pendelschwingungen ausgemessen. Diese Messreihe wird dazu benutzt die Federkonstante des Pendels zu bestimmen.

#### Aufgabe 3: Bestimmung der Auslenkung als Funktion der Masse

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit den Massen 0g, 50g, 100g, 150g, 200g und 250g beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Notieren Sie die Ablesegenauigkeit für die Auslenkung!

### IV Auswertung

Tragen Sie zunächst die Ergebnisse der Vergleichsmessungen der Schwingungsdauer in ein Histogramm ein. Wählen Sie für beide Histogramme den gleichen Abszissenbereich! Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Histogramm für eine Messreihe. Berechnen Sie für beide Methoden den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Welche Methode ist genauer? Was ist der Grund?

<sup>1</sup>Für eine Messreihe mit  $n$  Messungen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und dem Mittelwert  $\bar{x}$  ist der mittlere Fehler der Einzelmessung (auch Standardabweichung) durch  $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$  definiert. Der mittlere Fehler des Mittelwertes ist durch  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$  gegeben.

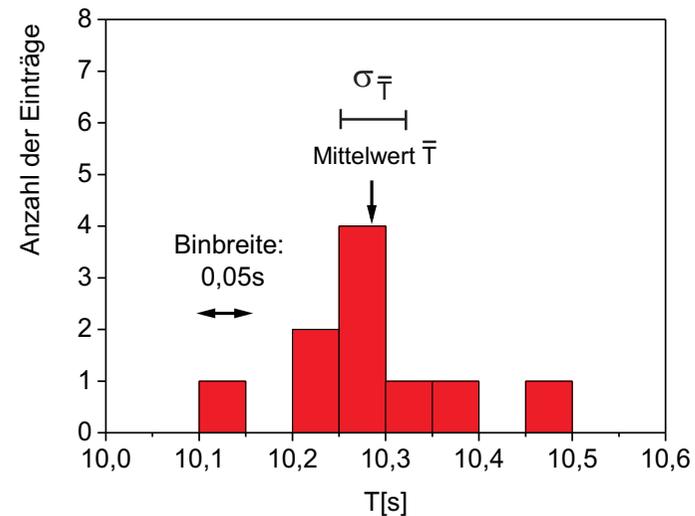


Abbildung 2: Histogramm einer Messreihe.

Messung	$T$ [s]	$\bar{T}$ [s]	$\sigma_T$ [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	10,11	10,285	0,094	0,03
2	10,23			
3	10,34			
4	10,28			
5	10,26			
6	10,24			
7	10,28			
8	10,46			
9	10,27			
10	10,38			

Um die Federkonstante aus der Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse zu bestimmen, wird eine graphische Methode verwendet. Hierzu wird

Gleichung (5) geschrieben als

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m \quad (7)$$

Dies lässt sich als Geradengleichung

$$y = ax + b \quad (8)$$

interpretieren wenn man

$$\begin{aligned} x &= m \\ y &= T^2 \\ a &= \frac{4\pi^2}{D} \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

setzt. Daher wird im Diagramm das Quadrat der gemessenen Schwingungsdauer  $T$  gegen die Masse  $m$  aufgetragen. Der Wert von  $T^2$  und von  $m$  sind fehlerbehaftet. Folglich müssen Fehlerbalken in das Diagramm eingezeichnet werden. Der Fehler wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern der Mittelwerte der Schwingungsdauern bestimmt. Als nächstes wird die Steigung aus dem Diagramm bestimmt in dem eine Gerade so in das Diagramm gelegt wird, dass die Gerade die Messwerte möglichst gut beschreibt. Die Steigung dieser Geraden kann nun aus dem Diagramm nach

$$a = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \quad (10)$$

abgelesen werden. Um den Fehler von  $a$  zu erhalten werden in dasselbe Diagramm zusätzlich Fehlergeraden eingezeichnet. Die Fehlergeraden werden so gelegt, dass sie noch gerade die Messungen unter Berücksichtigung des Messfehlers beschreiben könnten. Die Differenz der Steigungen der optimierten Geraden und der Fehlergeraden wird als Fehler der Steigung  $\sigma_a$  verwendet. Nach Gleichung (9) kann nun die Federkonstante und mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz der Messfehler der Federkonstanten berechnet werden.

Nach Gleichung (7) sollte man erwarten, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Dies ist aber nicht der Fall. Überlegen Sie sich die Ursache hierfür. Aus dem selben Grund ist es übrigens auch nicht möglich die Federkonstante für einzelne Messungen direkt aus Gleichung (5) zu bestimmen. Die graphische Bestimmung der Federkonstante ist in diesem Fall unerlässlich! Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem zweiten Diagramm die

Auslenkung des Federpendels gegen die Masse aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden, da Gleichung (6) wieder als Geradengleichung der Form

$$x = \frac{g}{D} m \quad (11)$$

dargestellt werden kann. Die Steigung

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta m} \quad (12)$$

und ihr experimenteller Fehler können nun nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Erdbeschleunigung wird nach

$$g = D \cdot a \quad (13)$$

berechnet. Um den Fehler der Erdbeschleunigung zu bestimmen muss die Fehlerfortpflanzung angewendet werden, da sowohl der Wert von  $D$  als auch der Wert von  $a$  fehlerbehaftet sind.

## V Messprotokoll

### Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer:

Nr.	Anzahl der Schwingungen $n$	Messzeit $t$ [s]	Periodendauer $T$ [s]	Mittelwert $\bar{T}$ [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Maximalauslenkung.

Nr.	Anzahl der Schwingungen $n$	Messzeit $t$ [s]	Periodendauer $T$ [s]	Mittelwert $\bar{T}$ [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Nulldurchgang

Ablesegenauigkeit der Stoppuhr: .....

### Messung der Federkonstante:

$m$ [g]	Nr.	Anzahl der Schwingungen $n$	Messzeit $t$ [s]	Periodendauer $T$ [s]	Mittelwert $\bar{T}$ [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
50	1	3				
	2	3				
	3	3				
100	1	3				
	2	3				
	3	3				
150	1	3				
	2	3				
	3	3				
200	1	3				
	2	3				
	3	3				
250	1	3				
	2	3				
	3	3				

Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Start/Stop bei

.....

### Messung der Erdbeschleunigung:

$\Delta m$ [g]	Auslenkung $x$ [mm]	Ablesefehler $\Delta x$ [mm]

Messung der Auslenkung als Funktion der Masse

## VI Beispiele für die Darstellung von Messergebnissen

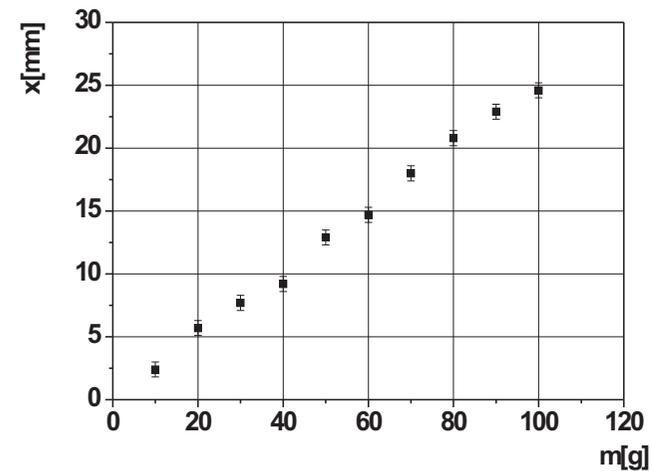
Abschließend werden noch ein paar Beispiele dafür gegeben, wie Messdaten graphisch dargestellt werden sollen. Es werden auch einige Beispiele für typische Fehlerquellen beim Zeichnen von Diagrammen gezeigt.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich zu

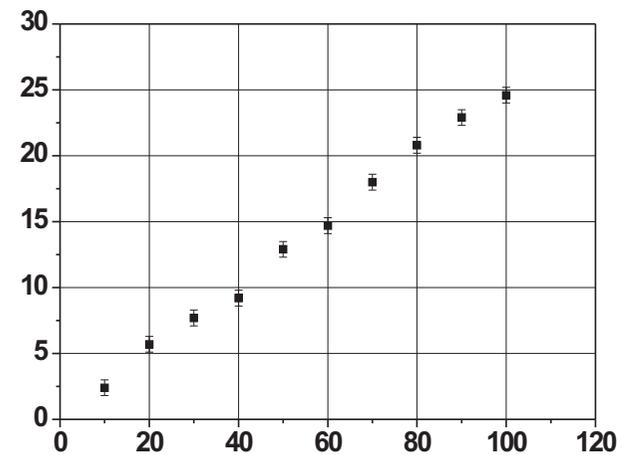
$$a_{\text{Ausgleich}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{20\text{mm}}{80\text{g}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

die der Fehlergeraden zu

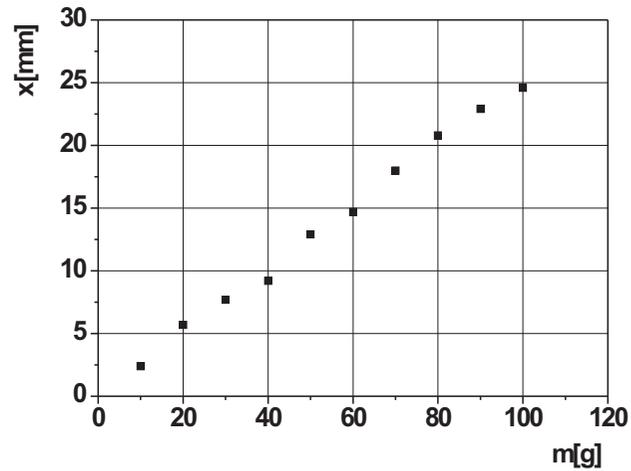
$$a_{\text{Fehler}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{21,5\text{mm}}{78\text{g}} = 0,276 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$



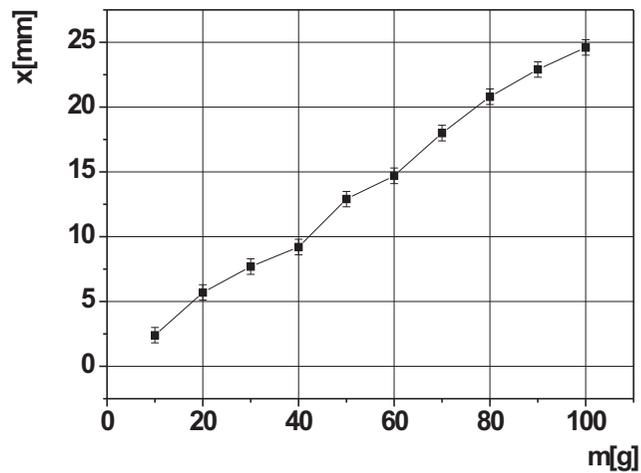
(a) Richtige Darstellung von Messwerten.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Achsenbeschriftungen fehlen.



(a) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Fehlerbalken fehlen.



(b) Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Messpunkte sind durch eine (unphysikalische) Zick-Zack-Linie verbunden.

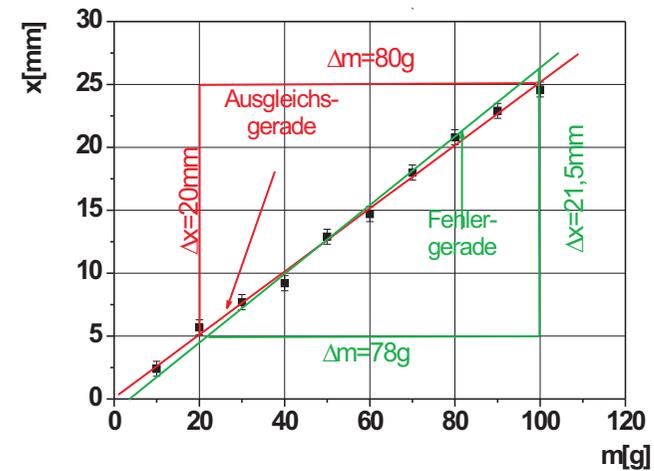


Abbildung 5: Richtiges Anpassung einer Ausgleichsgerade und Ermittlung der Geradensteigung.

## Versuch 31 Optische Abbildung

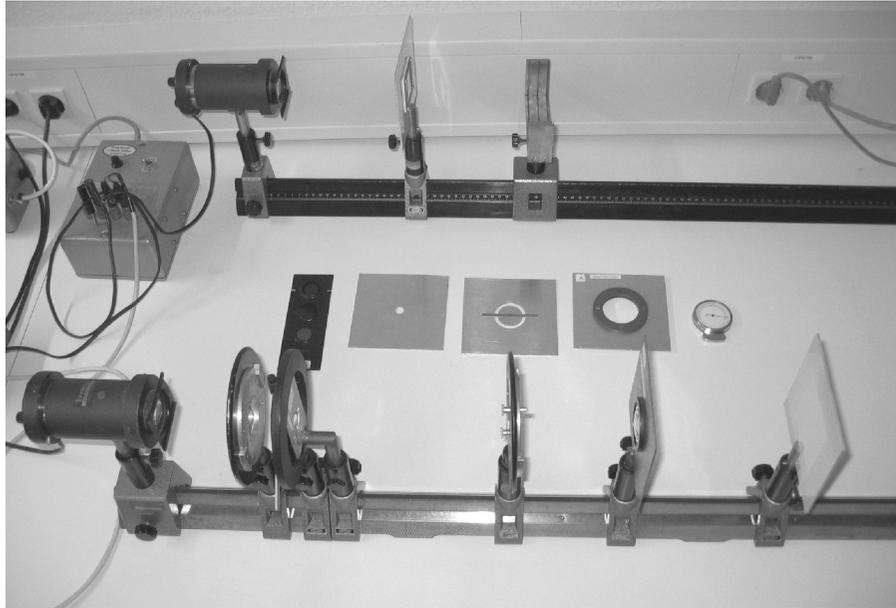


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Optische Abbildung.

### I Messaufbau

- Optische Schiene.
- Lampe mit Kondensator und verschiebbaren Farbfiltern.
- 2 bikonvex Linsen, 1 Achromat- Linse.
- Loch- und Ringblende.
- Fassung zur Aufnahme der Linsen und Blenden.
- Schirm.

- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter.
- verstellbarer Messspalt (Spaltbreite ist in mm geeicht).
- Zwischenbild mit mm-Einteilung.

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer,
- W. Demtröder *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, Springer- Verlag.
- *Homepage des Praktikums:*  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Abbildung durch Linsen, Linsenfehler (speziell sphärische und chromatische Aberration), Snelliussches Brechungsgesetz, Dispersion, graphische Konstruktion der optischen Abbildung, Mikroskop: Strahlengang und Auflösungsvermögen, Beugung am Spalt, Abbildungsmaßstab und Vergrößerung.

*Verständnisfragen:*

1. Konstruieren Sie die Abbildung eines Objekts durch eine Sammellinse und eine Streulinse.
2. Was ist der Unterschied zwischen den Begriffen Abbildungsmaßstab und Vergrößerung?
3. Was ist die physikalische Ursache für die chromatische- und sphärische Aberration?
4. Wie funktioniert die Entspiegelung einer Linse?
5. Wie groß ist das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges? Wodurch wird es limitiert? Wie können kleinere Gegenstände betrachtet werden?

6. Aus welchen optischen Elementen besteht ein Mikroskop?
7. Was ist die Aufgabe des Objektivs, was die Aufgabe des Okulars? Was ist das Messprinzip des Mikroskops?
8. Wie ist die Auflösung definiert?
9. Welche Vergrößerung kann man mit einem professionellen Mikroskop erreichen?
10. Auf einem Mikroskopobjektiv sind folgende Werte abgedruckt: Vergrößerung=40, Tubuslänge=160, NA=0,65. Wie groß ist die Brennweite des Objektivs und wie hoch ist das Auflösungsvermögen wenn mit grünem Licht beleuchtet wird?
11. Qualitativ: Was ist ein Elektronenmikroskop und warum erreicht man damit eine so viel höhere Auflösung als mit einem optischen Mikroskop?

## IV Aufgabe

- Durch variieren der Bild- und Gegenstandsweite sollen die Eigenschaften der optischen Abbildung untersucht werden (Abbildungsmaßstab, virtuelles und reelles Bild, etc.)
- Es ist die Brennweite einer Sammellinse zu messen. Die chromatische Aberration ist experimentell zu untersuchen und der Einfluss der sphärischen Aberration ist qualitativ zu beobachten.
- Bauen Sie ein Mikroskop auf einer optischen Bank auf. Messen Sie a) die Gitterkonstanten der beiden Strichgitter, b) das Auflösungsvermögen des Objektivs in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Objektivs (quantitativ) und der Wellenlänge (qualitativ).

## V Grundlagen

### Reele und virtuelle Bilder

Bei einer optischen Abbildung werden die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel nach Durchgang durch ein optisches System (Linsen, Spiegel, Auge, „Lochkamera“) in einem Punkt, dem Bildpunkt, wieder vereinigt. Ein

einfaches Beispiel für ein abbildendes optisches System ist der Planspiegel (Abbildung 2). Die von einem Objektpunkt ausgehenden Lichtbündel werden am Spiegel nach dem Reflexionsgesetz in den unteren Halbraum divergent reflektiert. Dadurch scheinen für einen Beobachter alle Lichtbündel aus einem Punkt hinter dem Spiegel zu kommen, obwohl die reflektierten Lichtbündel diesen Bildpunkt überhaupt nicht erreichen. Das Spiegelbild wird daher auch als virtuelles Bild bezeichnet. Allgemein entsteht ein virtuelles Bild im Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung divergenter Lichtbündel. Solche Bilder lassen sich nicht mit einem Schirm (Mattscheibe) auffangen.

Im Gegensatz zum Planspiegel erzeugt ein sphärischer Spiegel ein reelles Bild. Das Abbildungsprinzip beruht auch hier allein auf dem Reflexionsgesetz. Allerdings bedingt die Krümmung der Spiegelfläche, dass die Lichtbündel nicht divergieren sondern sich im Bildpunkt schneiden. Allgemein entsteht ein reelles Bild im Schnittpunkt von Lichtbündeln, die vom gleichen Objektpunkt ausgehen. Das reele Bild lässt sich mit einem Schirm auffangen.

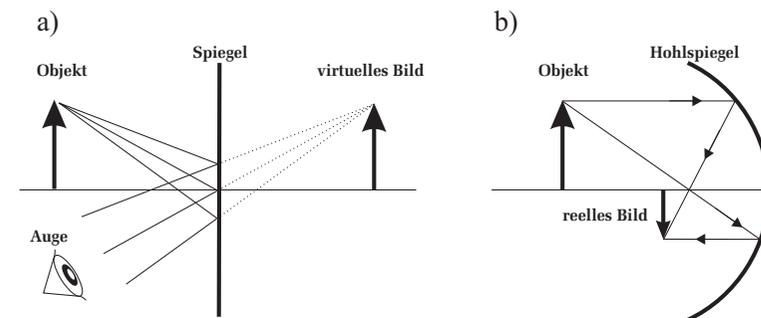


Abbildung 2: a) Virtuelles Bild eines Planspiegels. b) Reelles Bild eines Hohlspiegels.

### Brechung an sphärischen Flächen

Treffen **parallel** zur optischen Achse verlaufende Lichtbündel auf eine transparente, kugelförmige Fläche, die das Medium 2 begrenzt, so werden alle Lichtbündel in einem Punkt auf der optischen Achse gebrochen (Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser Teilbündel wird als Brennpunkt  $F$  bezeichnet. Der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Kugelfläche entlang der optischen Achse, heißt Brennweite  $f$ . Mit Hilfe einfacher geometrischen Überlegungen und unter Berücksichtigung des Brechungsgesetz folgt für die

Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \frac{1}{r}, \tag{1}$$

wobei  $n_i$  die Brechungsindizes der beiden Medien darstellen und  $r$  der Radius der Kugelkrümmung ist. Diese Gleichung gilt allerdings nur für kleine Einfallswinkel bzw. nur für Lichtbündel, die in einem geringen Abstand  $h$  zur optischen Achse auf die Linse treffen. In der Literatur wird diese Näherung auch als paraxiale oder als Gaußsche Näherung bezeichnet. Bereits mit einer einzigen sphärischen

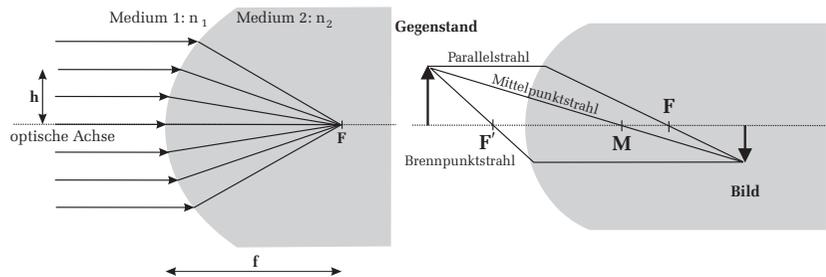


Abbildung 3: Links: Brechung von parallelen Lichtbündeln an einer sphärischen Fläche. Rechts: Abbildung eines Gegenstandes durch ein Kugelsegment.

Grenzfläche lässt sich ein Gegenstand abbilden (Abbildung 3 rechts). Um das Bild des Gegenstandes geometrisch zu konstruieren, bedarf es lediglich zweier Strahlenbündel<sup>1</sup>, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen. Besonders einfach ist die Bildkonstruktion, wenn man spezielle Lichtbündel einzeichnet, nämlich einen der gegenstandsseitig parallel zur optischen Achse verläuft und einen der durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugeloberfläche geht. Mittelpunktstrahlen fallen senkrecht auf die Kugeloberfläche und werden daher nicht gebrochen. Parallelstrahlen werden so gebrochen, dass sie zu Brennpunktstrahlen werden (siehe Abbildung 3 links). Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entspricht dem abgebildeten Bildpunkt. Zur Konsistenzprüfung kann zusätzlich noch ein dritter Strahl eingezeichnet werden: Aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges folgt, dass ein Strahl, der im Medium 2 parallel zur optischen Achse läuft, im Medium 1 die optische Achse im gegenstandsseitigen Brennpunkt  $F'$  schneidet. Von der Gegenstandsseite aus gesehen bedeutet dies, dass ein Brennpunktstrahl zu einem bildseitigen Parallelstrahl wird.

<sup>1</sup>Der Begriff Strahlenbündel und Strahl wird in diesem Text synonym verwendet.

Zusammenfassend sind bei der geometrischen Abbildung eines Gegenstandspunktes, folgende drei Regeln zu beachten:

1. Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt
2. Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen
3. Brennpunktstrahlen werden zu Parallelstrahlen

**Linsen**

Linsen, speziell sphärische Linsen, bestehen aus einem transparenten Material mit dem Brechungsindex  $n$  und sind durch eine kugelförmige Fläche begrenzt. Trifft ein Lichtbündel auf die Linse ist zu berücksichtigen, dass der Strahl insgesamt zweimal an den Grenzflächen mit den Radien  $r_1, r_2$  gebrochen wird. Für dünne Linsen, bei denen die Dicke klein gegenüber der Krümmungsradien ist, ergibt sich für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \tag{2}$$

Die Brennweite hängt also nur vom Brechungsindex und von den Radien der Grenzflächen ab. Je nach Vorzeichen und Kombination der Grenzflächen definiert man verschiedene Linsentypen. Eine Zusammenfassung kann Abbildung 4 entnommen werden. Bei der geometrischen Konstruktion der Abbildung

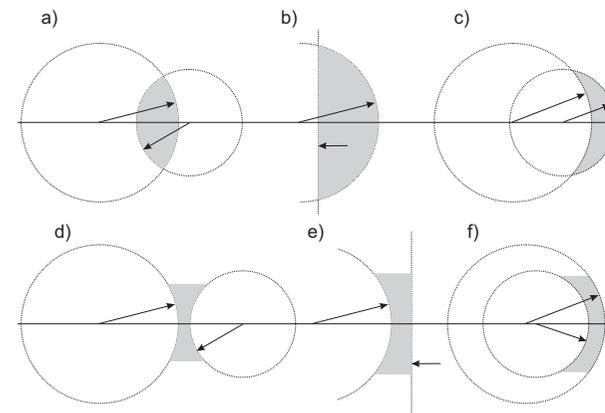


Abbildung 4: Klassifizierung von Linsen: a) bikonvex b) plankonvex c) positiver Meniskus d) bikonkav e) plankonkav f) negativer Meniskus.

durch eine dünne Linse, gelten die gleichen Merksätze wie bei der Brechung an einer einzelnen sphärischen Fläche: **Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt, gegenstandseitige Parallelstrahlen werden zu bildseitigen Brennpunktstrahlen und gegenstandseitige Brennpunktstrahlen werden zu bildseitigen Parallelstrahlen.** Die Brechung erfolgt dabei an der Mittelebene der Linse (Abbildung 5). Es soll nochmals betont werden, dass dies nur für dünne Linsen gilt. Im allgemeinen Fall hat eine Linse zwei sogenannte Hauptebenen, an denen die Brechungen erfolgen. Nur für dünne Linsen fallen diese Hauptebenen zusammen. Bei der optischen Abbildung mit einer Linse

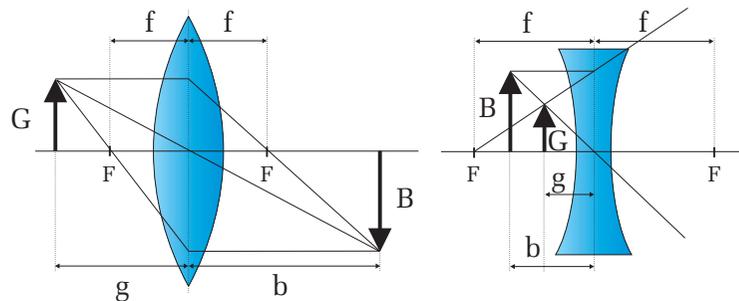


Abbildung 5: Optische Abbildung durch eine dünne bikonvex Linse und eine bikonkav Linse.

sind die Größen Bildweite  $b$ , Gegenstandsweite  $g$  und Brennweite  $f$  durch die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{3}$$

miteinander verknüpft. Bildweite und Gegenstandsweite stehen im direkten Zusammenhang mit der Gegenstandsgröße  $G$  und der Bildgröße  $B$ . Man definiert den Abbildungsmaßstab  $\beta$  durch:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \tag{4}$$

der sich mit Gleichung (3) schreiben lässt als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{b}{f} - 1. \tag{5}$$

### Messung der Brennweite einer Linse

Die Bestimmung der Brennweite einer Linse kann prinzipiell durch Messung der Gegenstands- und Bildweite unter Anwendung der Abbildungsgleichung (3) erfolgen. Allerdings ist diese Methode in der Regel mit größeren Fehlern behaftet, da die Abstände absolut gemessen werden. Dies setzt voraus, dass die Linse gut zentriert in die Fassung montiert sein muss. Für reale, „dicke“ Linsen kommt hinzu, dass sich die Abstände  $g$  und  $b$  nicht auf die Mittelebene sondern auf die Hauptebenen beziehen, deren genaue Lage im allgemeinen unbekannt ist. Diese

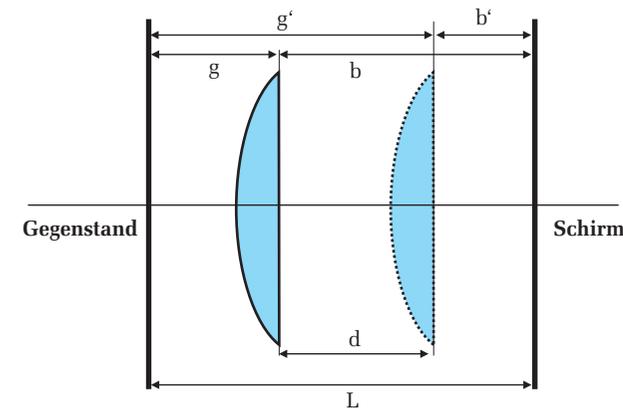


Abbildung 6: Prinzip des Bessel-Verfahrens zur Brennweitenbestimmung.

Nachteile treten bei der sogenannten *Bessel-Methode* nicht auf. Bei diesem Verfahren (Abbildung 6) wird ausgenutzt, dass es bei einem konstanten Abstand  $L > 4f$  zwischen Bild und Gegenstand zwei Linsenstellungen gibt, die zu einer scharfen Abbildung führen. Bei einer Stellung findet eine Vergrößerung, bei der anderen eine Verkleinerung statt. Ist  $d$  der Abstand zwischen diesen beiden Stellungen, der über eine Differenzmessung recht genau ermittelt werden kann, so gilt für die Brennweite:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{6}$$

Die Genauigkeit des Besselverfahrens reicht aus, um bestimmte Abbildungsfehler (Linsenfehler) zu untersuchen. Bei sphärischen Linsen gilt Gleichung (3) nur für achsennahe Strahlen. Lichtbündel, die auf weiter außen von der optischen Achse gelegenen Zonen der Linse treffen, werden nicht mehr in den gleichen

Punkt fokussiert und haben daher eine etwas andere Brennweite als das Linsen-  
 zentrum. Dieser Linsenfehler wird als sphärische Aberration bezeichnet. Es  
 gibt mehrere Methoden die sphärische Aberration einer Linse zu minimieren.  
 Am einfachsten gelingt dies durch Abblenden d.h. mit Hilfe einer Lochblende  
 werden nur achsennahe Lichtbündel zur Abbildung zugelassen. Allerdings geht  
 dies auf Kosten der Lichtstärke, die proportional zur Fläche der Linse ist. Je  
 kleiner der Blendendurchmesser, desto schärfer ist zwar das Bild aber auch um-  
 so dunkler. Eine andere Methode ist die Verwendung von asphärischen Linsen.  
 Solche Linsen sind so geschliffen, dass auch achsenferne Strahlen in den selben  
 Punkt fokussiert werden wie achsennahe. Die Herstellung dieser Linsen ist al-  
 lerdings sehr aufwendig, so dass diese vorwiegend nur in teuren Spezialoptiken  
 eingesetzt werden.

Ein weiterer Linsenfehler ist die chromatische Aberration. Bei der Abbildung  
 eines Gegenstandes der mit weißem Licht beleuchtet wird, treten im Bild  
 Farbsäume auf. Diese beruhen auf der Dispersion des Linsenmaterials. Nach  
 Gleichung (2) geht in die Brennweite der Brechungsindex  $n$  ein, der wiederum  
 von der Wellenlänge abhängt. Im Fall der normalen Dispersion hat blaues Licht  
 beispielsweise einen größeren Brechungsindex als rotes und wird daher stärker  
 gebrochen. Somit ist die Brennweite für kurzwelliges Licht kleiner als für Licht  
 mit einer größeren Wellenlänge.

Da achsenferne Lichtbündel am meisten zur Aberration beitragen, lässt sich der  
 Farbfehler ebenfalls durch Abblenden reduzieren. Eine bessere Methode ist die  
 Verwendung von sogenannten Achromaten. Dabei handelt es sich um Linsen-  
 systeme mit unterschiedlicher Dispersion und Brechkraft, die den Farbfehler für  
 zwei Wellenlängen vollständig ausgleichen können.

### Vergrößerung des Seh winkels: Lupe und Mikroskop

Wenn Sie einen kleinen Gegenstand möglichst groß sehen möchten, so verrin-  
 gern Sie den Abstand zwischen Ihrem Auge und dem Gegenstand, indem Sie  
 beispielsweise den Gegenstand näher an Ihr Auge heranführen. Dadurch wird  
 das Bild auf der Netzhaut größer dargestellt und Sie können feinere Details er-  
 kennen. Aus dem linken Teilbild in Abbildung 7 ist zu erkennen, dass das Bild  
 auf der Netzhaut um so größer ist je geringer der Abstand zum Gegenstand ist  
 oder um so größer der Sehwinkel  $\alpha$  ist. Allerdings können Sie den Gegenstand  
 nicht beliebig nah an das Auge heranführen, da die Ziliarmuskulatur des Auges  
 den Krümmungsradius der Linse nur bedingt variieren kann (Akkomodation).  
 Unterhalb einer bestimmten Entfernung kann der Gegenstand nicht mehr auf  
 die Netzhaut fokussiert werden und der Gegenstand erscheint verschwommen.

Der kleinste Abstand auf dem ein gesundes Auge über einen längeren Zeitraum  
 ermüdungsfrei akkomodieren kann, heißt deutliche Sehweite  $s_0$ . Der Wert von  
 $s_0$  ist auf 25 cm festgelegt. Überprüfen Sie doch mal die deutliche Sehweite bei  
 Ihnen selbst, in dem Sie z.B. diese Anleitung an Ihr Auge heranführen und den  
 Abstand messen, bei dem Sie auch über einen längeren Zeitraum den Text ohne  
 Anstrengung lesen können. Sollen noch feinere Details eines Objekts erkannt

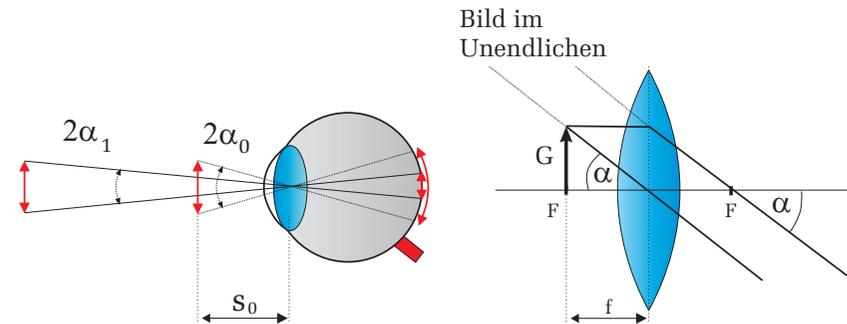


Abbildung 7: Links: Je größer der Sehwinkel  $\alpha$  desto größer ist das Bild auf der  
 Netzhaut. Für Abstände kleiner als die deutliche Sehweite  $s_0 \doteq 25$  cm kann das  
 Bild in der Regel nicht mehr scharf auf die Netzhaut abgebildet werden. Rechts:  
 Wirkungsweise einer Lupe.

werden, so benötigt man optische Instrumente, die den Sehwinkel und damit  
 die Bildgröße auf der Netzhaut vergrößern. Das einfachste Instrument ist die  
 Lupe. Eine Lupe besteht lediglich aus einer einfachen bikonvex Linse mittlerer  
 Brennweite. Ist bei der Abbildung die Gegenstandsweite kleiner oder gleich der  
 Brennweite so erfolgt eine Vergrößerung des Seh winkels. In Abbildung 7 rechts  
 liegt der Gegenstand z.B. genau in der Brennebene der Linse. In diesem Fall  
 ist das Auge völlig entspannt und somit auf Unendlich akkomodiert. Für den  
 Sehwinkel  $\alpha_L$ , wobei der Index L für Lupe steht, ergibt sich:

$$\tan \alpha_L = \frac{G}{f}. \quad (7)$$

Ohne Lupe, bei dem sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite  $s_0=25$  cm  
 befindet, erhält man dagegen für den Sehwinkel  $\alpha_0$ :

$$\tan \alpha_0 = \frac{G}{s_0}. \quad (8)$$

Definiert man als Vergrößerung  $V$  das Verhältnis der Sehwinkel mit Lupe (bzw. allgemein mit einem zusätzlichen optischen Instrument) und ohne Lupe (allgemein ohne optisches Instrument) in der deutlichen Sehweite, so ergibt sich für die Vergrößerung  $V$ :

$$V_{Lupe} = \frac{\tan \alpha_L}{\tan \alpha_0} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (9)$$

**Wenn im Folgenden von Vergrößerung gesprochen wird, ist grundsätzlich die Vergrößerung des Sehwinkels gemeint!**

Typische Werte für die Brennweite einer Lupe liegen zwischen 25 mm und 50 mm. Werte unter 25 mm können nicht realisiert werden, da dann die Abbildungsfehler zu groß werden. Somit kann mit einer gewöhnlichen Lupe maximal eine 10-fache Vergrößerung erreicht werden.

Weitaus größere Vergrößerungen lassen sich mit einem Mikroskop erreichen. Ein Mikroskop besteht im wesentlichen aus zwei Linsen, dem Objektiv und dem Okular, die die Abbildung und Vergrößerung bewirken. Der Strahlengang ist in Abbildung 8 dargestellt. Der zu beobachtende Gegenstand  $G$  befindet sich in der Gegenstandsweite  $g$  etwas außerhalb der Brennweite des Objektivs. Mit dem Objektiv wird dieser Gegenstand in die Bildebene abgebildet. Es entsteht ein reelles, umgekehrtes Bild  $B$ , das im Folgenden als Zwischenbild bezeichnet wird. Mit dem Okular wird dieses Zwischenbild als Lupe betrachtet, d.h. das Zwischenbild befindet sich genau in der Brennweite der Okularlinse, so dass das Auge auf Unendlich akkomodiert.

Um die Vergrößerung des Mikroskops zu bestimmen, muss wieder der Sehwinkel mit und ohne Mikroskop bestimmt werden. Für den Sehwinkel mit Mikroskop ergibt sich aus Abbildung 8:

$$\tan \alpha_M = \frac{B}{f_2}, \quad (10)$$

wobei  $B$  die Bildgröße des Zwischenbilds und  $f_2$  die Okularbrennweite darstellt. Aus dem unteren Teilbild in Bild 8 kann zusätzlich abgelesen werden, dass sich  $G : f_1$  genauso verhält wie  $B : t$ :

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B}{t}. \quad (11)$$

Die Größe  $t$  wird als Tubuslänge bezeichnet und gibt den Abstand zwischen gegenstandsseitigen Objektivbrennpunkt und bildseitigen Okularbrennpunkt an.

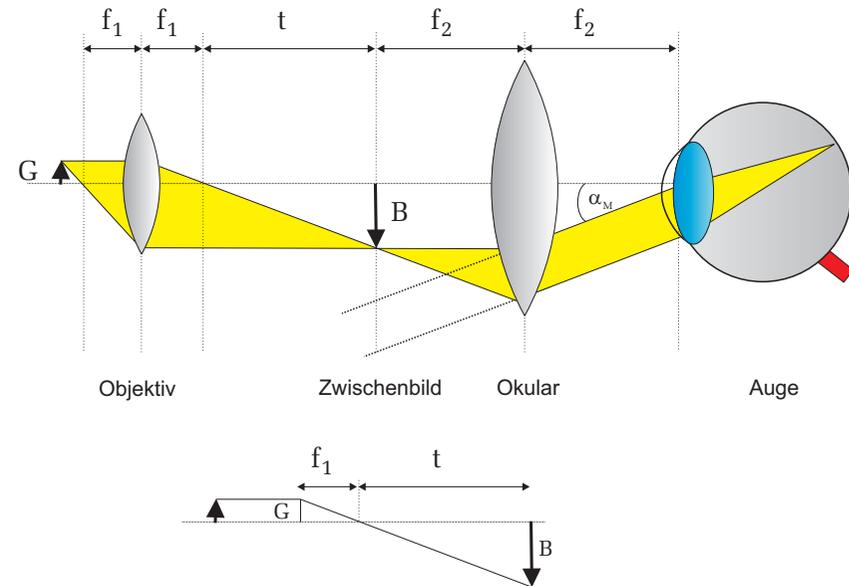


Abbildung 8: Strahlengang eines Mikroskops. Die untere Skizze dient zur Berechnung der Mikroskopvergrößerung.

Setzt man Gleichung (11) in (10) ein, so ergibt sich für den Sehwinkel:

$$\tan \alpha_M = \frac{Gt}{f_1 f_2} \quad (12)$$

und für die Vergrößerung

$$V_M = \frac{\tan \alpha_M}{\tan \alpha_0} = \frac{Gt}{f_1 f_2} / \frac{G}{s_0} = \frac{s_0}{f} = \frac{s_0 t}{f_1 f_2}. \quad (13)$$

Definiert man nun die Objektivvergrößerung durch

$$v_1 = \frac{t}{f_1} \quad (14)$$

und schreibt für die Okularvergrößerung nach Gleichung (9)

$$v_2 = \frac{s_0}{f_2}, \quad (15)$$

so ist die Gesamtvergrößerung das Produkt dieser beiden Einzelvergrößerungen:

$$V_M = v_1 v_2 = \frac{t}{f_1} \frac{s_o}{f_2}. \tag{16}$$

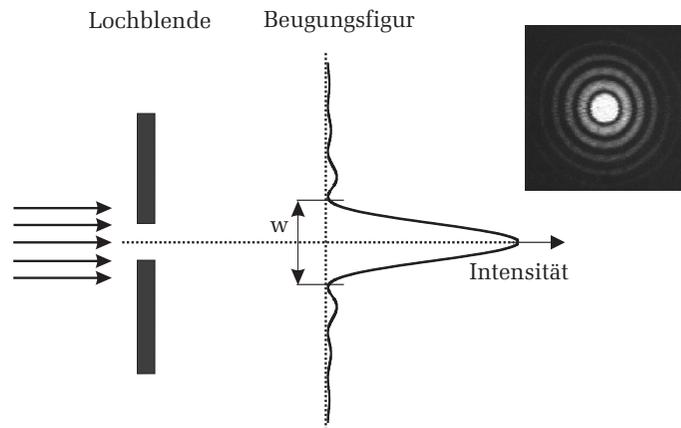


Abbildung 9: *Beugung an einem Spalt.* Auf einem hinter dem Spalt befindlichen Schirm wird nicht ein scharfer Lichtstreifen dargestellt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern eine Beugungsfigur mit einem sehr hellen Maximum, gefolgt von Nebenmaxima, dessen Intensität mit höherer Ordnung rasch abfällt. Das Bild rechts zeigt die Beugungsfigur einer Lochblende.

Offenbar könnte man meinen, dass die Gesamtvergrößerung beliebig erhöht werden kann, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Mikroskops sehr groß wählt. In der Realität ist aber die nutzbare Vergrößerung aufgrund der Wellennatur des Lichtes durch die Beugung begrenzt. Die Beugung ist eine spezielle Interferenzerscheinung von Wellen an geometrischen Hindernissen (Spalt, Lochblende etc.). Bei einem Mikroskop entspricht solch ein Hindernis beispielsweise dem endlichen Durchmesser des Objektivs, das als Lochblende wirkt.

Wird eine Lochblende mit parallelem Licht beleuchtet, so erkennt man auf einem dahinter stehenden Schirm nicht einen hellen Lichtpunkt, wie man es nach der geometrischen Optik erwarten würde, sondern ein Beugungsbild mit einer Intensitätsverteilung wie sie in Abbildung 9 zu sehen ist. Ihr Betreuer wird Ihnen

dies mit Hilfe eines Lasers und einer Spaltblende demonstrieren. Das Beugungsbild besitzt ein sehr helles zentrales Maximum, gefolgt von mehreren Minima und Nebenmaxima, dessen Intensitäten allerdings schnell abnehmen. Bei einem

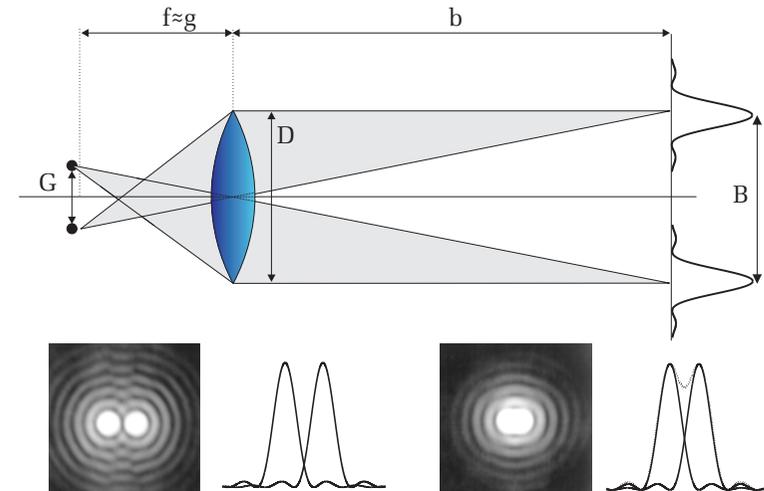


Abbildung 10: *Jeder Objektpunkt erzeugt im Zwischenbild eine Beugungsfigur.* Damit zwei Punkte noch getrennt zu erkennen sind, dürfen sich die Beugungsbilder nicht zu stark überlappen. Im unteren rechten Bild sind die beiden Punkte nicht mehr unterscheidbar.

Mikroskop erzeugt nun jeder Punkt des darzustellenden Gegenstands solch ein Beugungsbild im Zwischenbild (Abbildung 10). Die Breite  $w$  des zentralen Maximums beträgt:

$$w = 2,44 \frac{\lambda b}{D}. \tag{17}$$

Die Herleitung dieser Gleichung können Sie z.B. im Demtröder, *Experimentalphysik 2*, nachlesen.

Je kleiner der Abstand  $g$  zweier Objektpunkte, desto näher rücken auch die Beugungsbilder dieser Punkte im Zwischenbild zusammen. Ab einem gewissen Abstand  $b_{min}$  überschneiden sich die Beugungsbilder so stark, dass sie nicht mehr als zwei getrennte Objekte wahrnehmbar sind. Um dies zu quantifizieren, definiert man das Auflösungsvermögen nach dem Rayleigh-Kriterium: Zwei Objektpunkte sind nur dann voneinander unterscheidbar, wenn der Abstand der

beiden Beugungsfiguren größer ist als die halbe Breite des zentralen Maximums. bzw.: Die Auflösungsgrenze ist also dann erreicht, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das Beugungsminimum des anderen fällt. Der minimale Abstand der Beugungsfiguren ist dann nach Gleichung (17):

$$B_{min} = 1,22 \frac{\lambda b}{D}. \tag{18}$$

Mit Hilfe von (4) erhält man mit  $B_{min}/b = G_{min}/g$  den kleinsten Abstand  $G_{min}$

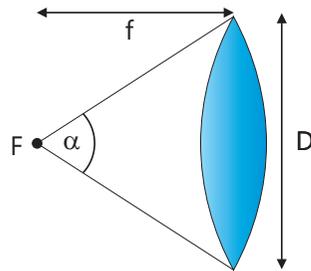


Abbildung 11: Numerische Apertur einer dünnen Linse.

zweier Objektpunkte, der mit dem Mikroskop noch aufgelöst werden kann:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda g}{D}. \tag{19}$$

Da die Objektpunkte praktisch in der Brennebene der Objektivlinse liegen ( $g \approx f$ ), können wir auch schreiben:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}. \tag{20}$$

Der Quotient  $D/f$  ist mit der sogenannten numerischen Apertur NA verknüpft (Abbildung 10). Diese ist definiert durch den Sinus des halben Öffnungswinkels der Objektivlinse multipliziert mit dem Brechungsindex  $n$  des Materials zwischen Objektiv und Präparat (Stichwort Immersionsöl):

$$NA = n \sin \alpha = n \sin \left[ \arctan \left( \frac{D}{2f} \right) \right] \approx n \frac{D}{2f}. \tag{21}$$

Somit folgt schließlich für das Auflösungsvermögen:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}, \tag{22}$$

$$G_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{NA}, \tag{23}$$



Abbildung 12: Kommerzielles Objektiv eines Lichtmikroskops. Die Objektivvergrößerung beträgt 40. Die Zahl 160 besagt, dass das Objektiv nur für Mikroskope mit einer Tubuslänge von 160 mm verwendet werden kann. Zusätzlich ist noch die numerische Apertur,  $NA=0,65$  und die zu verwendene Deckglasdicke von 0,17 mm angegeben.

## VI Durchführung des Versuchs

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie bei jedem Versuch den Versuchsaufbau

### Aufgabe 2: Bestimmung der Linsenparameter der achromatisch korrigierten Linse

Bauen Sie auf der optischen Schiene einen Aufbau bestehend aus Lampe mit Kondensorlinse, Gegenstand, Linse und Bildschirm auf. Verwenden Sie dabei die achromatisch korrigierte Linse (Achromat). Als Gegenstand stehen zwei Dias mit einer Teststruktur zur Verfügung. Verändern Sie nun die Bild- oder Ge-

genstandsweite so, dass Sie ein scharfes Bild erkennen können. Notieren Sie die Bild- und Gegenstandsweiten und berechnen Sie sofort die Brennweite. Fertigen Sie folgende Tabelle an und messen Sie bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten, die Bildweite/Bildgröße, die Art des Bildes (reell oder virtuell) und die Ausrichtung. In den Bereichen  $\infty > g > 2f$  und  $2f > g > f$  sind jeweils drei verschiedenen Positionen auszumessen. Falls das Bild zu klein wird, verwenden Sie das Dia mit großen Doppelpfeil als Gegenstand. Andernfalls nehmen Sie das Dia mit der komplexen Teststruktur. Notieren Sie sich auch bei jeder Messung die Fehler.

	g	G	b	B	Art	Richtung
$\infty > g > 2f$					reel/virtuell	aufrecht/umgekehrt
$g = 2f$						
$2f > g > f$						
$g = f$						
$f > g$						

**Aufgabe 3: Messung der Brennweite der bikonvex Linse  $L_1$  nach dem Besselverfahren**

Stellen Sie auf der optischen Bank einen geeigneten Abstand Bild-Gegenstand ein (etwa  $L \approx 5f$  bis  $6f$ , ein grober Wert für  $f$  ist am Linsenhalter angegeben) und suchen Sie die beiden Scharfeinstellungen auf. Beachten Sie dabei, dass der weiße Schirm nicht in der Mitte der Halterung sitzt. Sie müssen daher die Dicke des Alu-Blechtes (2 mm) beim Abstand  $L$  berücksichtigen (Die Seite mit dem Gitter ist in der Mitte). Es werden 3 Messungen von  $d$  bei festem  $L$  durchgeführt und gemittelt.

**Aufgabe 4: Untersuchung der chromatischen Aberration**

Bei unverändertem Abstand  $L$  werden je 3 Messungen von  $d$  gemacht. Führen Sie diese Messung jeweils mit dem Rotfilter und b) mit dem Blaufilter durch. Beobachten Sie qualitativ die sphärische Aberration, indem Sie einmal die Lochblende und einmal die Ringblende vor die Linse stellen: Wie ändert sich  $d$ ? (Größeres  $d$  heißt kleineres  $f$ .)

**Aufgabe 5: Aufbau eines Mikroskops auf der optischen Bank**

Bauen Sie das Objekt (Dia mit Kreuzgitter) hinter die Lampe mit dem eingesetzten Grünfilter ein. Dicht dahinter wird der Spalt mit den Schneiden zum Objektiv und wieder dicht dahinter das Objektiv eingesetzt. Der Abstand Linsenebene bis zur Mitte des Reiters ist genau 3 cm. Der Schirm für das Zwischenbild

(Dia mit mm-Teilung) wird im Abstand von 25 cm vom Objektiv aufgestellt und dahinter im Abstand  $f_2$  das Okular. Zur Scharfeinstellung schauen Sie durch das Okular und verschieben Sie den Gegenstande bis Sie ein scharfes Bild sehen. Lampe und Kondensator werden so eingestellt, dass das Bild des Gitters in vernünftiger Helligkeit erscheint. Zu diesem Zweck kann der Lampensockel im Gehäuse verschoben werden.

a) Aus der Bildweite  $b$  und  $f_1$  lässt sich der Abbildungsmaßstab berechnen (Gleichung (5)). Bestimmen Sie aus der Größe des Zwischenbildes (z.B. Zahl der Striche pro 5 mm) bei weit geöffnetem Spalt und mit grünem Licht den Strichabstand des Gitters.

b) Verringern Sie nun die Öffnung des Messspalts und beobachten Sie dabei wie die senkrechten Strukturen des Kreuzgitters verschwinden. Messen Sie dreimal die Spaltbreite bei der die senkrechten Strukturen gerade nicht mehr auflösbar sind. Notieren Sie den Abstand des Spalts zum Objekt. Machen Sie sich klar, dass durch das Verengen des Spalts das Auflösungsvermögen nur in einer Dimension eingeschränkt wird! Beobachten Sie qualitativ den Einfluss der Wellenlänge auf das Auflösungsvermögen, in dem Sie das rote und das blaue Farbfilter benutzen.

**VII Auswertung**

**Zu Aufgabe 2:** Werten Sie Ihre Ergebnisse anhand folgender Tabelle aus ( $\beta$  bezeichnet den Abbildungsmaßstab.) Konstruieren Sie grafisch die Abbildung eines Objekts für die jeweiligen Gegenstandsweiten.

Nr.	g	b	Art	Richtung	$\beta$
I	$\infty > g > 2f$	z.B. $2f = b > f$	reel/ virtuell	aufrecht/ umgekehrt	z.B. > 1
II	$g = 2f$				
III	$2f > g > f$				
IV	$g = f$				
V	$f > g$				

Zeichnen Sie Ihre gemessenen Werte für die Bild- und Gegenstandsweite in ein Diagramm ein. Tragen Sie dazu immer ein Wertepaar  $b, g$  so auf, dass die Gegenstandsweite auf der Abszisse und die Bildweite auf der Ordinate liegt und verbinden Sie die beiden Punkte durch eine Gerade (Abbildung 13). Alle Linien

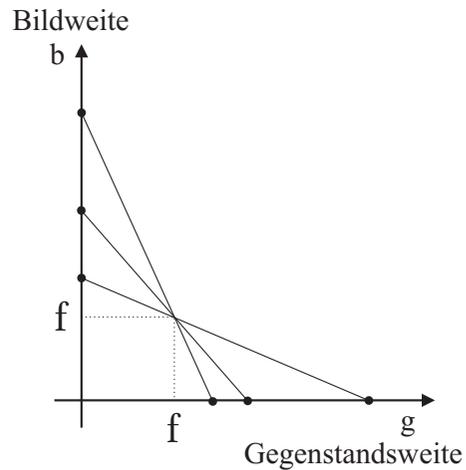


Abbildung 13: *Grafische Bestimmung der Brennweite.*

schneiden sich in einem Punkt, aus dem die Brennweite abgelesen werden kann. Schätzen Sie den Fehler ab.

**Zu Aufgabe 3:** Berechnen Sie die Brennweite nach dem Besselverfahren.

**Zu Aufgabe 4:** Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse bezüglich der untersuchten Linsenfehler.

**Zu Aufgabe 5:** Berechnen Sie die Gitterkonstante des Kreuzgitters und bestimmen Sie das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Berechnen Sie aus der Breite des Spalts und seinem Abstand vom Objekt den Öffnungswinkel des Systems und damit das Auflösungsvermögen; für  $\lambda$  wird der Wert 550 nm eingesetzt. Der erhaltene Wert wird mit der zuvor bestimmten Gitterkonstante verglichen.

## Versuch 41 Temperaturmessung



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Pyrometer
- Pt100-Thermometer (Klasse B)
- Konstantstromquelle 1 mA
- Dewargefäß
- Gasthermometer

- Heizbad mit Rührvorrichtung
- Thermoelement für hohe Temperaturen (PtRh, Typ B oder Typ S) mit Eich-tabelle
- Multimeter
- Butangas-Bunsenbrenner
- Schutzbrille und Schutzhandschuhe

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart,
- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Homepage des Praktikums:  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Temperatur, absoluter Nullpunkt, Gasgesetze, Zustandsänderungen des idealen Gases, reale Gase, van der Waals- Gleichung, Thermoelement, Plancksches Strahlungsgesetz.

*Verständnisfragen:*

1. Was ist Wärme und was ist Temperatur?
2. Was für Thermometer gibt es? Auf welchen physikalischen Prinzipien beruhen sie? Welche Vor- oder Nachteile bei der Anwendung ergeben sich daraus?
3. Wie funktioniert ein Gasthermometer? Warum ist dieses Thermometer für eine absolute Temperaturmessung gut geeignet? Kann man ein beliebiges Gas nehmen? Bis zu welchen Temperaturen halten Sie ein Gasthermometer für geeignet? Welches Gas würden Sie also nehmen?

4. Als Temperaturfixpunkte werden die Temperatur des kochenden Wassers und die Schmelztemperatur des Eises (Eis-Wassermischung) genommen, die relativ leicht realisiert werden können. Von welchen äußeren Parametern hängen diese Fixpunkte ab?
5. Welche prinzipielle Möglichkeit zur Festlegung der Temperatur, unabhängig von einer Arbeitssubstanz, gibt es?
6. Wie funktioniert ein Thermoelement?
7. Wie lässt sich die Oberflächentemperatur von Sternen bestimmen? Wie unterscheiden sich die Spektren von Sirius ( $T \approx 10000 \text{ K}$ ) und der Sonne ( $T \approx 6500 \text{ K}$ )?

## IV Aufgaben

- Temperaturmessung mit Hilfe eines Gasthermometers und eines Platin- Widerstandsthermometers im Bereich zwischen dem Siedepunkt des Wassers und dem Siedepunkt von flüssigem Stickstoff.
- Messungen mit einem Infrarot- Thermometer im Bereich von  $0^\circ\text{C}$  bis  $100^\circ\text{C}$ .
- Als typische Anwendung eines Thermoelementes wird mit dem PtRh-Element die Temperaturverteilung einer Bunsenbrennerflamme gemessen.

## V Grundlagen

Der thermische Zustand eines Stoffes wird durch die Temperatur charakterisiert. Zur Messung dieser Größe benutzt man Instrumente (Thermometer), die die Temperaturabhängigkeit verschiedener physikalischer Größen ausnutzen. Dazu gehören zum Beispiel Ausdehnungsthermometer (Flüssigkeitsthermometer, Gasthermometer), deren Prinzip auf der Temperaturabhängigkeit des Volumens eines Stoffes beruht. Eine weitere große Klasse von Thermometern sind Widerstandsthermometer wie Platin-Thermometer oder Halbleiterthermometer (NTC, PTC). Bei diesen hängt der elektrische Widerstand von der Temperatur ab. Thermoelemente bestehen aus zwei unterschiedlichen, miteinander kontaktierten Metalldrähten. Zwischen den Anschlüssen liegt eine elektrische Spannung

an, die von der Temperaturdifferenz der Kontaktstelle und den Anschlüssen abhängt. In diesem Versuch werden Sie auch Messungen mit einem Pyrometer durchführen. Solch ein Thermometer misst die von einem Körper ausgehende „Wärmestrahlung“, die im Idealfall nur von der Temperatur abhängt. Weltweit gibt es verschiedene Temperaturskalen wie z.B. Celsius oder Fahrenheit, die auf zwei unterschiedlichen Fixpunkten aufbauen. Bei der Celsiuskala sind dies der Schmelz- und der Siedepunkt von Wasser. Der untere Fixpunkt der Fahrenheitskala entspricht der Temperatur einer speziellen Kältemischung, der obere Fixpunkt der „Körpertemperatur eines gesunden Menschen“. Solche Definitionen sind nicht besonders gut reproduzierbar. Aus physikalischer Sicht gibt es nur eine Temperaturskala, die sich aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableiten lässt: Die thermodynamische Temperaturskala oder die Kelvinskala.

Die derzeit gültige internationale Temperaturskala wurde 1990 (ITS-90) festgelegt. Sie definiert spezielle Temperaturfixpunkte im Bereich von  $0,65 \text{ K}$  bis  $2200 \text{ K}$ . Zwischen diesen Temperaturwerten wird mittels definierter Thermometer interpoliert, die zuvor an den Fixpunkten kalibriert wurden. Zu diesen gehören insbesondere die Platin- Widerstandsthermometer (Messbereich ca.  $10 \text{ K}$  bis ca.  $1200 \text{ K}$ ), das He-Gasthermometer und das He-Dampfdruckthermometer für Temperaturen kleiner als  $30 \text{ K}$ , sowie im Hochtemperaturbereich die Strahlungsthermometer.

### V.1 Das Gasthermometer

Das Funktionsprinzip eines Gasthermometers lässt sich mit Hilfe der Idealen Gasgleichung beschreiben:

$$pV = NkT, \quad (1)$$

wobei  $p$  den Druck,  $V$  das Volumen,  $T$  die absolute Temperatur,  $N$  die Teilchenzahl und  $k$  die Boltzmann- Konstante darstellen.

Befindet sich ein Gas in einem abgeschlossenen Behälter, so kann bei konstant gehaltenem Volumen die Temperatur des Gases durch eine Druckmessung bestimmt werden (Gesetz von Amontons):

$$T \propto p \quad \text{für } V = \text{konstant}. \quad (2)$$

Den Aufbau des im Praktikum eingesetzten Gasthermometers ist in Abbildung 2 dargestellt. Es besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon, der über eine Kapillare mit einem elektrischen Manometer verbunden ist. Die Genauigkeit,

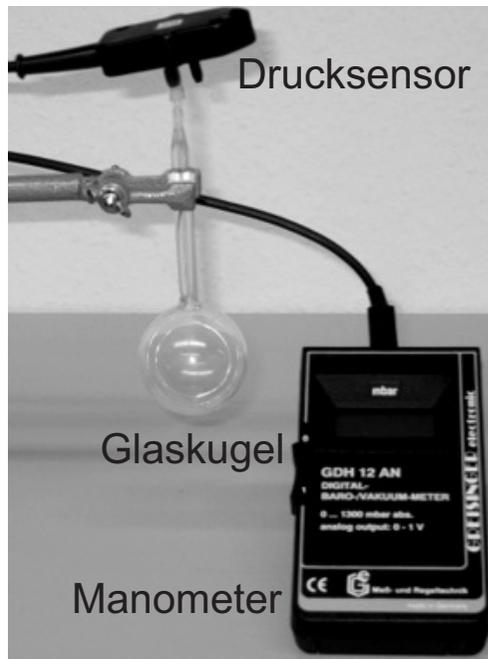


Abbildung 2: Aufbau eines Gasthermometers

mit der die Temperatur gemessen werden kann, hängt von der Konstanz des Volumens und dem verwendeten Gas ab. Dabei müssen zwei systematische Fehler berücksichtigt werden. Zum einen dehnt sich der Glasballon bei Erwärmung aus, wodurch sich das Luftvolumen ändert. Dieser Fehler kann aber aufgrund des viel größeren Ausdehnungskoeffizienten von Luft gegenüber dem von Glas vernachlässigt werden. Zum anderen bleibt die in der Kapillare zwischen Glaskugel und Manometer eingeschlossene Luft annähernd auf Zimmertemperatur. Temperaturänderungen im Glasballon bewirken daher, dass dieses „schädliche Volumen“ komprimiert bzw. expandiert wird, wodurch sich ebenfalls das Luftvolumen ändert. Desweiteren ist Luft nur bedingt als ideales Gas anzusehen. Weit oberhalb des Verflüssigungspunktes und bei geringem Druck sind die Voraussetzungen eines idealen Gases sicherlich gut erfüllt. Allerdings werden Sie auch Messungen bei Temperaturen des flüssigen Stickstoffs durchführen. Da der Druck im Glasballon bei dieser Temperatur deutlich geringer ist als Atmo-

sphärendruck, tritt keine Verflüssigung auf und die Luft im Glasbehälter kann immer noch als ideal angesehen werden.

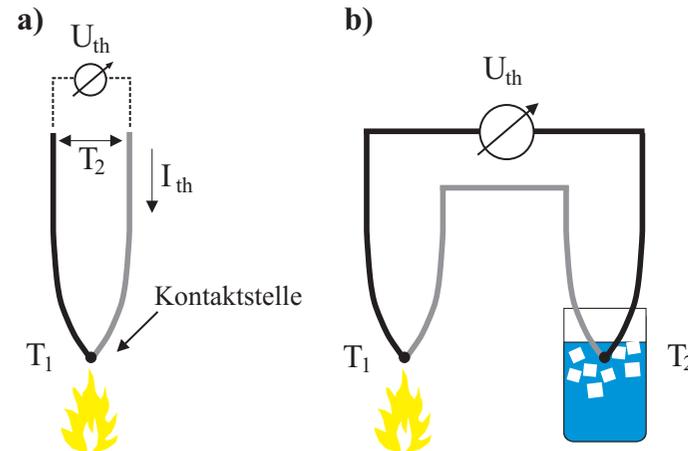


Abbildung 3: Funktionsprinzip eines Thermoelements

## V.2 Das Thermoelement

Die Wirkungsweise eines Thermoelements beruht auf dem Seebeck-Effekt: Bringt man zwei unterschiedliche Metalle miteinander in Kontakt, so baut sich an der Kontaktstelle eine elektrische Spannung auf, deren Betrag von der Art des Metalls und der Temperatur abhängt (Abbildung 3 links). Aus dem Metall mit der geringeren Austrittsarbeit fließen Elektronen in das Metall mit der größeren Austrittsarbeit. Es entsteht eine Thermospannung  $U_{th}$ . Bei geschlossenem Stromkreis fließt ein Thermostrom  $I_{th}$ ; die dafür „benötigte Energie“ wird der Wärmequelle entnommen.

Beträgt die Temperatur an der Kontaktstelle  $T_1$  und an den beiden Enden der Metalle  $T_2$ , so folgt für die Thermospannung:

$$U_{th} = K(T_1 - T_2), \quad (3)$$

wobei  $K$  eine Konstante darstellt, die von beiden Metallen abhängt.

Thermoelemente werden in Industrie und Technik sehr häufig eingesetzt. Die Vorteile dieser Sensoren sind kleine Dimensionen, gute mechanische und chemische Stabilität, die Anwendbarkeit über einen sehr großen Temperaturbereich

sowie die geringen Herstellungskosten. Allerdings besitzen Thermoelemente auch Nachteile. Es lassen sich nur relative Temperaturen messen. Soll die Temperatur  $T_1$  absolut bestimmt werden, so muss die Vergleichstemperatur  $T_2$  bekannt sein. Für einfache Messungen geringer Genauigkeit begnügt man sich mit der ungefähr konstanten Raumtemperatur  $T_2$  als Vergleichstemperatur (Bei Messungen von sehr hohen Temperaturen ist auch diese Methode sehr genau). Für präzise Messungen der absoluten Temperatur wird aber eine konstante Vergleichstemperatur benötigt. Dazu verwendet man ein Thermoelement mit zwei Kontaktstellen (Abbildung 3 rechts), wobei ein Kontakt auf eine definierte Vergleichstemperatur  $T_2$  eingestellt wird.

Die Spannung die an einem Thermoelement anliegt ist sehr gering. Bei dem hier verwendeten Platin-Rhodium Thermoelement beträgt die Spannung bei  $50^\circ\text{C}$   $2\ \mu\text{V}$ , bei  $1000^\circ\text{C}$   $4,9\ \text{mV}$ . Eine Vergleichliste zwischen Temperatur und Thermospannung liegt im Laborraum aus.

### V.3 Das Platinwiderstandsthermometer

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren<sup>1</sup>:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2), \quad (4)$$

mit den Koeffizienten

$$A = 3,9083 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$$

$$B = -5,775 \times 10^{-7} [^\circ\text{C}^{-2}].$$

$R_0$  ist der Nennwiderstand bei  $0^\circ\text{C}$ . Für ein Pt100-Thermometer gilt  $R_0 = 100\ \Omega$ . Damit kann aus dem gemessenen Widerstand  $R$  die Temperatur berechnet werden. Aus Gleichung (4) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0A + \sqrt{R_0^2A^2 - 4R_0B(R_0 - R)}}{2R_0B}. \quad (5)$$

Platinthermometer sind in vier Genauigkeitsklassen erhältlich. Die im Praktikum eingesetzten Thermometer sind in der Genauigkeitsklasse B eingeordnet.

<sup>1</sup>Die DIN IEC 751 legt für den Platin-Widerstand eigentlich zwei Temperaturbereiche fest ( $-200^\circ\text{C}$  bis  $0^\circ\text{C}$  und  $0^\circ\text{C}$  bis  $850^\circ\text{C}$ ), die durch unterschiedliche Polynome definiert sind. Bei diesem Versuch reicht es aber aus, stets die angegebene quadratischen Näherung zu verwenden.

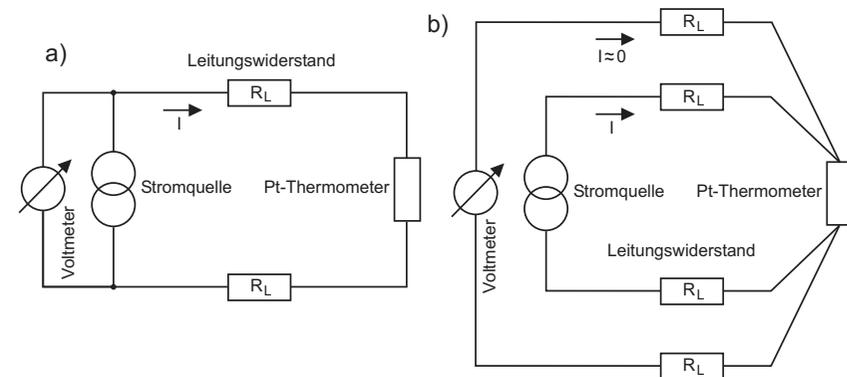


Abbildung 4: a) Zweileiterschaltung und b) Vierleiterschaltung zur Messung des Widerstands eines Pt-Thermometers.

In dieser Klasse beträgt der Temperaturfehler:

$$\Delta T = 0,30^\circ\text{C} + 0,005 |T|. \quad (6)$$

Der Widerstand eines Pt-Thermometers kann im einfachsten Fall nach dem Ohmschen Gesetz durch zwei verschiedene Methoden bestimmt werden. Entweder wird an den Pt-Widerstand eine konstante Spannung angelegt und der Strom gemessen oder es wird ein konstanter Strom eingeprägt und der Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand gemessen. Bei beiden Messmethoden tritt stets eine Eigenerwärmung des Pt-Thermometers auf, die die eigentliche Temperaturmessung verfälscht. Es ist daher sinnvoll, die Widerstandsmessung mit einem möglichst kleinen, konstanten Messstrom durchzuführen und den Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand mit einem Voltmeter zu messen. Im Praktikum verwenden Sie hierfür eine Konstantstromquelle die einen Strom von  $1\ \text{mA}$  liefert. Bei der Spannungsmessung muss berücksichtigt werden, dass der Pt-Widerstand in der Regel an mehr oder weniger langen Zuleitungen angeschlossen ist, die wiederum selbst einen elektrischen Widerstand besitzen. Bei der Zweileiterschaltung in Abbildung 6 a) geht in die Widerstandsmessung der Widerstand der Messleitungen mit ein. Dieser Messfehler kann durch eine sogenannte Vierleiterschaltung vermieden werden. Dabei dienen zwei Leiter der Stromzufuhr und zwei weitere zur Messung des Spannungsabfalls. Da die Spannungsmessung mit hochohmigen Voltmetern (Innenwiderstand einige  $\text{M}\Omega$ ) erfolgt, fließt nur ein sehr kleiner Strom durch die Leitungen und der Spannungsabfall an den

Zuleitungen ist vernachlässigbar klein.

## V.4 Das Pyrometer

Jeder Körper dessen Temperatur größer als 0 K ist sendet Wärmestrahlung aus, deren Intensität nur von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen  $\epsilon = 1$ . Die Intensitätsverteilung der Strahlung die von einem schwarzen Strahler ausgeht, wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (7)$$

wobei  $M_\lambda$  die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement  $dA$  im Wellenlängenbereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt. Die gesamte von einem Körper abgestrahlte Leistung wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben. Integration von Gleichung (7) über die gesamte strahlende Fläche  $A$  und über alle Wellenlängen ergibt

$$P = \epsilon(T)\sigma AT^4, \quad (8)$$

wobei  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $T$  die absolute Temperatur beschreiben. Der Faktor  $\epsilon(T) \leq 1$  berücksichtigt, dass reale Körper ein kleineres Emissionsvermögen aufweisen als der idealisierte schwarze Körper. Die abgestrahlte Leistung eines Körpers hängt demnach nur von der Fläche und der Temperatur ab. Auf dieser Eigenschaft beruhen berührungslose Pyrometer und Wärmebildkameras.

Bei Zimmertemperatur ( $\approx 300$  K) liegt das Strahlungsmaximum im langwelligen Infrarotbereich bei einer Wellenlänge von etwa  $10 \mu\text{m}$  (Abbildung 5). In diesem Bereich arbeiten kommerzielle IR-Pyrometer. Die im Praktikum eingesetzten Pyrometer integrieren die von einem Körper ausgehende Strahlung im Bereich von  $8 \mu\text{m}$  bis  $14 \mu\text{m}$ .

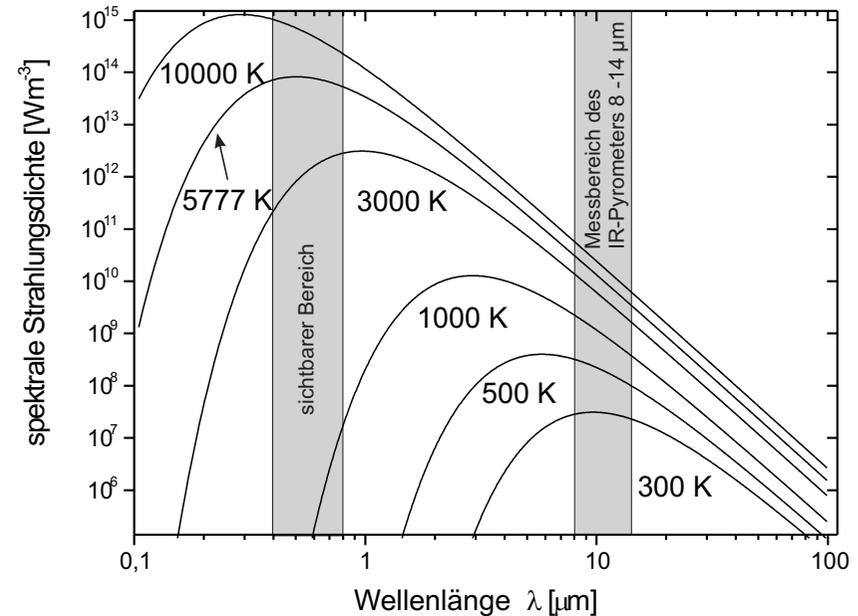


Abbildung 5: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

## VI Durchführung des Versuchs

### Achtung:

**Kontakt mit flüssigem Stickstoff bzw. mit Trockeneis verursacht schwere Erfrierungen und Augenschäden. Beim Hantieren mit Trockeneis und flüssigem Stickstoff unbedingt Handschuhe anziehen und Schutzbrille aufsetzen. Da während des Versuchs erhebliche Mengen Stickstoff und Kohlendioxid verdampfen, sollte der Raum gut belüftet werden.**

### Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

**Aufgabe 2: Temperaturmessungen bei erweiterten Umgebungsbedingungen****a) Eichung der Thermometer bei 0°C**

Inbetriebnahme des Pt100-Thermometer: Bauen Sie eine Vierleiterschaltung auf. Stecken Sie dazu den Stecker des Pt100-Thermometers in die Adapterbox. Die vier Anschlussleitungen können Sie dann an den 4 mm-Buchsen abgreifen. Verbinden Sie als nächstes je eine weiße und eine rote Buchse mit den entsprechenden Buchsen der Stromquelle. Wenn Sie das Voltmeter an die beiden noch freien Buchsen der Stromquelle anschließen (rote Buchse an den Anschluss Com des Voltmeters), haben Sie eine Zweileiterschaltung (siehe Abbildung 6) und Sie messen den Spannungsabfall über den Kabeln mit. Um eine Vierleiterschaltung zu bekommen, müssen Sie das Voltmeter direkt an die Adapterbox anschließen. Sie sollten bei der folgenden Messung wenigstens einmal beide Schaltungen ausprobieren. Bei 0°C beträgt der Pt100-Widerstand 100  $\Omega$ . Bei einem Messstrom von 1 mA erhalten Sie bei der Vierleiterschaltung einen Spannungsabfall von 100 mV. In der Zweileiterschaltung werden Sie einen größeren Wert messen, da Sie die Zuleitungswiderstände mitmessen. Allerdings sind die Kabel relativ kurz und der Effekt daher sehr klein. Wenn Sie möchten, können Sie beide Schaltungen mit sehr langen Kabeln aufbauen. Ein entsprechendes vieradriges Kabel liegt im Labor aus.

Benutzen Sie für die Messung bei 0°C eine Wasser-Eis Mischung. Füllen Sie den Glasbehälter zur Hälfte mit klein zerstoßenem Eis und platzieren Sie den Glasballon mittig im Topf. Gießen Sie mit Wasser auf und rühren Sie mit einem Glasstab gut um. Die Glaskugel muss völlig mit Wasser bedeckt sein! Beobachten Sie gleichzeitig die Spannung am Pt100 sowie die am Pyrometer angezeigte Temperatur. Die Temperatur des schmelzenden Eises in Wasser als Fixpunkt und Nullpunkt der später zu erstellenden Temperaturskala muss möglichst gut erreicht werden. Sie müssen dazu das Minimum des Spannungswertes des Pt100-Thermometers abwarten. Wenn sich die Spannung stabilisiert hat, protokollieren Sie die Spannung, den Druck des Gasvolumens und die Pyrometertemperatur. Die Pyrometertemperatur wird auf der Wasseroberfläche gemessen. Sie wird sich systematisch von der „wahren“ Temperatur unterscheiden, weil das Absorptionsvermögen von Wasser nicht Eins ist.

**b) Temperaturmessung bis T= 100°C**

Stellen sie jetzt die Heizplatte bei maximaler Leistung (350 *gradC*) an und starten zusätzlich den Rührmechanismus, sodass sich kein sichtbarer Wirbel ausbil-

det. Erhitzen Sie das Wasser auf etwa 10°C. Registrieren sie Druck, Pyrometeranzeige und Pt100-Spannung. Wiederholen Sie diese Messungen in Schritten von ungefähr 10 Grad. Welcher Wert sich letztlich einstellt, ob 10°C oder eben 11,5°C, ist völlig unerheblich. Warten sie bis sich die Wassertemperatur unter dauerndem Umrühren um ca. 10 *gradC* erhöht hat und lesen Sie dann für jeden Schritt die Spannung am Pt100, den Druck und die Pyrometeranzeige ab. Nehmen Sie als letzten Messpunkt die Temperatur des siedenden Wassers auf. Lesen Sie den Luftdruck am Barometer im Gang ab und notieren Sie diesen Wert. Achtung: Das Pyrometer nicht direkt über das Wasser halten sondern von der Seite schräg auf die Wasseroberfläche richten. Sonst kann eindringender Wasserdampf die Messwerte verfälschen.

**c) Temperatur von Trockeneis und flüssigem Stickstoff am Siedepunkt**

Lassen Sie den Glasballon zunächst einige Zeit abkühlen. Füllen Sie dann das Dewargefäß mit Trockeneis und Alkohol. Durch den Alkohol wird der Wärmekontakt zum Glasballon verbessert. Verwenden Sie dazu die schon fertige Trockeneis- Alkoholmischung in den beiden Dewargefäßen auf dem Waschbecken. Geben Sie wenn nötig noch etwas Trockeneis hinzu. Warten Sie zunächst bis sich die Temperatur stabilisiert hat. Dabei gut umrühren! Sobald sich die Messwerte stabilisiert haben, notieren Sie die Spannung und den Druck. Das Pyrometer ist bei diesen tiefen Temperaturen nicht mehr einsetzbar.

**Schütten Sie nach Beendigung der Messung das Trockeneis-Alkohol Gemisch wieder zurück in die Dewargefäße auf dem Waschbecken.**

Füllen sie jetzt das Dewargefäß schrittweise mit flüssigem Stickstoff und schieben Sie die Glaskugel **langsam** ein bis sie ganz vom Stickstoff bedeckt ist. Warten Sie bis die starke Verdampfung aufgehört hat und sich die Temperaturwerte stabilisieren. Registrieren sie PT100-Spannung und den Druck im Gasthermometer.

**Nach Beendigung der Messung gießen Sie bitte den restlichen flüssigen Stickstoff zurück in das große Dewargefäß.****Aufgabe 3: Messung von sehr hohen Temperaturen mit dem PtRh-Thermoelement**

Messen Sie die Temperaturverteilung in der Flamme mit dem PtRh-Thermoelement bei starker Luftzufuhr und bei schwacher Luftzufuhr des Gasbrenners. Das PtRh-Thermoelement besteht aus zwei Platindrähten, die aber unterschiedlich stark mit Rhodium legiert sind. Achtung: Beim Versuch sind

verschiedene Thermoelemente vorhanden (Typ S und Typ B). Achten Sie darauf die richtige Eich-tabelle zu verwenden. Zeichnen Sie die ungefähre Gestalt der Flamme und tragen Sie für verschiedene Stellen die Thermospannung ein (fünf Messungen bei starker und schwacher Luftzufuhr). Drehen Sie nach Versuchsende das Gas ab und schütten Sie das Wasser und das Eis aus.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2:** Tragen Sie die bei den Fixpunkten gemessenen Druckwerte gegen die Temperatur in ein Diagramm ein. Wählen Sie auf der x-Achse einen Temperaturbereich von  $-280^{\circ}\text{C}$  bis  $110^{\circ}\text{C}$ . In einem ersten Diagramm eichen Sie die Temperaturskala, indem Sie die Temperatur des Wasser-Eisgemisches als  $0^{\circ}\text{C}$  ansetzen. Tragen Sie dort den gemessenen Druck ein. Einen zweiten Eichpunkt erhalten Sie, indem Sie die den Druck  $p_{gem}$ , den Sie bei der Temperatur des kochenden Wassers gemessen haben. Dieser Messwert muss auf Normalbedingung umrechnen:

$$p_{NB} = p_{gem} \frac{1013,25 \text{ hPa}}{p_{LD}}, \quad (9)$$

Dabei beschreibt  $p_{LD}$  den gemessenen Luftdruck und  $p_{NB}$  den gemessenen Druckwert umgerechnet auf Normalbedingung. Ordnen Sie diesem Druckwert die Temperatur  $100^{\circ}\text{C}$  zu und tragen Sie den Wert in das Diagramm ein. Jetzt können sie die Eichgerade des Gasthermometers durch beide Messpunkte zeichnen. Bei welcher Temperatur wird der Druck Null? Tragen Sie jetzt den Druckmesswert bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs ein. Welchen Temperaturwert lesen sie ab? Wie vergleicht sich dieser mit dem Literaturwert  $T_{N_2} = 77 \text{ K}$  ( $-195,8^{\circ}\text{C}$ ).

Sie können diesen Literaturwert auch als weiteren Eichpunkt in einem zweiten Diagramm benutzen um den absoluten Nullpunkt besser zu bestimmen. Bei welcher Temperatur bekommen Sie jetzt den Druck  $p = 0 \text{ hPa}$ ? Tragen Sie schließlich auch den Druck ein, den Sie bei der Messung mit Trockeneis aufgenommen haben. Welche Temperatur erhalten Sie dafür? Ergänzen Sie das Diagramm durch eine Kelvin-Skala.

Bestimmen Sie mit Hilfe der zuvor angefertigten Eichkurve die aus den gemessenen Druckwerten resultierenden Temperaturwerte des Gasthermometers im Bereich von  $0^{\circ}\text{C}$  bis  $100^{\circ}\text{C}$ .

Tragen Sie den Widerstand des Pt100- Elements gegen die Temperatur in ein weiteres Diagramm ein. Welchen Zusammenhang finden Sie? Legen Sie durch die Messwerte im Bereich von  $0^{\circ}\text{C}$  bis  $100^{\circ}\text{C}$  eine Ausgleichsgerade. Vergleichen Sie die Steigung mit dem linearen Glied des Polynoms in Gleichung (4) und interpretieren Sie knapp das Ergebnis des Vergleichs.

Tragen Sie die Temperaturmessungen mit dem Pyrometer gegen die Temperatur des Gasthermometers in einem vierten Diagramm auf. Was beobachten Sie? Wie erklären Sie Ihre Beobachtung?

**Zu Aufgabe 3:** Skizzieren Sie die Flammengestalt und tragen Sie die Temperaturen für schwache und für starke Luftzufuhr ein. Die zu den Thermospannungen gehörigen Temperaturen sind der ausgelegten Eich-tabelle zu entnehmen.

## Versuch 254 Absorption und Dosimetrie II Literatur von Röntgenstrahlen

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### I Messaufbau

- Röntgengerät mit Röntgenröhre
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF-Kristall
- Computer mit Drucker

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Röntgenröhre, Bragg-Reflexion, Röntgenspektren (Bremsstrahlung, charakteristische Röntgenstrahlung), Moseley'sches Gesetz, Absorption von Röntgenstrahlung.

*Verständnisfragen:*

1. Erklären Sie den Aufbau und das Funktionsprinzip einer Röntgenröhre. In welchem Bereich liegt die Beschleunigungsspannung? Welche Größe bestimmt die Intensität der Röntgenstrahlung?
2. Das Spektrum einer Röntgenröhre ist eine Überlagerung aus einem Bremspektrum und einem charakteristischen Spektrum. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser beiden Spektren. Wovon hängt das charakteristische Spektrum ab?
3. Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 30 kV durchlaufen hat?
4. Was besagt das Moseley'sche Gesetz?
5. Wie lautet das Braggsche Gesetz? Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Röntgenbeugung das Spektrum einer Röntgenquelle messen kann.
6. Geben Sie für folgende Größen den Zusammenhang zwischen dem messbaren Zählraten vor und hinter einem Absorber der Dicke  $d$  an: Energie, Intensität, Anzahl der Röntgenquanten.
7. Der Absorptionskoeffizient des menschlichen Körpers (Weichteile) entspricht dem von Wasser (Massenabsorptionskoeffizient bei 50 keV:  $\mu/\rho=0,2 \text{ cm}^2/\text{g}$ ). Berechnen Sie für monoenergetische Röntgenstrahlung von 50 keV jeweils für  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $5 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$ ,  $20 \text{ cm}$  und  $30 \text{ cm}$  den Energieanteil der Strahlung, der an den Körper abgegeben wird.

### IV Aufgaben

- Nehmen Sie bei einer Röhrensorgung von 35 kV das Röntgenspektrum der eingebauten Röntgenröhre auf.
- Messen Sie den Reflexionswinkel der  $L_\alpha$ - Linie in der ersten Beugungsordnung und bestimmen Sie daraus die Wellenlängen und Energie dieser Linie.
- Röntgenabsorption: Messen Sie die Intensität der  $L_\alpha$ - Linie in Abhängigkeit unterschiedlich dicker Absorberfolien.

### V Grundlagen

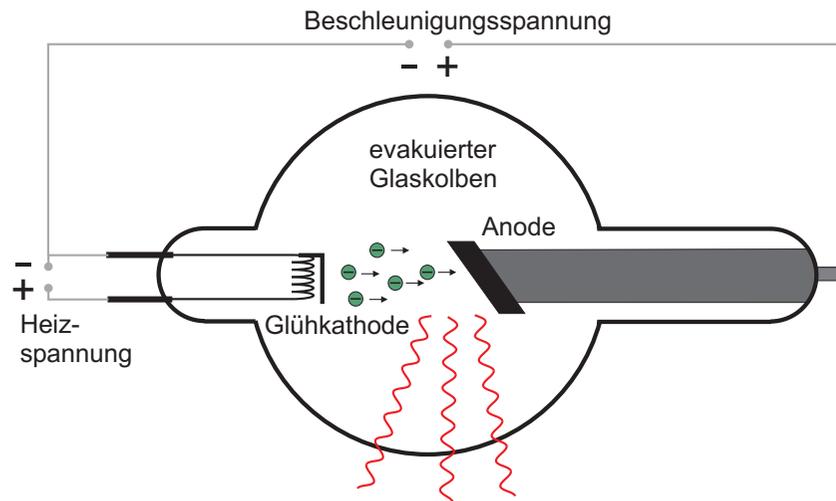


Abbildung 2: Aufbau einer Röntgenröhre.

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden. An der Kathode werden durch Glühemission freie Elektronen erzeugt. Zwischen Kathode und Anode liegt eine Beschleunigungsspannung von typischerweise 10 kV bis 100 kV an. Dadurch werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt und beim Aufprall durch das Coulombfeld der Atomkerne des Anodenmaterials abgebremst. Die dabei verlorene Energie wird teilweise in

Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Da der Energieverlust der Elektronen beim Abbremsen unterschiedlich groß ist, entsteht ein kontinuierliches Spektrum, welches als Bremspektrum bezeichnet wird (Abbildung 3). Auf der kurzwelligen Seite setzt das Bremspektrum erst oberhalb einer Grenzwellenlänge  $\lambda_{gr}$  ein. Dies folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung: Haben die Elektronen die Spannung  $U$  durchlaufen, so besitzen sie eine Energie  $E = eU$ . Wird nun ein Elektron in einem einzigen Prozess abgebremst, so wird diese Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie  $h\nu$  umgewandelt. Für die Grenzwellenlänge  $\lambda_{gr}$  ergibt sich dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h\frac{c}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU}, \tag{1}$$

wobei  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit darstellen. Bei entsprechend hohen Beschleunigungsspannungen ist dem kontinuier-

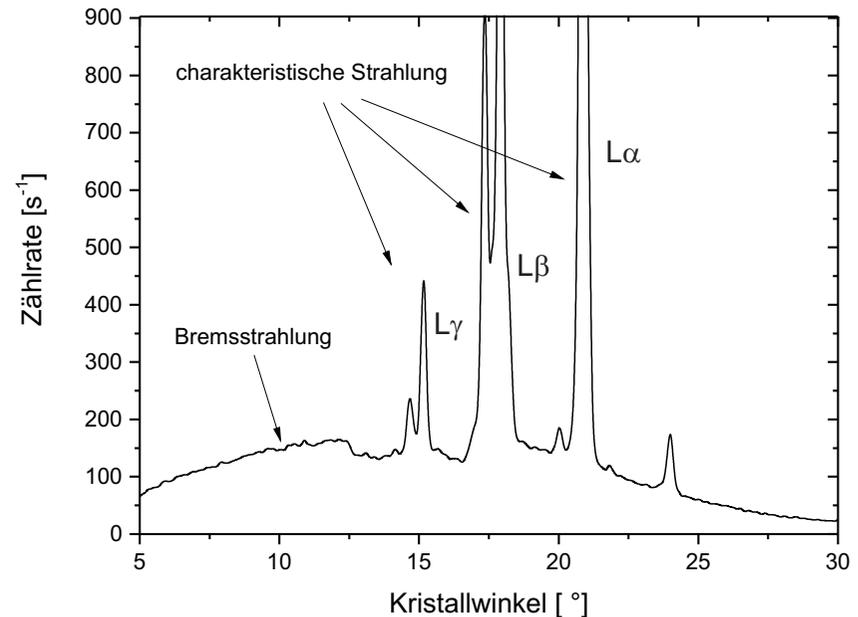


Abbildung 3: Röntgenspektrum

lichen Bremspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert.

Da dieses vom Anodenmaterial der Röntgenröhre abhängt wird es auch als charakteristisches Spektrum bezeichnet. Die in der Röntgenröhre beschleunigten Elektronen können ihre Energie auch durch Ionisation des Anodenmaterials verlieren. Wird ein Elektron aus den innersten Elektronenschalen herausgeschlagen, so kann die entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer höher liegenden Schale gefüllt werden. Dabei wird die freiwerdende Bindungsenergie in Form eines Röntgenquants abgestrahlt. Je nachdem von welcher auf welche Schale

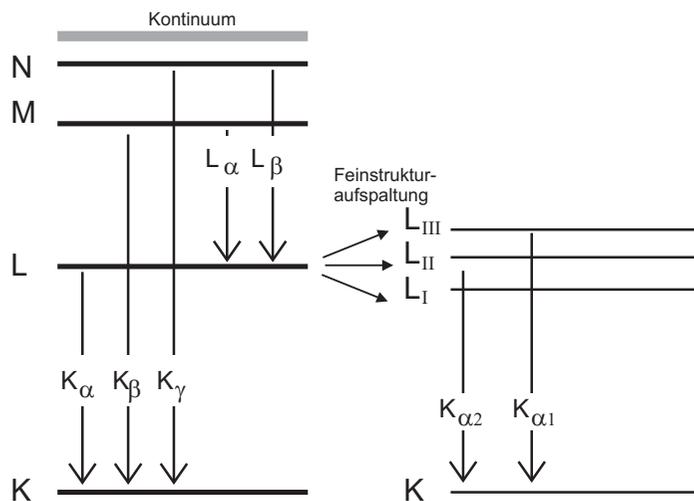


Abbildung 4: Vereinfachtes Termschema eines Atoms

der Elektronenübergang stattfindet, gibt es mehrere mögliche Übergänge die sich zu Serien zusammenfassen lassen können. Erfolgt der Übergang stets auf die innerste Schale, die K-Schale, so spricht man von Übergängen der K-Serie: Beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale wird  $K_\alpha$ -Strahlung emittiert, beim Übergang von der M-Schale auf K-Schale handelt es sich um  $K_\beta$ -Strahlung. In Abbildung 4 links, sind mögliche Übergänge anhand des Termschemas von Molybdän dargestellt.

Die Energie der charakteristischen Linien, lässt sich mit Hilfe des Moseley'schen Gesetz abschätzen. Für den Übergang von der  $n$ -ten auf die  $m$ -te Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = h c R_\infty (Z - A)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

wobei  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $R_\infty$  die Rydbergkonstante ( $R_\infty = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ),  $Z$  die Kernladungszahl und  $n$  bzw.  $m$  die jeweiligen Hauptquantenzahlen darstellen. Bei der Größe  $A$  handelt es sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung der Kernladung durch Elektronen berücksichtigt. Bei der  $K_\alpha$ -Strahlung wird der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt. Hierfür gilt in guter Näherung  $A \approx 1$ :

$$K_\alpha\text{-Strahlung: } E_{2 \rightarrow 1} = h c R_\infty (Z - 1)^2 \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} h c R_\infty (Z - 1)^2. \quad (3)$$

Für die Energie der  $K_\alpha$ -Strahlung von Molybdän erhält man aus dem Moseley'schen Gesetz  $E = 17,2 \text{ keV}$ . Dies ist eine gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert von  $E = 17,4 \text{ keV}$ .

Das Moseley'schen Gesetz liefert nur eine Abschätzung der Energie der charakteristischen Strahlung. Tatsächlich besitzen alle Energieniveaus bis auf das K-Niveau noch eine Feinstruktur dessen Energie neben der Hauptquantenzahl auch von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt (Abbildung 4 rechts). So ist beispielsweise das L-Niveau dreifach entartet. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene  $K_\alpha$ -Übergänge. Der Übergang  $L_{III} \rightarrow K$  wird als  $K_{\alpha 1}$  und  $L_{II} \rightarrow K$  als  $K_{\alpha 2}$  bezeichnet. Der Übergang  $L_I \rightarrow K$  ist unter Berücksichtigung von Erhaltungssätzen nicht möglich. Diese zusätzlichen Niveaus führen dazu, dass die  $K_\alpha$ -Linie eine Doppellinie darstellt.

Die meisten im Praktikum verwendete Röntgengerät besitzt eine Wolfram-anode. Die Energien der K-Linien liegen bei  $59 \text{ keV}$  bzw.  $67 \text{ keV}$ . Da die maximale Energie des Röntgengeräts nur  $35 \text{ keV}$  beträgt, können diese nicht angeregt werden. Im Spektrum sind daher nur die L-Linien sichtbar. Bei denjenigen Geräten, die eine Molybdänanode eingebaut haben, werden Sie die vorher genannten  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ -Linien beobachten.

## V.1 Bragg-Reflexion

Zur Untersuchung des Spektrums einer Strahlungsquelle greift man in der Regel auf zwei verschiedene physikalische Prinzipien zurück: Die Dispersion und die Beugung, die im sichtbaren Bereich Anwendung im Prismenspektrometer bzw. im Gitterspektrometer finden. Für Röntgenstrahlung kann die Dispersion nicht ausgenutzt werden, da der Brechungsindex von Materie in diesem Wellenlängenbereich kaum von Eins abweicht. Auch die Ausnutzung von Beugungseffekten ist für Röntgenstrahlung komplizierter. Da Beugungerscheinung nur

dann auftreten, wenn die Größe des beugenden Objekts etwa der Größenordnung der Wellenlänge ( $\lambda \approx 0,1 \text{ pm bis } 10 \text{ nm}$ ) entspricht, benötigt man ein Gitter mit äußerst kleinen Strukturen. Solche Dimensionen sind technisch kaum realisierbar.

1912 hat Max von Laue einen Kristall mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Dabei beobachtete er ein gleichförmiges Beugungsmuster, woraus er schloss, dass die Atome im Kristall regelmäßig angeordnet sind. Da die Atomabstände im Kristall von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, eignen sich solche Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen. 1913 gelang es schließlich William Henry Bragg und seinem Sohn William Lawrence Bragg den Zusammenhang zwischen der Kristallstruktur und den entstehenden Beugungsmustern zu erklären. Die Röntgenbeugung an Kristallen wird daher auch als Bragg- Reflexion bezeichnet. Trifft Röntgenstrahlung unter dem Winkel  $\vartheta$

(Abbildung 5a) auf die Oberfläche eines Kristalls, so wird dieser gemäß des Reflexionsgesetzes reflektiert. Da die Strahlung tief in den Kristall eindringen kann, finden zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt. Die Intensität der reflektierten Gesamtstrahlung hängt vom Gangunterschied  $\Delta s$  der teilreflektierten Strahlung ab. Beträgt dieser für zwei benachbarte Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$ , so interferieren diese konstruktiv. Ist dies nicht der Fall, so löschen die teilreflektierten Strahlen aus (Vielstrahlinterferenz). Ist  $d$  der Netzebenenabstand, so folgt aus Abbildung 5a) für den Gangunterschied  $\Delta s$ :

$$\Delta s = 2d \sin\vartheta \tag{4}$$

und damit das Bragg'sche Gesetz:

$$2d \sin\vartheta = n \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz.} \tag{5}$$

Die unter dem Winkel  $\vartheta$  reflektierte und konstruktiv interferierende Strahlung hängt demnach von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie von der Kristallstruktur (Netzebenenabstand) ab. Somit eignet sich die Bragg- Reflexion zur Monochromatisierung von Röntgenstrahlung und damit zur Messung des Spektrums einer Röntgenquelle. Bei der Drehkristallmethode (Abbildung 5b) wird der Einfallswinkel  $\vartheta$  variiert, in dem der Kristall um eine Achse senkrecht zur einfallenden Strahlung gedreht wird. Bei jeder Winkelstellung besitzt die reflektierte Röntgenstrahlung eine bestimmte Wellenlänge dessen Intensität z.B. mit einem Zählrohr gemessen werden kann. Das Spektrum in Abbildung 3 wurde nach diesem Verfahren gemessen.

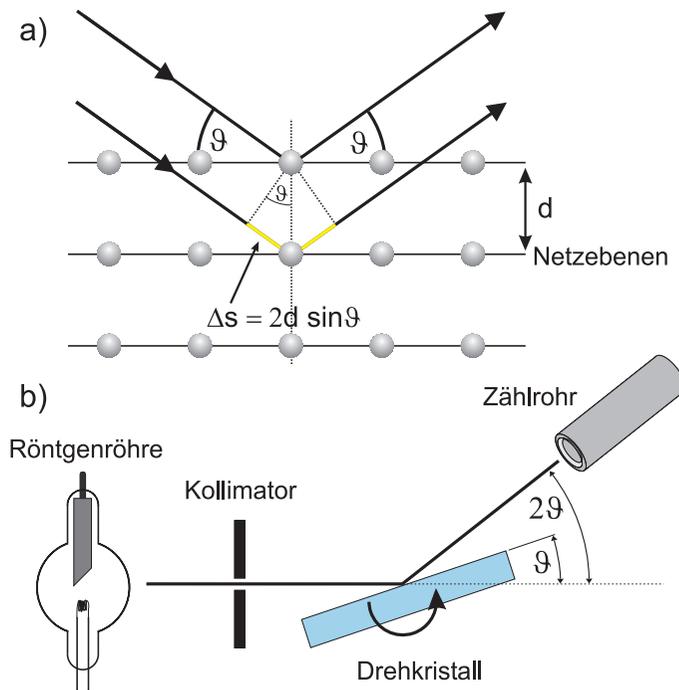


Abbildung 5: a) Bragg- Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Drehkristallmethode zur Messung des Spektrums einer Röntgenröhre.

## V.2 Wechselwirkung mit Materie

Die Schwächung von Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie hängt im wesentlichen von zwei Mechanismen ab (Abbildung 6):

1. Photoeffekt: Ein Röntgenquant gibt seine Energie an ein Elektron in der Atomhülle ab und schlägt dieses aus der Hülle. Durch Nachrücken äußerer Elektronen, kommt es zu charakteristischer Strahlung. Jedesmal wenn die Energie der  $\gamma$ -Quanten ausreicht, um eine tiefer gelegene Schale zu ionisieren, steigt die Absorption schlagartig an. Diese charakteristischen Linien sitzen auf einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum (Abbildung 7).

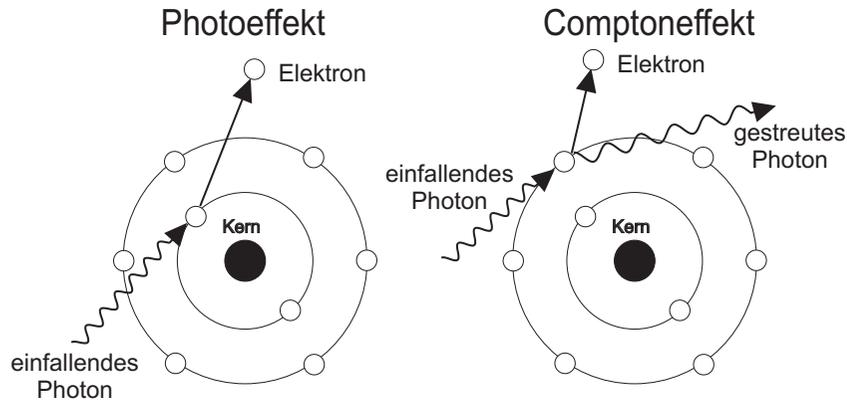


Abbildung 6: Absorption von Röntgenstrahlung durch Photoeffekt und Comptoneffekt.

2. Comptonstreuung: Ein Röntgenquant wird inelastisch an einem Hüllenelektron gestreut und verliert dadurch einen Teil seiner Energie. Der Energieverlust wächst für höhere Energien an.

Für kleine Energien dominiert der Photoeffekt, welcher mit steigender Energie rasch abnimmt bis die Comptonstreuung dominiert. Bei sehr großen Energien tritt ein weiterer Effekt auf (Paarbildung). In diesem Energiebereich spricht man dann nicht mehr von Röntgenstrahlung sondern von  $\gamma$ -Strahlung.

Für monoenergetische Strahlen kann die Intensität der Röntgenstrahlung aufgefasst werden als die Zahl der Photonen, die pro Zeit durch eine Flächeneinheit tritt. Einheit =  $1/(m^2 \cdot s)$

Für die Intensität gilt das Absorptionsgesetz.

$$I_d = I_0 e^{-\mu d}$$

- $I_d$  = Intensität hinter der absorbierenden Schicht der Schichtdicke  $d$
- $I_0$  = Intensität vor der absorbierenden Schicht
- $\mu$  = Absorptionskoeffizient (Einheit  $1/cm$ )
- $d$  = Schichtdicke (Einheit  $cm$ )

Statt der Schichtdicke führt man oft die Masse pro Fläche (Flächendichte) ein:  $\rho d$  ( $\rho$  = Dichte)

Dann ist

$$I = I_0 e^{-(\mu/\rho)\rho d}$$

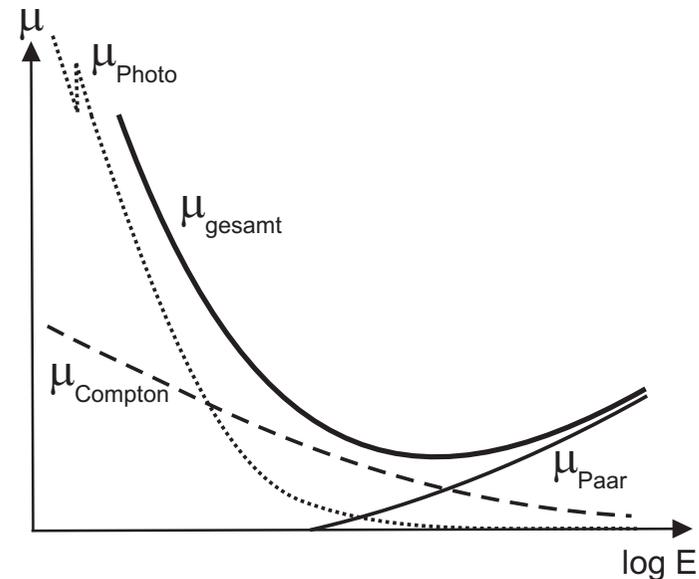


Abbildung 7: Beitrag des Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung zum Schwächungskoeffizient für Röntgen- bzw.  $\gamma$ -Strahlung.

Die Größe  $\mu/\rho$  bezeichnet man als Massenabsorptionskoeffizient.

Wie der radioaktive Zerfall ist die Absorption von Röntgenstrahlen ein statistischer Prozess. Das Absorptionsgesetz beschreibt die nach der Dicke  $d$  noch vorhandenen Röntgenquanten, liefert jedoch keine Aussage über ein einzelnes Quant. Analog zum radioaktiven Gesetz können wir hier die Halbwertsdicke einführen, d.h. die Dicke, nach der noch die Hälfte der ursprünglichen Quanten vorhanden ist.

$$H_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Die Halbwertsdicke hängt von der spektralen Zusammensetzung der Röntgenstrahlen ab. Langwellige, d.h. energieärmere ("weiche") Röntgenstrahlung wird stärker absorbiert als kurzwellige ("harte") Strahlung.

Für monoenergetische Strahlung gilt:

$$I_d = I_0(d = 0) e^{-\mu d}$$

$d$  = Dicke des Absorbers

$\mu$  = linearer Absorptionskoeffizient, gemessen in  $m^{-1}$ .

$\mu$  ist um so größer, je "dichter gepackt" die Atome im Absorber liegen, d.h.

$\mu$  ist der Atomdichte proportional. Zur physikalischen Charakterisierung eines Absorbermaterials zieht man daher besser den Massenabsorptionskoeffizienten  $\mu/\rho$  heran. ( $\rho$  = Dichte des Materials;  $\mu/\rho$  wird gemessen in  $cm^2/g$ ).  $\mu/\rho$  hängt von der Energie  $h\nu$  der Strahlung, der Ordnungszahl  $Z$  und der Massenzahl  $A$  des Absorbers ab.

Für die Absorption durch Photoeffekt gilt näherungsweise:

$$\text{Photoeffekt } (\gamma + \text{Atom} \rightarrow \text{Ion}^+ + e^-) \quad \frac{\mu_{\text{Photo}}}{\rho} \sim \frac{Z^4}{\nu^3} \frac{1}{A} \approx \lambda^3 Z^3$$

Die Absorption bei Streuung spielt vor allem für Elemente mit kleinem  $Z$  und für hochenergetische Röntgenstrahlung eine Rolle.

#### Anwendungen der $Z$ - und $\nu$ - Abhängigkeit des Photoeffekts:

- Kontrast in Röntgenaufnahmen (höheres  $Z$  in Knochen, Kontrastmittel)
- Filterung von Röntgenstrahlung durch Absorber, um weiche Komponenten ( $\nu$  klein) zu beseitigen. (Härtung von Röntgenstrahlen)

### V.3 Gerätebeschreibung

Das im Praktikum eingesetzte Röntgengerät ist als Zählrohr-Goniometer (Abbildung 8) ausgeführt, mit schwenkbarem Messarm und einem Probenträger in der Drehachse. Die Drehwinkel von Messarm und Probenträger können im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden, so dass beim Nachweis der Bragg-Reflexe und bei der Aufnahme von Röntgenspektren das auf dem Messarm befestigte Zählrohr immer die richtige Position zum Auffangen der Reflexe hat, d.h. die Probennormale halbiert stets den Winkel zwischen Primär-Strahlrichtung und der Richtung der reflektierten Strahlung. Die Röntgenröhre (Wolfram-anode, maximal 35 kV, 1 mA) ist in einem separaten Röhrenraum untergebracht, der zur Abschirmung - wie auch der Experimentierraum mit dem Goniometer - mit einer Bleiglas-Schiebetür verschlossen wird. Am Übergang zum Experimentierraum ist ein Kollimator eingesetzt. Der Kristall ist fest an der Drehachse des Goniometers fixiert. Beide Goniometerarme sind unabhängig voneinander durch Schrittmotoren zu schwenken, die kleinste mögliche Schrittweite beträgt  $0,1^\circ$ . Weiterhin ist es möglich, das Goniometer im gekoppelten Modus (1:2-Kopplung) zu betreiben, so dass der Winkel des Messarms immer das Doppelte des Winkels des

Targetarms beträgt. Dieser Modus ist für die Messungen der Bragg-Reflexion zu wählen. Die reflektierte Strahlung wird mit einem am Messarm befestigten Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen. Die Spannungsversorgung des Zählrohrs und der Impulszähler sind, genau wie die Steuerung des Goniometers, in das Röntgengerät integriert und über das Bedienfeld rechts von der Röntgenröhre zu steuern. Über das dort platzierte Display lassen sich die Messwerte anzeigen. Die Einstellung des Gerätes kann auch rechnergesteuert mit einem PC erfolgen.

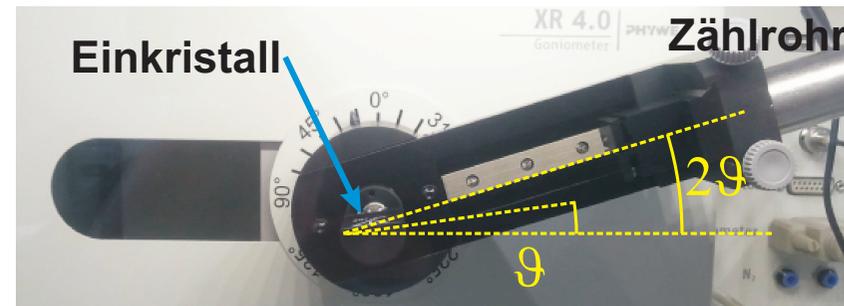


Abbildung 8: Aufbau des Goniometers.

Starten Sie dazu die Software `measure` vom Desktop aus. Im Programm ist eine Symboldarstellung des Röntgengeräts dargestellt. Zum Einstellen der Parameter müssen Sie auf die entsprechenden Bereiche der Symboldarstellung doppelklicken. Soll z.B. die Beschleunigungsspannung eingestellt werden, müssen Sie auf die Röntgenröhre klicken- soll der Winkelbereich modifiziert werden, müssen Sie auf das Goniometer doppelklicken (siehe gelbe Markierungen in Abbildung 9). Für die Messung der Absorption von Röntgenstrahlung befindet sich im Gerät direkt hinter dem Kollimator, eine drehbar gelagerte Scheibe mit 9 verschiedenen Aluminiumabsorbern (Abbildung 10). Die Dicke variiert von 0,02 mm bis 0,18 mm in Schritten von 0,02 mm. Der jeweilige Absorber kann mit den Pfeiltasten am Steuergerät, das sich außerhalb des Röntgengeräts befindet, ausgewählt werden. Mit der rechten Pfeiltaste wird der Absorber in die Nullposition gestellt. Die gewählte Absorberdicke wird durch Leuchtdioden angezeigt.

## VI Durchführung

**Aufgabe 1: Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.**

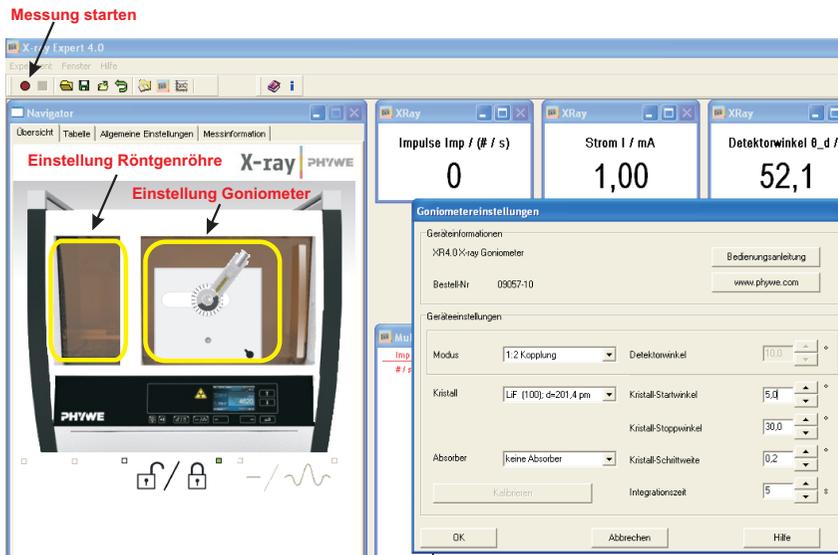


Abbildung 9: Einstellung der Geräteparameter.

### Aufgabe 2: Messen des Röntgenspektrum der eingebauten Röntgenröhre

Überzeugen Sie sich, dass die Absorberscheibe auf Null steht (Leuchtdiode leuchtet beim Wert  $0 \mu\text{m}$ ). Schalten Sie das Röntgengerät auf der Rückseite neben dem Netzstecker ein. Starten Sie das Programm **measure** vom Desktop aus. Klicken Sie doppelt in der Symboldarstellung auf die Röntgenröhre (Abbildung 9) und wählen Sie für die Röhrenspannung 35 kV und für den Emissionsstrom 1 mA. Stellen Sie anschließend den Scanbereich ein indem Sie doppelt auf das Goniometer klicken. Wählen Sie folgende Einstellungen:

- Modus: 1:2 Kopplung
- Kristall: LiF
- Kristall Startwinkel:  $5^\circ$
- Kristall Stoppwinkel:  $30^\circ$
- Kristall Schrittweite:  $0,1^\circ$

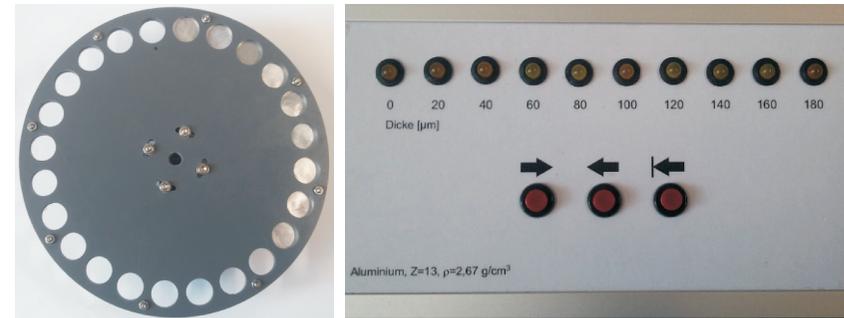


Abbildung 10: Absorberscheibe mit Steuergerät.

- Integrationszeit: 5 s.

Verriegeln Sie die Tür des Röntgengeräts mit dem Taster unter dem Schlosssymbol auf der Frontplatte des Röntgengeräts. Das verriegelte Schloss muss leuchten. Falls dies nicht möglich ist, müssen Sie die Tür des Röntgengeräts von Hand öffnen, wieder schließen und erneut auf den Taster drücken. Starten Sie im Programm die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol in der linken Ecke der Menüleiste (Abbildung 9).

Die Messung dauert nun etwa 20 Minuten. Danach stoppt der Messvorgang automatisch und es erscheint ein Hinweifenster. Wählen Sie die Option **alle Messungen an measure uebertragen** aus. Dadurch startet ein neues Programm in dem Sie die Daten auswerten und ausdrucken können. Vermessen Sie die Lage der charakteristischen Linien. Am einfachsten geht dies mit der Option **Peakanalyse** im Menü **Messauswertung**. Aktivieren Sie im folgenden Fenster die Option **Ergebnisse einzeichnen** und klicken Sie auf **Berechne**. Speichern Sie das Diagramm ab.

### Aufgabe 3: Messen der stärksten Emissionslinie

Lesen Sie aus Ihrer Messung die Lage der  $L_\alpha$  Linie ab (stärkste Linie). Gehen Sie zurück zum Messprogramm indem Sie auf das Icon ganz rechts in der Symbolleiste klicken. Wiederholen Sie die Messung aus Aufgabe 2 in einem schmalen Bereich ( $1^\circ$ -  $2^\circ$ ) um die  $L_\alpha$  Linie mit einer Integrationszeit von 20 s. Speichern Sie das Diagramm ab.

### Aufgabe 4: Messen der Absorption von monochromatischer Röntgenstrahlung

Die Messung soll mit Röntgenquanten gleicher Energie erfolgen. Da die  $L_\alpha$  Linie die höchste Intensität im Spektrum besitzt, wird das Goniometer auf diesen Winkel eingestellt. Klicken Sie wieder doppelt auf das Goniometer und wählen Sie für die Option **Kristall Startwinkel** den von Ihnen bestimmten Wert der  $L_\alpha$  Linie. **Kristall Stoppwinkel** müssen Sie auf einen etwas größeren Wert stellen. Die Integrationszeit stellen Sie auf 30 s ein. Starten Sie die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol und beenden Sie diese Messung sofort wieder durch einen Klick auf das Symbol mit dem Quadrat. Der Winkel ist jetzt fest eingestellt. Schalten Sie die Röntgenröhre am Bedienfeld des Röntgengeräts ein. Das Wellensymbol muss leuchten. Die Intensität wird nun am Display angezeigt und nach Ablauf der Integrationszeit fortlaufend aktualisiert. Wählen Sie am Steuergerät für die Absorberscheibe den Wert Null und lesen Sie die Intensität am Display ab. Notieren Sie nicht den ersten aktualisierten Wert auf dem Display sondern warten Sie ab bis der Wert auf dem Display erneut aktualisiert wurde. Wiederholen Sie dies für alle weiteren Absorberdicken. Auch hier ist es wichtig, dass Sie nicht direkt den Wert nach der Aktualisierung aufschreiben sondern einen weiteren Messzyklus abwarten. Sie müssen immer sicher sein, dass Sie mit jeder Einstellung tatsächlich genau 30 Sekunden gemessen haben. Notieren Sie bei jeder Messung die Absorberdicke und die gemessene Intensität. Tragen Sie die Messwerte sofort auf ein- bzw. zweidekadisches einfachlogarithmisches Papier auf (x-Achse: linear die Absorberdicke und y-Achse: logarithmisch die Intensität). Falls hier „Ausreißer“ auftreten, haben Sie die Möglichkeit einen einzelnen Wert nochmals nachzumessen.

## VII Auswertung

**Zu Aufgabe 2 und 3:** Bestimmen Sie aus dem Diagramm der  $L_\alpha$ - Linie die Lage des Peakmaximums sowie die Halbwertsbreite (Breite der Linie in halber Höhe). Mit Hilfe der Bragg- Gleichung und dem Netzebenenabstand von Lithiumfluorid (LiF) mit  $d=201,4$  pm, können Sie die Wellenlänge und damit die Energie der  $L_\alpha$ -Linie berechnen. Den Fehler der Energie berechnen Sie analog aus der Halbwertsbreite. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert  $E \approx 8,4$  keV.

**Zu Aufgabe 4:** Tragen Sie im Diagramm der Absorptionsmessung noch Fehlerbalken ein und zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade und eine Fehlergerade mit ein. Bestimmen Sie hieraus die Halbwertsdicke und berechnen Sie den Massen-

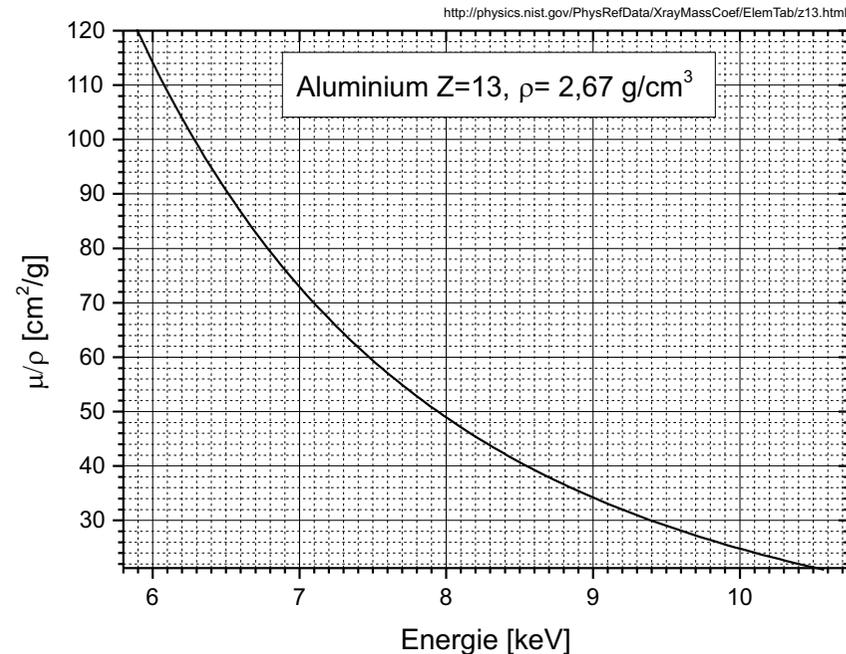


Abbildung 11: Massenabsorptionskoeffizient von Aluminium

absorptionskoeffizienten  $\mu/\rho$  in der Einheit  $\text{cm}^2/\text{g}$ . Die Dichte von Aluminium beträgt  $2,67$   $\text{g}/\text{cm}^3$ . Schätzen Sie den Fehler ab. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert aus Abbildung 11.